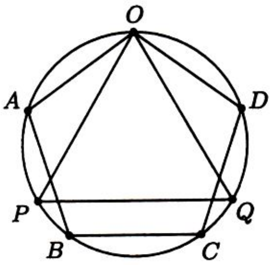
# 200 lat wcześniej, czyli Gaussa konstrukcja wielokątów foremnych

*Marek KORDOS, Warszawa*

Czytając świetny artykuł Zbigniewa Marciniaka o dowodzie Wilesa, doszedłem do wniosku, że warto przypomnieć wynik w pewnym sensie podobny (problem znany, trudny, leżący na obrzeżu matematyki) – uzyskane dwieście lat wcześniej (1796) twierdzenie o konstruowalności wielokątów foremnych.




Rys. 1. Bok piętnastokąta to $PB$ (także $CQ$).

## Redukcja problemu

Pierwszy krok w kwestii konstruowalności znajduje się w *Elementach* Euklidesa. Mianowicie użyta tam konstrukcja piętnastokąta (rys. 1) pozwala bez trudu uogólnić się do twierdzenia

(E) *jeśli konstruowalne są foremne $p_i$-kąty dla $i = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $p_i$ są różnymi liczbami pierwszymi, to konstruowalny jest foremny $n$-kąt dla $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, gdzie $m = 0, 1, 2, \ldots$ (dla $k = 0$ liczba $m$ jest równa co najmniej 2).*

Ponieważ każdy umie z danego $l$-kąta foremnego cyrklem i linijką zrobić $2l$-kąt foremny, więc pozostaje do udowodnienia spostrzeżenie, iż *jeżeli konstruowalne są foremne $p$-kąt i $q$-kąt, gdzie liczby $p$ i $q$ są względnie pierwsze, to konstruowalny jest foremny $pq$-kąt.*

To zaś faktycznie dowiódł już Euklides. Mianowicie skonstruujmy wpisane w jeden okrąg i mające jeden wierzchołek wspólny foremne $p$-kąt i $q$-kąt. Ich wierzchołki dzielą odpowiednio okrąg na $p$ i na $q$ równych łuków. Wobec tego, że $p$ i $q$ są względnie pierwsze, istnieją takie liczby całkowite $a$ i $b$, że

$$(\star) \qquad ap + bq = 1$$

(dowodzi się tego za pomocą algorytmu Euklidesa) – niech, powiedzmy, liczba $b$ będzie ujemna. Łuk pomiędzy $-b$-tym wierzchołkiem $p$-kąta, a $a$-tym wierzchołkiem $q$ kąta jest $pq$-tą częścią okręgu, o co nam chodzi. Aby się o tym przekonać wystarczy podzielić $(\star)$ stronami przez $pq$:

$$a\frac{1}{q} + b\frac{1}{p} = \frac{1}{pq}$$

(na rysunku 1, gdy $p = 3$ i $q = 5$, jest $a = 2$ i $b = -1$).

Pozostała więc kwestia konstruowania $p$-kątów foremnych dla pierwszych $p$. Początek odziedziczony po Starożytnych to była liczba 4 oraz liczby pierwsze 3 i 5.

## Samoograniczenie

Dziewiętnastoletni Gauss zabierając się za problem opuścił liczby pierwsze 7, 11 i 13 i zaatakował liczbę 17. Dlaczego? Trudno to orzec – sam pisał potem (do czego wrócę), że wiedział, iż tylko w „takim" przypadku może rzecz się udać. Takim, to znaczy, gdy mamy do czynienia z liczbą pierwszą postaci $2^k + 1$. Nietrudno zauważyć, że w istocie chodzi o *liczby pierwsze Fermata.*

### ◇Dygresja o liczbach Fermata

Każda liczba pierwsza postaci $2^k + 1$ jest postaci $2^{2^l} + 1$, czyli jest liczbą Fermata. Istotnie, w przeciwnym przypadku można ją rozłożyć:

$$2^{2^k(2l+1)} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^{2l+1} + 1 = \left(2^{2^k} + 1\right)\left(\left(2^{2^k}\right)^{2l} - \left(2^{2^k}\right)^{2l-1} + \ldots - 2^{2^k} + 1\right).$$

