Za ten odczyt na XXI Szkole Matematyki Poglądowej *Zdarzyło się w XX wieku* Autor otrzymał medal Filca.
Red.

Matematyka chaosu

Mirosław LACHOWICZ, Warszawa

1. Wstęp

Badanie zjawisk chaotycznych jest jednym z najmodniejszych kierunków we współczesnej nauce. Świadczy o tym choćby liczba poświęconych temu tematowi publikacji, które ukazały się w ostatnich latach (por. bibliografię). Powszechna jest opinia, że „*teoria chaosu, oprócz teorii względności i mechaniki kwantowej, jest trzecią wielką rewolucją naukową w fizyce naszego stulecia*" ([Te], str. 208). Przy czym rewolucja ta, zdecydowanie bardziej niż dwie poprzednie, dotyczy Nauki jako całości (Por. rozdział VII w książce Coveneya i Highfielda [CH], książkę Glassa i Mackeya [GM] oraz prace wymienione na str. 586 w książce [Hi]). Naukowcy dostrzegają (lub chcą dostrzegać) zjawiska chaotyczne w wielu procesach przyrodniczych, takich jak:
(-) ruchy płynów (turbulencja),
(-) „zataczanie" się Hyperionu — jednego z księżyców Saturna,
(-) przebieg chorób (układ immunologiczny w walce np. z wirusem HIV, arytmia serca, arytmie oddechowe, napady padaczkowe).
(Por. [CH], [Gl] oraz [St]. Jeden z paragrafów rozdziału VII książki [CH] nosi tytuł „Chaos przyczyną seksu". J. Gleick [Gl], str. 17, stwierdza: „Teraz nauka zdaje się dostrzegać chaos wszędzie")

Teoria chaosu doprowadziła do nowego *paradygmatu nauki* (por. [Te]). „*Znajomość praw rządzących światem nie gwarantuje jego poznawalności*" ([La], str. 57).

Dużym problemem jest odróżnienie chaosu (zjawiska deterministycznego) od *szumu* (zjawiska losowego).

Jak wielokrotnie bywało w historii nauki (por. np. [LP]) nadzieje rozbudzone „odkryciem" chaosu deterministycznego stymulują rozwój matematycznych teorii związanych z jego opisem. Istnieje wiele matematycznych podejść do tego fenomenu (np. [De], [LM] oraz [Ru2]). Fundamentalnym pytaniem jest — co naprawdę należy rozumieć przez chaos. Nie ma jedynej, powszechnie akceptowanej definicji chaosu. Jednakże wielu matematyków przyjmuje definicję R.L. Devaneya, zaproponowaną w książce [De].

Devaney wyodrębnił 3 cechy chaosu:
$\mathfrak{T}$ — topologiczną przechodniość (*topological transitivity*),
$\mathfrak{P}$ — gęstość punktów okresowych,
$\mathfrak{S}$ — wrażliwość na zmianę danych początkowych (*sensitive dependence on initial data*).

Jak będzie widoczne w następnym paragrafie, warunek $\mathfrak{T}$ wyraża nierozkładalność danej przestrzeni (rozrzucanie punktów po całej przestrzeni), $\mathfrak{P}$ jest „elementem regularności", a $\mathfrak{S}$ wyraża nieprzewidywalność.

2. Chaos według Devaneya

W artykule tym będę rozważał dyskretne układy dynamiczne (krótką wycieczkę do krainy procesów z czasem ciągłym zaproponuję pod koniec artykułu). Odpowiada to sytuacji, w której pomiary danego procesu dokonywane są nie w sposób ciągły (o ile to w ogóle jest możliwe), lecz w oddzielonych od siebie chwilach czasu. Każdy kolejny pomiar, to kolejna *iteracja* określona przez pewną funkcję f (prawo danego zjawiska).

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech

$$f: \quad X \to X$$

będzie ciągłą funkcją. Funkcja f zadaje dynamikę na przestrzeni (X, d).

Bibliografia, przedstawiona na końcu tego artykułu, jest zdecydowanie niekompletna. Bogaty spis (wraz z krótkimi opisami) literatury opublikowanej do roku 1994 można znaleźć w książce Hilborna [Hi]. Spis literatury, głównie z zakresu fizyki, zawierają bibliografie książek [Ot] i [Sc].

$\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 2.1. *Orbitą punktu* $x \in X$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{O}_+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\},$$

gdzie $f^n(x) = f\big(f^{n-1}(x)\big)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f^0(x) = x$.