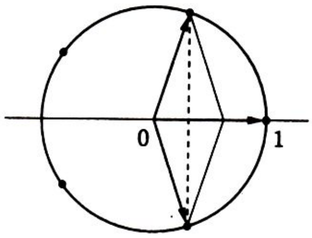
Liczby pierwsze Fermata to 3, 5, 17, 257, 65537 i tu się na razie lista urywa (jest więc taka sama jak za czasów Gaussa); dla $l = 5$ otrzymujemy liczbę złożoną

$$\begin{aligned} 4294967297 &= 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 5^4 \cdot 2^{28} - \left(5^4 \cdot 2^{28} - 1\right) = \\ &= 2^{28}\left(2^4 + 5^4\right) - \left(5^2 \cdot 2^{14}\right)\left(5 \cdot 2^7 + 1\right)\left(5 \cdot 2^7 - 1\right) = \\ &= 641\left(2^{28} - \left(5^2 \cdot 2^{14}\right) \cdot 639\right). \end{aligned}$$

Proszę samemu się przekonać, że liczby złożone otrzymamy także biorąc liczbę Fermata dla $l$ równego 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73 (no, w tym ostatnim przypadku podpowiem, że najmniejszym dzielnikiem pierwszym jest $5 \cdot 2^{75} + 1$). W każdym razie do tej pory jest znanych tylko pięć przytoczonych liczb pierwszych Fermata. ◇

Gaussowi zależało na tym, aby liczba boków konstruowanego wielokąta foremnego minus 1 dawała się „bez końca" dzielić przez dwa. Najpierw jednak algebraiczne spojrzenie na wielokąty foremne.

## Pierwiastki z jedności i ich potęgowanie



Rys. 2

Każdy, kto kiedykolwiek miał do czynienia z pierwiastkami stopnia $n$ z jedności (dalej przez dłuższy czas zakładamy, że $n$ jest ustalone) wie, że są to liczby

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi \cdot k}{n} + i \sin\frac{2\pi \cdot k}{n}, \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

czyli (patrząc na obrazek na płaszczyźnie) po prostu wierzchołki $n$-kąta foremnego. W szczególności (na rysunku 2 jest $n = 5$), gdyby znać sumę $s = \varepsilon_1 + \varepsilon_{n-1}$ (która, wobec symetrii rysunku, jest liczbą rzeczywistą!) można by przeprowadzić następującą konstrukcję $n$-kąta foremnego: w punkcie prostej 01 o współrzędnej $\frac{s}{2}$ wystawiamy prostopadłą do tej prostej – punkty jej przecięcia z okręgiem jednostkowym wraz z punktem 1 są trzema kolejnymi wierzchołkami $n$-kąta foremnego. Metoda Gaussa prowadzi właśnie do znalezienia $s$. Aby mieć pewność, że uzyskana liczba $s$ jest konstruowalna, Gauss uzyskuje ją poprzez rozwiązywanie ciągu równań kwadratowych, co – jak wiadomo – daje się powtórzyć cyrklem i linijką. Z teorii równań kwadratowych potrzebny mu jest tylko fakt, że gdy współczynnik przy kwadracie jest 1, a wyraz wolny jest ujemny, to równanie ma pierwiastki rzeczywiste i to różnego znaku. Więcej potrzebuje informacji o potęgowaniu pierwiastków z jedności.