Definicja 2.2. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem okresowym* o okresie $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $f^n(x) = x$ oraz jeżeli $n \geq 2$, to $f^k(x) \neq x$ dla $k = 1, \dots, n-1$.

Definicja 2.3. Punkt okresowy o okresie 1 nazywamy *punktem stałym.*

Definicja 2.4. Orbitę punktu okresowego nazywamy *orbitą okresową.*

Wprowadzę teraz pojęcie topologicznej przechodniości.

Definicja 2.5. Funkcja f ma własność *topologicznej przechodniości* (spełnia $\mathfrak{T}$) $\Leftrightarrow$ dla dowolnej pary niepustych zbiorów otwartych U, V w X istnieje $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Własność $\mathfrak{T}$ oznacza, że punkty przemieszczają się (w kolejnych iteracjach) z każdego dowolnie małego zbioru otwartego do każdego innego. Innymi słowy, punkty są rozrzucane po całej przestrzeni X i przestrzeni tej nie można rozłożyć na rozłączne (niepuste) otwarte podzbiory niezmiennicze względem funkcji f („$\mathfrak{T}$ *wyraża nierozkładalność*").

Można zauważyć ([De]), że jeżeli funkcja f ma orbitę gęstą w X, to spełnia $\mathfrak{T}$ (dla zwartych przestrzeni metrycznych prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne).

Definicja 2.6. Funkcja f ma własność *gęstości punktów okresowych* (spełnia $\mathfrak{P}$) $\Leftrightarrow$ punkty okresowe funkcji f są gęste w X.

Własność $\mathfrak{P}$ wyraża element regularności w chaosie. Orbity okresowe są orbitami regularnymi (w tym sensie, że po pewnym czasie wraca się do punktu wyjścia). Własność $\mathfrak{P}$ oznacza, że takich punktów, z których wychodzą regularne orbity, jest dużo. W odróżnieniu od przypadkowości (losowości), w deterministycznym chaosie powinien być pewien porządek.

Definicja 2.7. Funkcja f ma własność *wrażliwości na zmianę danych początkowych* (spełnia $\mathfrak{S}$) $\Leftrightarrow$ istnieje taka $\delta > 0$, że, dla każdego $x \in X$ i każdego jego otoczenia U_x, istnieje $y \in U_x$ oraz $n \geq 0$:

$$d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \delta.$$

Stała δ nazywa się *stałą wrażliwości* (zależy ona, oczywiście, jedynie od (X, d) i f).

Własność $\mathfrak{S}$ oznacza, że, dla każdego punktu x, istnieje punkt, dowolnie bliski punktowi x, który iteracje oddalają (o więcej niż δ) od iteracji punktu x. Nie oznacza to jednak, że wszystkie punkty bliskie muszą oddalić się o więcej niż δ.

Mocniejszą własnością (wszystkie bliskie punkty muszą się oddalać) jest rozszerzalność (*expansiveness*).

Definicja 2.8. Funkcja f ma własność *rozszerzalności* (spełnia $\mathfrak{E}$) $\Leftrightarrow$ istnieje taka $\alpha > 0$, że dla każdego $x \in X$ i każdego $x \in X$, $x \neq y$, istnieje $n \geq 0$:

$$d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \alpha.$$

Przykład 2.9. W $X = \mathbb{R}^1$ z klasyczną metryką, każda funkcja różniczkowalna f, taka, że

$$|f'(x)| \geq a > 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

ma własność $\mathfrak{E}$ (a zatem $\mathfrak{S}$).

Własność $\mathfrak{S}$ powszechnie uznawana jest za kwintesencję chaosu. M. Heller ([He], str. 228) stwierdza: „*Z chaosem dynamicznym mamy do czynienia wówczas, gdy równanie (lub równania) opisujące dany proces mechaniczny wykazują szczególną wrażliwość na małą zmianę warunków początkowych*". Natomiast J. Gleick ([Gl], str. 17) pisze: „*Drobne różnice na wejściu mogą szybko przekształcić się w potężne różnice na wyjściu. Zjawisko to otrzymało nazwę:*

wrażliwości na warunki początkowe. W pogodzie, na przykład, manifestuje się to w zjawisku żartobliwie nazwanym efektem motyla: motyl zaburzający powietrze dzisiaj w Pekinie może być przyczyną huraganu w następnym miesiącu w Nowym Jorku".

Nawiasem mówiąc, E.N. Lorenz (autor fundamentalnej pracy [Lo]), protoplasta badań nad chaosem, początkowo mówił o efekcie mewy. Jak stwierdza J. Gleick ([Gl], str. 29), termin „efekt motyla" pochodzi z wystąpienia E.N. Lorenza na sympozjum Amerykańskiego Towarzystwa Postępu Nauki w roku 1979.

„Predictability: does the flap of a butterfly's wings in Brasil set off a tornado in Texas?"

O trafności tego terminu świadczy fakt, że przeniknął on do literatury popularnej, np. do „Jurassic Park" Crichtona , a nawet można go spotkać w codziennych gazetach. Jak zauważa A. Crannell [Cr], termin ten może nawiązywać do książki R. Bradbury'ego , w której podróżnik w czasie zmienia bieg historii nastepując na prehistorycznego motyla (są też inne ślady w literaturze).

M. Crichton, *Jurassic Park: a novel*, Knopf, New York 1990

R. Bradbury, *A Sound of Thunder*, Doubleday 1953

P. Coveney i R. Highfield, nawiązując do modnej obecnie ekonomii, być może chcieliby zastąpić efekt motyla — „efektem emeryta": „ ... *zgodnie z teorią układów dynamicznych, może się zdarzyć, że pewien emeryt, wyciągając oszczędności z banku, spowoduje krach ekonomiczny*" (książka [CH], str. 247).

Do popularyzacji zagadnień związanych z chaosem przyczyniła się zapewne trafność i obrazowość terminu „efekt motyla".

Reasumując, można podać definicję chaosu według Devaney'a:

Definicja 2.10. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Ciągła funkcja $f : X \to X$ jest *chaotyczna* na (X, d), jeżeli f spełnia $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$ oraz $\mathfrak{S}$.

Przykład 2.11. W roku 1838 matematyk belgijski P.F. Verhulst zaproponował funkcję

$$f_\mu = \mu x(1-x), \qquad \mu > 0,$$

do opisu szybkości ograniczonego („logistycznego") wzrostu populacji. Okazało się, że pewne populacje, np. pierwotniaków i bakterii (por. [Da] oraz [Lt]) dadzą się dobrze opisywać funkcją Verhulsta. Na zwykłym kalkulatorze można się przekonać ([PR], str. 23–26), że orbity funkcji f_4 mogą być bardzo dziwne. Okazuje się (dowód można znaleźć w książce [De], str. 50–51), że funkcja f_4 jest chaotyczna na $[0, 1]$ oraz, dla $\mu > 2 + \sqrt{5}$, funkcja f_μ jest chaotyczna na pewnym zbiorze Cantora $\Lambda \subset [0, 1]$.

3. Związki między warunkami $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$ oraz $\mathfrak{S}$

Z trzech warunków $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$ oraz $\mathfrak{S}$, w definicji chaosu, najbardziej intuicyjny jest warunek $\mathfrak{S}$. Jak wspomniałem w poprzednim paragrafie, to właśnie warunek $\mathfrak{S}$ jest powszechnie kojarzony z chaosem przez szeroki krąg odbiorców teorii matematycznej. To tym warunkiem można uzasadniać wagę i piękno badań matematycznych w dziedzinie chaosu, szczególnie gdy chce się o tym przekonać laika (np. dawcę grantu).

Dlatego może wydać się głęboko frustrującym fakt, że warunek $\mathfrak{S}$, w definicji chaosu, jest zbyteczny. Jak pokazali Australijczycy J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis oraz P. Stacey, w pracy [BB],

$$\mathfrak{T} \ \& \ \mathfrak{P} \ \Rightarrow \ \mathfrak{S},$$

dokładniej:

Twierdzenie 3.1. (BBCDS 1992) Niech X będzie zbiorem nieskończonym i (X, d) — przestrzenią metryczną. **Jeżeli** funkcja ciągła $f : X \to X$ spełnia $\mathfrak{T}$ i $\mathfrak{P}$, **to** spełnia $\mathfrak{S}$.

Dowód ([BB]) jest elementarny i sprowadza się do wykorzystania kilkakrotnie nierówności trójkąta.

Twierdzenie 3.1 odpowiada na fundamentalne pytanie: czy chaos związany jest tylko z topologicznymi własnościami przestrzeni (tzn. czy chaos jest zachowywany przez topologiczne sprzężenia).