Załóżmy, że $n$ jest liczbą pierwszą. Jeśli nazwiemy $z = \varepsilon_1$, to będzie $z^k = \varepsilon_k$. W ten sposób związaliśmy z każdym $\varepsilon_k$ pewną funkcję potęgową, oznaczmy ją $\delta_k$. Mamy, w sposób oczywisty

$$\delta_i(\varepsilon_k) = \varepsilon_{(i \cdot k) \bmod n}.$$

Zauważmy, że poddanie dowolnego pierwiastka z jedności działaniu wszystkich funkcji $\delta_i$ daje nam wszystkie pierwiastki z jedności. Podobnie, poddanie zbioru wszystkich pierwiastków z jedności działaniu jednej z funkcji $\delta_i$ zachowuje ten zbiór. Oba dowody są bardzo podobne:
– gdyby było $\delta_i(\varepsilon_k) = \delta_j(\varepsilon_k)$, to musiałoby być $z^{k \cdot i} = z^{k \cdot j}$, czyli $z^{k \cdot (i-j)} = 1$, a więc liczba $k(i-j)$ dzieliłaby się przez $n$, co jest możliwe jedynie gdy $i = j$;
– gdyby było $\delta_k(\varepsilon_i) = \delta_k(\varepsilon_j)$, to musiałoby być $z^{i \cdot k} = z^{j \cdot k}$, co się nie różni od rozpatrzonego przypadku.

Niech teraz $n$ będzie dodatkowo liczbą Fermata. Gauss zadał pytanie, jakie – poza całym zbiorem pierwiastków z jedności i $\emptyset$ – są podzbiory niezmiennicze funkcji $\delta_i$. Okazało się, że po pierwsze – dla pewnych $i$ takie podzbiory istnieją, a po drugie – że łatwiej to zaobserwować jeśli przenumeruje się pierwiastki z jedności. Chodzi tu o przenumerowanie w skali potęgowej (czy, jak kto woli logarytmicznej) i powstał problem, przy jakiej podstawie można tego dokonać. Chcemy, żeby dla pewnego $a$ przekształcenie

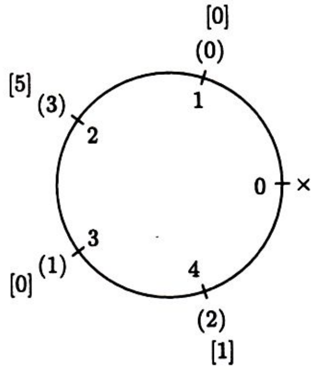
$$\varepsilon_k \text{ ma nowy numer } l, \text{ gdy } k \equiv a^l \pmod{n}$$

było bijekcją na zbiorze pierwiastków różnych od 1. Okazuje się, że do tego potrzeba i wystarcza, aby $a$ było *pierwiastkiem pierwotnym* dla $n$. Co powoduje, że konieczna jest

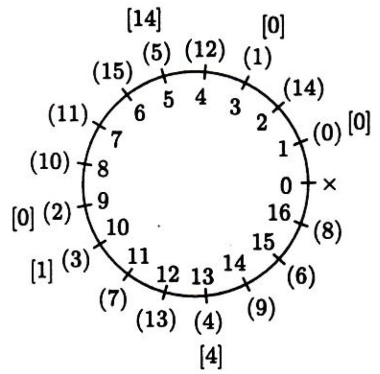
◇Dygresja o pierwiastkach pierwotnych

Liczba $a$ nazywana jest pierwiastkiem pierwotnym dla liczby $n$, gdy rozwinięcie $\frac{1}{a}$ w systemie $n$-tkowym ma okres maksymalnej długości. Np. 7 jest pierwiastkiem pierwotnym dla 10, bo $\frac{1}{7} = 0,(142857)$. Bardziej dla nas przydatna będzie konstatacja, że jest tak wtedy, gdy przy dzieleniu pojawiają się wszystkie możliwe reszty (tu kolejno: 3, 2, 6, 4, 5, 1). Jest rzeczą zaskakującą, że do dziś nie jest znana pełna lista pierwiastków pierwotnych nawet dla 10. Faktycznie i tu nie posunęliśmy się istotnie naprzód od czasów Gaussa. Wiemy więc, np. że, poza liczbą 7, pierwiastkiem pierwotnym dla 10 jest 17, 19, 23, 29, 97, 337, a nie są nim 3 (okres długości 1), 11 (2), 13 (6); zresztą do 1000 wszystkie odwrotności rozwinął Gauss będąc w szkole – jak wobec tego faktu wygląda powtarzana przez popularyzatorów anegdota o sumowaniu liczb od 1 do 100?