Definicja 3.2. Funkcje $f : X \to X$ i $g : Y \to Y$, określone na przestrzeniach topologicznych X i Y są *topologicznie sprzężone*, jeżeli istnieje homeomorfizm $h : X \to Y$, taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

jest przemienny, czyli

$$h \circ f \circ h^{-1}(y) = g(y).$$

$\mathfrak{T}$ i $\mathfrak{P}$ są, oczywiście, własnościami topologicznymi. Natomiast $\mathfrak{S}$ jest własnością metryczną i w ogólności nie jest zachowana w topologicznych sprzężeniach, jak pokazuje następujący przykład (podany w [BB]):

Przykład 3.3 (BBCDS 1992) Niech $X =]1, \infty[$ z klasyczną metryką, $f(x) = 2x$, $Y =]0, \infty[$, $h(x) = \log x$. Wówczas

$$g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y) = h(2e^y) = y + \log 2.$$

Zatem f spełnia $\mathfrak{S}$ (nawet $\mathfrak{E}$), natomiast g jest przesunięciem, a więc nie spełnia $\mathfrak{S}$.

Być może wynik ten, podobnie jak termin „efekt motyla", wart jest rozpowszechnienia. Szczególnie politycy powinni być uświadomieni, że chaosu nie można się pozbyć przez gładkie odwracalne zmiany.

Jednakże, twierdzenie 3.1 gwarantuje, że razem $\mathfrak{T}$ i $\mathfrak{P}$ implikują $\mathfrak{S}$. Zatem chaos jest własnością topologiczną, a nie metryczną.

Na marginesie warto zauważyć, że $\mathfrak{S}$ można traktować jako warunek topologiczny w zwartej przestrzeni metrycznej. Rzeczywiście: można pokazać, że jeżeli X jest przestrzenią zwartą, a f i g są topologicznie sprzężone, to jeżeli f spełnia $\mathfrak{S}$, to również g spełnia $\mathfrak{S}$ (choć być może z inną stałą wrażliwości).

Warunek $\mathfrak{S}$ należy usunąć z definicji chaosu, ale jak się okazuje w przypadku ogólnym, oba warunki $\mathfrak{T}$ i $\mathfrak{P}$ muszą w tej definicji pozostać. D. Assaf IV i S. Gadbois [AG] skonstruowali dwa elementarne przykłady pokazujące, że

$$\mathfrak{T} \ \& \ \mathfrak{S} \ \not\Rightarrow \ \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{P} \ \& \ \mathfrak{S} \ \not\Rightarrow \ \mathfrak{T}.$$

Natomiast, w przypadku jednowymiarowym, udowodniono:

Twierdzenie 3.4 (BC 1992, VB 1994). Jeżeli X jest ograniczonym lub nieograniczonym przedziałem w $\mathbb{R}^1$, to

$$\mathfrak{T} \ \Rightarrow \ \mathfrak{P}$$

(a zatem $\mathfrak{T} \Rightarrow \mathfrak{S}$).

Dowód można znaleźć w [CB], gdzie wykorzystuje się kilka bardzo nietrywialnych wyników. Elementarny dowód podali M. Vellekoop i R. Berglund [VB]. W dowodzie wykorzystuje się w sposób istotny porządek w $\mathbb{R}^1$.

W przypadku jednowymiarowym definicja chaosu sprowadza się do jednego warunku $\mathfrak{T}$. Natomiast, jak pokazują przykłady Vellekoopa i Berglunda, nie da się przyjąć tylko obu warunków $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{S}$.

Przykład 3.5 $\quad \mathfrak{P} \ \not\Rightarrow \ \mathfrak{S}.$

Aby się o tym przekonać wystarczy wziąć funkcję identycznościową na dowolnym przedziale.

Przykład 3.6 $\quad \mathfrak{P} \ \& \ \mathfrak{S} \ \not\Rightarrow \ \mathfrak{T}$

Niech $X = [0, \infty[$ i

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ -3x+2 & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \frac{2}{3} \le x < 1 \\ f(x-1)+1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Funkcja ta spełnia warunek $\mathfrak{S}$, gdyż $|f'(x)| = 3 \ \forall x \in [0, \infty[$. Łatwo można zauważyć, że f^n ma $3^n - 2$ punktów stałych między dwiema liczbami całkowitymi, a odległość między najbliższymi punktami stałymi jest mniejsza od $\frac{1}{3^n-1}$. Zatem spełniony jest warunek $\mathfrak{P}$. Ale $f([0,1]) = [0,1]$ i f nie spełnia $\mathfrak{T}$ na $[0, \infty[$ (f nie rozrzuca punktów po całym $[0, \infty[$). Przykład dla przedziału ograniczonego otrzymuje się np. rozpatrując tę samą funkcję na $X = [0, 2]$.

Przykład 3.7 $\quad \mathfrak{S} \not\Rightarrow \mathfrak{P}$

Na ograniczonym przedziale: niech $X = [0, \frac{3}{4}]$ i

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-x) & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Funkcja f spełnia $\mathfrak{E}$, a zatem i $\mathfrak{S}$. Można pokazać, że nie ma punktów okresowych w $]0, \frac{3}{8}[$. Rzeczywiście: jeżeli $x_0 \in]0, \frac{3}{8}[$, to

$$f^n(x_0) = \left(\frac{3}{2}\right)^n x_0 \quad \text{dla} \quad n < -\frac{\log(2x_0)}{\log \frac{3}{2}}.$$

Jeżeli $n_0 = E\left(-\frac{\log(2x_0)}{\log \frac{3}{2}} + 1\right)$, gdzie $E(x)$ jest częścią całkowitą x, to

$$\frac{1}{2} < f^{n_0}(x_0) \le \frac{3}{4}.$$

Natomiast $f([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) \subset [\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$. Zatem orbity startujące z $]0, \frac{3}{8}[$ wychodzą z tego odcinka i już nigdy do niego nie powracają.

Na nieograniczonym przedziale: $X = [0, \infty[$, $f(x) = 2x$.

Z twierdzenia 3.4 wynika, że w przypadku jednowymiarowym (na przedziałach) warunki $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{S}$ są zbędne w definicji chaosu, a warunek $\mathfrak{T}$ jest równoważny chaosowi. Widać stąd, że warunek $\mathfrak{T}$ jest w definicji chaosu fundamentalny i warto pokusić się o jego intuicyjne uzasadnienie.

4. Nowe pomysły

Warunek $\mathfrak{T}$, w przeciwieństwie do warunku $\mathfrak{S}$, nie poddaje się łatwej interpretacji. Należy wątpić, czy udałoby się go wprowadzić do literatury popularnej. Szczególna rola pełniona przez warunek $\mathfrak{T}$ wymaga wytłumaczenia (a odbiorcy i granto–dawcy czekają).

Annalisa Crannell, w artykule [Cr], zadaje pytanie: „*dlaczego topologiczna przechodniość, dlaczego nie coś innego?*". Wprowadza dwa warunki, jej zdaniem, łatwiej interpretowalne niż $\mathfrak{T}$.

Definicja 4.1 Funkcja $f : X \to X$ ma własność *słabego łączenia* (*weakly blending*) (spełnia $\mathfrak{b}$) $\Leftrightarrow$ dla dowolnej pary niepustych zbiorów otwartych U, V w X, istnieje $n \in \mathbb{N}$, t.ż.

$$f^n(U) \cap f^n(V) \neq \emptyset.$$

Definicja 4.2 Funkcja $f : X \to X$ ma własność *mocnego łączenia* (*strongly blending*) (spełnia $\mathfrak{B}$) $\Leftrightarrow$ dla dowolnej pary niepustych zbiorów otwartych U, V w X, istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że

$$f^n(U) \cap f^n(V) \text{ zawiera niepusty podzbiór otwarty.}$$

Warunki łączenia Crannell intuicyjnie wyrażają cechę przeciwstawną do $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S}$ to odpychanie bliskich punktów, podczas gdy łączenie — przyciąganie odległych.

Jak zauważa Crannell łączenie ma wadę w porównaniu z $\mathfrak{T}$: funkcja, która spełnia warunek łączenia, nie jest homeomorfizmem. Ponadto, nawet w niskich wymiarach ani łączenie nie musi implikować $\mathfrak{T}$, ani $\mathfrak{T}$ nie musi implikować łączenia. Natomiast, przy dodatkowych założeniach, spełnione jest twierdzenie [Cr]:

Twierdzenie 4.3 (Crannell 1995). Jeżeli X jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^1$, funkcja f spełnia warunek $\mathfrak{P}$ oraz ma punkt stały odpychający, to

$$\mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{T} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{b}.$$

Pat Touhey zaproponowała nową definicję chaosu (równoważną, jak pokazała w [To], definicji Devaneya 2.10):

Definicja 4.4 Ciągła funkcja $f : X \to X$ jest *chaotyczna* na $X \Leftrightarrow$ dla każdej pary niepustych otwartych podzbiorów U, V w X, istnieje taki punkt okresowy $x_p \in U$ oraz istnieje taka liczba $n \geq 0$, że

$$f^n(x_p) \in V.$$

Warunek Touhey oznacza, że każda para niepustych otwartych podzbiorów X ma wspólną orbitę okresową. Zostawiam Czytelnikowi ocenę, czy powyższy warunek rzeczywiście odzwierciedla intuicje związane z chaosem.