To, co Gauss udowodnił o pierwiastkach pierwotnych w interesującej nas materii, to fakt, że liczba 3 jest pierwiastkiem pierwotnym dla liczb pierwszych Fermata. ◇




Rys. 3. Liczby w nawiasach [] podają liczbę pełnych owinięć.




Rys. 4. Proszę uzupełnić brakujące liczby pełnych owinięć.

## Znalezienie równań kwadratowych

Tak więc będziemy dalej posługiwali się przenumerowaniem określonym przez warunek

$$\varepsilon_k \text{ ma nowy numer } l, \text{ gdy } k \equiv 3^l \pmod{n}.$$

Nowe numery będziemy umieszczać w nawiasach, np. $\varepsilon_1 = \varepsilon_{(0)}$.

Związek z problematyką pierwiastków pierwotnych łatwo zauważyć obserwując dwa (eksploatowane dalej) przykłady. Na rysunkach 3 i 4 pokazane jest przenumerowanie dla $n$ równego 5 i 17. Wszystkie (poza 1) pierwiastki otrzymają nowe numery, gdy z dzielenia przez $n$ odpowiedniej potęgi otrzymamy wszystkie możliwe reszty – dokładnie jak dla rozwinięcia dziesiętnego. Na rysunku 3 otrzymujemy kolejno $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $4 = 3^2 - 1 \cdot 5$, $3 = 3^3 - 5 \cdot 5$. Na następnym rysunku mamy $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $10 = 3^3 - 1 \cdot 17$, $13 = 3^4 - 4 \cdot 17$, $5 = 3^5 - 14 \cdot 17, \ldots$

Ze względu na charakter przenumerowania mamy w szczególności

$$\delta_{(k)}\delta_{(l)} = \delta_{(k+l)} \quad \text{i} \quad \delta_{(k)}(\varepsilon_{(l)}) = \varepsilon_{(k+l)}.$$

Nietrudno też wskazać podzbiory niezmiennicze. Dla $k$ nieparzystego niezmiennicze są jedynie podzbiory niewłaściwe, dla $k$ parzystego dochodzi jeszcze zbiór pierwiastków o nowych numerach parzystych (a więc i o nieparzystych), dla $k$ podzielnego przez 4 – zbiór pierwiastków o nowych numerach podzielnych przez 4 (i, wobec tego, tych, których nowe numery z dzielenia przez 4 dają resztę 2) itd.

Te właśnie podzbiory będą „producentami" równań kwadratowych. Oznaczmy przez $\sigma_{i,j}$ sumę tych pierwiastków, których nowe numery z dzielenia przez $i$ dają resztę $j$. To, co zauważył Gauss, jest dość niewidoczne. Mianowicie okazuje się, że zarówno $s_2 = \sigma_{2,0} + \sigma_{2,1}$ i $t_2 = \sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$, jak też (dla $n = 17$) $s_4 = \sigma_{4,0} + \sigma_{4,2}$ i $t_4 = \sigma_{4,0} \cdot \sigma_{4,2}$, jak też $s_8 = \sigma_{8,0} + \sigma_{8,4}$ i $t_8 = \sigma_{8,0} \cdot \sigma_{8,4}$, są liczbami rzeczywistymi, co więcej, liczby $t_i$ są ujemne. Gdy się je obliczy, będzie można więc znajdować wszystkie te sigmy poprzez rozwiązanie odpowiednich równań kwadratowych, co doprowadzi w końcu do znalezienia liczby rzeczywistej

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(2)} = z + z^4, \text{ gdy } n = 5$$

i

$$\sigma_{8,0} = \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(8)} = z + z^{16}, \text{ gdy } n = 17,$$

a więc do rozwiązania problemu konstrukcji odpowiednio pięcio- i siedemnastokąta foremnego.