5. Trójka

Wiadomo, że liczba 3 ma wyjątkowe znaczenie. W teorii chaosu również.

Liczba 3 spełnia wyróżnioną rolę w twierdzeniu A.N. Szarkowskiego, matematyka z Ukrainy. Szarkowski ([Sh1]) rozważał następujący porządek (P.Sz.) liczb naturalnych

$$\begin{array}{c}
3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \dots \\
3 \times 2 \prec 5 \times 2 \prec 7 \times 2 \prec 9 \times 2 \prec \dots \\
3 \times 2^2 \prec 5 \times 2^2 \prec 7 \times 2^2 \prec 9 \times 2^2 \prec \dots \\
\dots \\
\dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1
\end{array}$$

i udowodnił:

Twierdzenie 5.1 (Szarkowski 1964) Niech X będzie zwartym przedziałem w $\mathbb{R}^1$ albo $X = \mathbb{R}^1$. **Jeżeli** funkcja ciągła $f : X \to X$ ma orbitę okresową o okresie n i $n \prec k$, **to** f ma orbitę o okresie k.

Liczba 3 poprzedza wszystkie pozostałe liczby naturalne w porządku Szarkowskiego (P.Sz.), a zatem, jeśli ciągła funkcja ma orbitę okresową o okresie 3, to ma również orbitę okresową o okresie k, dla każdej liczby naturalnej k: „okres 3 implikuje każdy inny okres”.

W rzeczywistości twierdzenie Szarkowskiego jest mocniejsze (por. [Sh1], [Sh2] oraz [Mi]). Ciekawe uwagi historyczne i bibliografię dotyczącą twierdzenia Szarkowskiego można znaleźć w krótkiej pracy M. Misiurewicza [Mi].

Należy podkreślić, że twierdzenie Szarkowskiego zachodzi tylko dla wymiaru 1. Rozważmy prosty przykład obrotu płaszczyzny o kąt 120°: punkt, wokół którego następuje obrót, jest punktem stałym, każdy inny punkt jest okresowy o okresie 3 i nie ma punktów o innych okresach!

Prace Szarkowskiego opublikowane w 1964 i 1965 r., po rosyjsku (angielskie tłumaczenie pracy [Sh1] ukazało się dopiero w 1995 r. w Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg 5, 1995, 1263–1273) w ukraińskim czasopiśmie naukowym, nie zostały od razu zauważone przez środowisko matematyczne. Ich sława rozpoczęła się dopiero po opublikowaniu w 1975, przez T.Y. Li i J. Yorka, pracy [LY], chociaż jej autorzy nie znali twierdzenia Szarkowskiego. Li i York zauważyli, że istnienie orbity o okresie 3, to „krok w kierunku” chaosu.

Li i York stwierdzając, że „okres 3 implikuje chaos” rozumieli chaos w sensie istnienia nieprzeliczalnego zbioru punktów nieokresowych, których orbity nigdy nie staną się okresowe.

Innym przykładem wyjątkowego znaczenia liczby 3 w teorii chaosu jest twierdzenie J.C. Robinsona [Ro].

Do tego momentu rozważaliśmy jedynie układy dynamiczne z czasem dyskretnym. Rozważymy teraz układ dynamiczny z czasem ciągłym.

Niech będzie dany układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d}{dt}u = F(u), \qquad t \in \mathbb{R}^1, \tag{5.1a}$$

z danymi początkowymi

$$u\Big|_{t=0} = u_0, \tag{5.1b}$$

gdzie $u : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą i istnieje jednoznaczne rozwiązanie $u = u(t, u_0) = \phi(t)u_0$ zagadnienia (5.1), dla każdego u_0 i $t \in \mathbb{R}^1$.

Ponadto załóżmy, że układ (5.1a) jest *dyssypatywny*, tzn. istnieje ograniczony zbiór $\mathbb{B}_0$, który przyciąga dowolny, ograniczony zbiór $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$, w skończonym czasie, czyli: dla każdego zbioru ograniczonego $\mathbb{B}$ w $\mathbb{R}^n$, istnieje takie $t_0 = t_0(\mathbb{B}) \in]0, \infty[$, że

$$\phi(t)u_0 \in \mathbb{B}_0 \qquad \forall t \geq t_0 \quad \forall u_0 \in \mathbb{B}.$$

Warunek dyssypatywności jest wystarczający ([BL]) dla istnienia zwartego zbioru $\mathbb{A}$, niezmienniczego i przyciągającego, czyli

$$u_0 \in \mathbb{A} \quad \Rightarrow \quad \phi(t)u_0 \in \mathbb{A} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^1$$

oraz

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\phi(t)u_0, \mathbb{A}) = 0,$$

gdzie $\operatorname{dist}(x, \mathbb{Y}) = \inf_{y\in\mathbb{Y}} |x - y|$. Taki zbiór $\mathbb{A}$ nazywa się *globalnym atraktorem*.

Układy 1-, lub 2-wymiarowe (z czasem ciągłym) nie mogą mieć atraktorów o skomplikowanej strukturze, a zatem nie mogą mieć skomplikowanej dynamiki. W przypadku 2-wymiarowym wynika to z twierdzenia Poincarégo–Bendixsona.

Globalny atraktor jest zbiorem, do którego zbliżają się asymptotycznie orbity (trajektorie) startujące z jego dopełnienia. Poznanie dynamiki w atraktorze pozwala zrozumieć długookresową dynamikę danego układu. Atraktory układów n-wymiarowych, dla $n \geq 3$, mogą mieć bardzo skomplikowaną strukturę geometryczną. Przykładem jest atraktor dla (3-wymiarowego) układu E.N. Lorenza ([MM]). Atraktory o skomplikowanej strukturze wiąże się z istnieniem chaosu.

Te skomplikowane atraktory nazywa się dziwnymi, lub chaotycznymi. Często definiuje się dziwny atraktor, jako atraktor, który jest fraktalem. Przystępnym wprowadzeniem do teorii dziwnych atraktorów jest praca D. Ruelle'a [Ru1].

Twierdzenie J.C. Robinsona gwarantuje, że, z dowolną dokładnością $\varepsilon > 0$, na dowolnym odcinku czasu $[0, T]$, dowolne rozwiązanie n-wymiarowego układu (5.1), które leży w globalnym atraktorze $\mathbb{A}$, może być przybliżane przez rozwiązanie układu 3-wymiarowego:

$$\frac{d}{dt}v = f(v), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

gdzie f jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza . Dokładniej:

Funkcja f zależy od ε i T, w taki sposób, że jeżeli ε maleje i T rośnie, to stała Lipschitza funkcji f rośnie.

Twierdzenie 5.2 (Robinson 1998). Niech $T > 0$ i $\varepsilon > 0$ będą ustalone. Istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, spełniająca warunek Lipschitza oraz taka funkcja $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$, spełniająca warunek Höldera, że

dla każdego $u_0 \in \mathbb{A}$ istnieje takie rozwiązanie v układu (5.2), że

$$|\Phi(v(t)) - \phi(t)u_0| \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [0, T] \tag{5.3}$$

Dowód w [Ro].

Zatem dynamika n-wymiarowego układu ($n \in \mathbb{N}$), w globalnym atraktorze $\mathbb{A}$, może być przybliżana dynamiką odpowiednich układów 3-wymiarowych. Wynik ten J.C. Robinson rozszerzył na pewną klasę układów równań różniczkowych cząstkowych (a więc układów nieskończenie wymiarowych). Owa klasa obejmuje ważne równanie Naviera–Stokesa (por. [Li]), opisujące przepływ lepkiego, nieściśliwego płynu. Zatem rozwiązanie równania, które być może opisuje zjawisko turbulencji, przybliża się dynamiką 3-wymiarową.

Nie jest pewne, czy równanie Naviera–Stokesa rzeczywiście opisuje turbulencję. Mimo powszechnej chyba wiary, że tak jest, nie ma teorii, która by precyzowała sens takiego opisu. Nawet gdyby równanie Naviera–Stokesa opisywało turbulencję, nie jest zatem jasne, czy matematyczny kontekst, w którym się rozważa równanie Naviera–Stokesa, nie wyprowadzałby poza zakres turbulencji.