Weźmy się więc za obliczenia. Zauważmy, że jest $s_2 = -1$, tak dla $n = 5$, jak i dla $n = 17$. Bowiem wszystkie pierwiastki z jedności dla każdego $n$, a więc wraz z pomijaną wyżej liczbą 1, są wierzchołkami wielokąta foremnego, a zatem ich suma (ze względu na obrotową symetrię takiego wielokąta) jest równa 0. Obliczenie $t_2$ i w konsekwencji znalezienie równania kwadratowego na $\sigma_{2,0}$ przeprowadzimy oddzielnie dla $n = 5$ (gdzie na tym problem konstrukcji się zakończy) i dla $n = 17$, gdzie będzie to pierwszy krok. Dla $n = 5$ mamy

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(2)} \quad \text{i} \quad \sigma_{2,1} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(3)}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}t_2 &= \sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1} = \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} = \\ &= \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(0)} = \\ &= \delta_{(0)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)}\big) + \delta_{(1)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)}\big) + \delta_{(2)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)}\big) + \delta_{(3)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)}\big) = \\ &= \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = -1.\end{aligned}$$

W przedostatniej równości wykorzystaliśmy odnotowany wcześniej fakt, że obrazy dowolnego pierwiastka poddanego działaniu wszystkich przekształceń $\delta_i$ wypełniają cały zbiór pierwiastków.

Zatem mamy $s_2 = -1 = t_2$, wobec czego do rozwiązania jest – wobec wzorów Viète'a – równanie

$$x^2 + x - 1 = 0, \quad \text{zatem} \quad x = \sigma_{2,0} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

i w połowie tej odległości ma być wystawiona prostopadła na rysunku 2, dając wierzchołki pięciokąta foremnego.

Dla $n = 17$ rachunek jest bardziej skomplikowany, choć – w gruncie rzeczy – taki sam.

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(2)} + \ldots + \varepsilon_{(14)} \quad \text{i} \quad \sigma_{2,1} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(3)} + \ldots + \varepsilon_{(15)}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}t_2 &= \sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1} = \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(3)} + \ldots + \varepsilon_{(14)}\varepsilon_{(13)} + \varepsilon_{(14)}\varepsilon_{(15)} = \\ &= \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \ldots + \varepsilon_{(14)}\varepsilon_{(15)} + \varepsilon_{(15)}\varepsilon_{(0)} + \\ &\quad + \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(4)} + \ldots + \varepsilon_{(14)}\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(15)}\varepsilon_{(2)} + \\ &\quad + \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(5)} + \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(6)} + \ldots + \varepsilon_{(14)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(15)}\varepsilon_{(4)} + \\ &\quad + \varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(7)} + \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(8)} + \ldots + \varepsilon_{(14)}\varepsilon_{(5)} + \varepsilon_{(15)}\varepsilon_{(6)} = \\ &= \sum_{r=1,3,5,7} \Big(\delta_{(0)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(r)}\big) + \delta_{(1)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(r)}\big) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \delta_{(14)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(r)}\big) + \delta_{(15)}\big(\varepsilon_{(0)}\varepsilon_{(r)}\big)\Big) = \\ &= \sum_{r=1,3,5,7} \big(\varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(1)} + \ldots + \varepsilon_{(14)} + \varepsilon_{(15)}\big) = \sum_{r=1,3,5,7} -1 = -4.\end{aligned}$$

Jak się wydaje, jedyną wątpliwość może budzić, czy uporządkowanie iloczynów po trzeciej równości wyczerpuje je wszystkie – ale jest ich 16 i więcej być nie powinno.

Tym razem otrzymaliśmy na $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$ równanie

$$x^2 + x - 4 = 0, \quad \text{zatem} \quad \sigma_{2,0} = \frac{\sqrt{17}-1}{2} = s_4 \text{ i } \sigma_{2,1} = \frac{-\sqrt{17}-1}{2}.$$

To, że akurat tak należy przyporządkować pierwiastki równania, najłatwiej jest stwierdzić geometrycznie: ponieważ są one liczbami rzeczywistymi, więc ich wielkość bierze się tylko z zsumowania części rzeczywistych odpowiednich pierwiastków z jedności, a więc rzutów prostokątnych tych pierwiastków na prostą 01 – tu już nietrudno przekonać się, że $\sigma_{2,0} > \sigma_{2,1}$.