Ideę twierdzenia 5.2 można również wyrazić tak: jeżeli odpowiednio długo poczekamy, to dany skomplikowany układ zacznie zachowywać się w przybliżeniu jak układ 3-wymiarowy. Czy stąd można wyprowadzić wniosek, że Świat, nawet jeżeli nie jest 3-wymiarowy, to jest „prawie" 3-wymiarowy?

Bibliografia

[AG] Assaf D.IV & Gadbois S., *Definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99**, 1992, 865.

[BB] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. & Stacey P., *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99**, 1992, 332–334.

[BC] Block L.S. & Coppel W.A., *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Mathematics 1513, Springer–Verlag, Berlin 1992.

[BL] Billotti J.E. & LaSalle J.P., *Dissipative periodic processes*, Bull. Amer. Math. Soc. **77**, 1971, 1082–1088.

[CH] Coveney P. & Highfield R., *Strzałka czasu*, Zysk i S–ka, Poznań 1997.

[Cr] Crannell A. *The role of transitivity in Devaney's definition of chaos* **102**, 1995, 788–793.

[Da] D'Ancona U., *The struggle for existence*, Brill, Leiden 1954.

[De] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison–Wesley, Redwood City 1989.

[Fr] Frantz M., *Two functions whose powers make fractals*, Amer. Math. Monthly **105**, 1998, 609–617.

[Gl] Gleick J., *Chaos*, Zysk i S–ka, Poznań 1996.

[GM] Glass L. & Mackey M.C., *From clocks to chaos, The rhythms of life*, Princeton University Press, Princeton 1988.

[He] Heller M., *Uchwycić przemijanie*, Znak, Kraków 1997.

[Hi] Hilborn R.C., *Chaos and nonlinear dynamics*, Oxford University Press, New York 1994.

[Ka] Kato K., *A note on definition of chaos*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.) **18**, 1997, 123–127.

[Ku] Kudrewicz J., *Fraktale i chaos*, WN–T, Warszawa 1996.

[La] Lasota A., *Wprowadzenie do dyskusji: Matematyka a filozofia, Otwarta nauka i jej zwolennicy*, pod red. M. Hellera i J. Urbańca, OBI Kraków, Biblos, Tarnów 1996.

[Li] Lions P.L., *Mathematical topics in fluid mechanics. Incompressible models*, Clarendon Press, Oxford 1996.

[LM] Lasota A. & Mackey M.C., *Chaos, fractals, and noise*, Springer–Verlag, New York 1994.

[LP] Lachowicz M. & Palczewski A., *Rachunek prawdopodobieństwa a fizyka*, Matem. Społeczeństwo Nauczanie **9**, VII 1992, 30–37.

[Lo] Lorenz E.N., *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 1963, 130–141.

[Lt] Lotka A.J., *Elements of mathematical biology*, Dover, New York 1956.

[LY] Li T.Y. & York J., *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 1975, 985–992.

[Mi] Misiurewicz M., *Remarks on Sharkovsky's theorem*, Amer. Math. Monthly **104**, 1997, 846–847.

[MM] Mischaikov K. & Mrozek M., *Chaos in the Lorenz equation: a computer–assisted proof*, Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 1995, 66–72.

[Ot] Ott E., *Chaos w układach deterministycznych*, WN–T, Warszawa 1997.

[PR] Peitgen H.O. & Richter P.H., *The beauty of fractals*, Springer–Verlag, Berlin 1986.

[Ro] Robinson J.C., *All possible chaotic dynamics can be approximated in three dimensions*, Nonlinearity **11**, 1998, 529–545.

[Ru1] Ruelle D., *Strange attractors*, Math. Intelligencer **2**, 1980, 126–137.

[Ru2] Ruelle D., *Chaotic evolution and strange attractors*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[Sh1] Sharkovsky A.N., *Co–existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Math. Zh. **16**, 1964, 61–71, po rosyjsku.

[Sh2] Sharkovsky A.N., *On cycles and structure of a continuous map*, Ukrain. Math. Zh. **17**, 1965, 104–111, po rosyjsku.

[Sc] Schuster H.G., *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa 1995.

[St] Stewart I., *Czy Bóg gra w kości*, PWN, Warszawa 1995.

[Te] Tempczyk M., *Świat harmonii i chaosu*, PIW, Warszawa 1995.

[To] Touhey P., *Yet another definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **104**, 1997, 411–414.

[VB] Vellekoop M. & Berglund R., *On intervals, transitivity = chaos*, Amer. Math. Monthly **101**, 1994, 353–355.