Podobne rozumowanie daje nam, że $t_4 = \sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2} = -1$, co pozwala znaleźć te sigmy i, idąc dalej, obliczyć $s_8$ i $t_8$ – trudności, jakie się mogą pojawić będą czysto rachunkowe. Ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned}\sigma_{8,0} &= \frac{1}{8}\Big(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\Big) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}.\end{aligned}$$

Zatem w połowie początkowego odcinka o tej długości na półprostej 01 należy wystawić prostopadłą, by otrzymać wierzchołki siedemnastokąta foremnego. Rzecz jasna, konstrukcja siedemnastokąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki została później opisana bezpośrednio. Żaden jednak z takich przepisów nie korzysta z jakichś rozumowań bezpośrednio geometrycznych, lecz tylko stara się możliwie w małej liczbie kroków uzyskać odcinek o podanej wyżej długości. Nie wiem, czy był notowany rekord oszczędności (minimum nakreślonych linii, na przykład) – dość oszczędny przepis można znaleźć np. w dwukrotnie wydanej przez PWN książce: H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*. Faktem jednak pozostaje, że konstruowalność siedemnastokąta foremnego środkami klasycznymi jest rezultatem algebraicznym, jedynie z geometryczną ilustracją.

## Maksymalna ogólność

Nie jest specjalnie skomplikowane intelektualnie uogólnienie rozumowań (obliczeń) podanych dla $n = 5$ i $n = 17$ na $n$ będące dowolną liczbą pierwszą Fermata. I to Gauss zrobił. Słusznie zresztą uważał, że to, co było najcenniejsze w jego wyniku, to właśnie konstrukcja siedemnastokąta.

Tym sposobem podane na początku twierdzenie (E) przybrało postać bardziej konkretną
(E-G) *jeśli $p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, są różnymi liczbami pierwszymi Fermata, to konstruowalny jest foremny $n$-kąt dla $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, gdzie $m = 0, 1, 2, \ldots$. (dla $k = 0$ liczba $m$ jest równa co najmniej 2).*

Gauss jednak podał społeczności matematycznej twierdzenie bez porównania mocniejsze
(G) *$n$-kąt foremny jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, gdzie $p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, są różnymi liczbami pierwszymi Fermata, $m = 0, 1, 2, \ldots$.
(dla $k = 0$ liczba $m$ jest równa co najmniej 2).*

Warto zwrócić uwagę, że jest to stwierdzenie zupełnie innego typu, niż to, o czym była mowa poprzednio. Tam podana była metoda skonstruowania pewnych $n$-kątów foremnych. Tu twierdzi się dodatkowo, że dla tych $n$, do których ta metoda się nie stosuje, nie ma żadnej skutecznej metody. Tak więc nie dadzą się skonstruować ani 7-kąt foremny (bo 7 nie jest liczbą Fermata), ani 9-kąt foremny (bo użyte liczby pierwsze Fermata nie są różne), ani 4294967297-kąt foremny (bo ta liczba Fermata nie jest pierwsza). Metody takiego dowodu nie mają nic wspólnego z tymi, o jakich wyżej była mowa.

Warto (dla pełniejszej analogii z tematem artykułu Zbigniewa Marciniaka) wspomnieć, że Gauss napisał zamiast dowodu tego twierdzenia w nieporuszaną tutaj stronę:
*Chociaż rozmiary tej pracy nie pozwalaja na jego dowód, to myślimy, że należy to jednak ogłosić, aby nikt nie zabierał się do szukania innych przypadków konstruowalności, poza tymi, które zostały przedstawione w naszej pracy, i nie tracił bezowocnie czasu.*

Dowód tego twierdzenia nie został nigdy przez Gaussa opublikowany. Autorytet Gaussa był jednak tak wielki, że wynik nie został zakwestionowany i jego opublikowane dowody mają jedynie anonimowych autorów.