

Kilka scen z życia spiral,

czyli o reinkarnacji i klonowaniu w matematyce

Jest to zapis wykładu wygłoszonego na XX Szkole Matematyki Poglądowej *Kultura matematyczna, teoria i zbiór zadań*, Grzegorzewice, styczeń '98.

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Celem tej pracy jest uwidocznienie (na jednym wybranym przykładzie) związków matematyki z otaczającą nas rzeczywistością. Z tego punktu widzenia ważną rolę w tym tekście odgrywają *obrazki*. Dostarczają one nie tylko wrażeń estetycznych lecz również pokazują, że: **przedmiotem matematyki jest rzeczywistość, a sama matematyka jest uniwersalna: nie ma rzeczy, która byłaby jej obca** (to słowa Hugona Steinhausa zaczerpnięte z przedmowy do *Kalejdoskopu matematycznego*).

Spirale prezentowane w tej pracy są pretekstem do zwrócenia uwagi na jeszcze jedno zjawisko, które skrótowo określiłem jako reinkarnacja i klonowanie.

Przypomnijmy, *reinkarnacja* oznacza w niektórych religiach Wschodu wiarę w wielokrotne odradzanie się człowieka po śmierci przez wstępowanie jego duszy w ciało innej istoty (wędrowka dusz), natomiast *klonowanie* to rozmnażanie *in vitro* osobników o z góry ustalonym (czytaj: ulepszonym) składzie genetycznym otrzymanym dzięki inżynierii genetycznej przez rekombinację genów.

Istotną rzeczą w kulturotwórczym procesie tworzenia i przekazywania wiedzy (w tym matematyki) jest wskazywanie co stworzyli nasi poprzednicy i uzupełnianie, doskonalenie tego własnymi ideami. W przypadku matematyki wiąże się to nierozdzielnie z pojęciem *kultury matematycznej* jaki prezenują nadawcy i odbiorcy. Kultura matematyczna to oczywiście element *kultury* jako takiej, ale wyróżnia ją specyficzna umiejętność strukturalnego patrzenia na świat i dostrzegania matematyki tam, gdzie inni jej być może nie widzą.

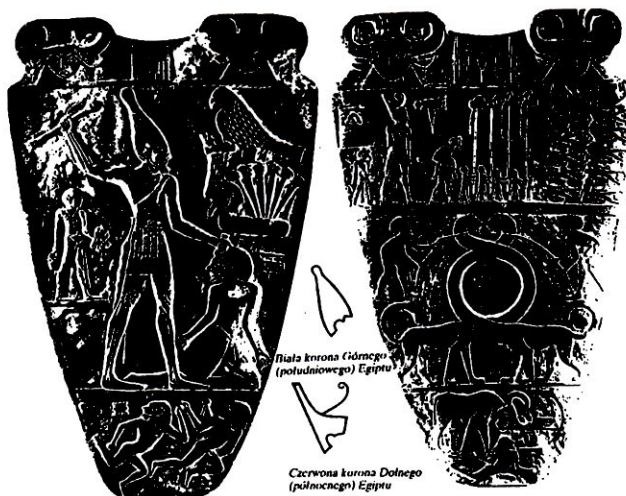
1. Spojrzenie na sztukę (starożytną)

Wyobraźmy sobie obracające się koło garncarskie (wynalezione w Mezopotamii w końcu IV tysiąclecia p.n.e.), po którym ktoś od środka do brzegu pociągnął pacykiem. Powstaje wtedy rysa (rys.1), którą nazywamy *spiralą*.



Rys. 1

Możemy domniemywać, że linie spiralne (jako dzieło rąk ludzkich) od pradziejów dostarczały ludziom przyjemnych wrażeń estetycznych. Takie motywy dekoracyjne, o charakterze być może mistycznym, pojawiały się w różnych kulturach. Oto kilka przykładów (rys. 2, 3, 4, 5, 6, 7).



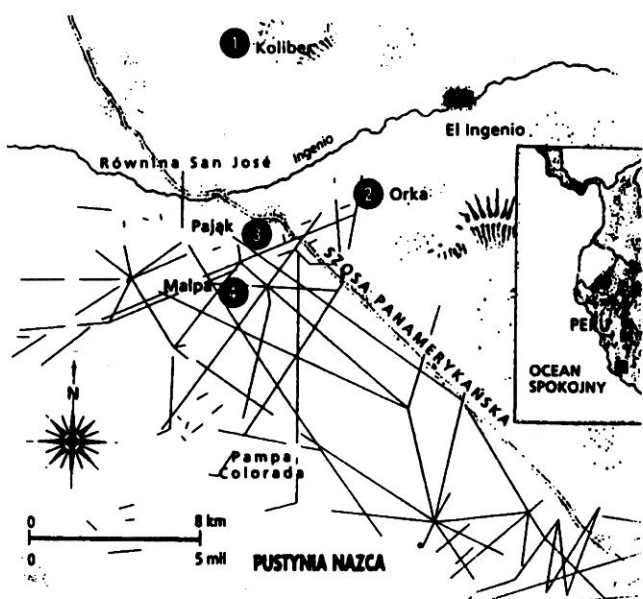
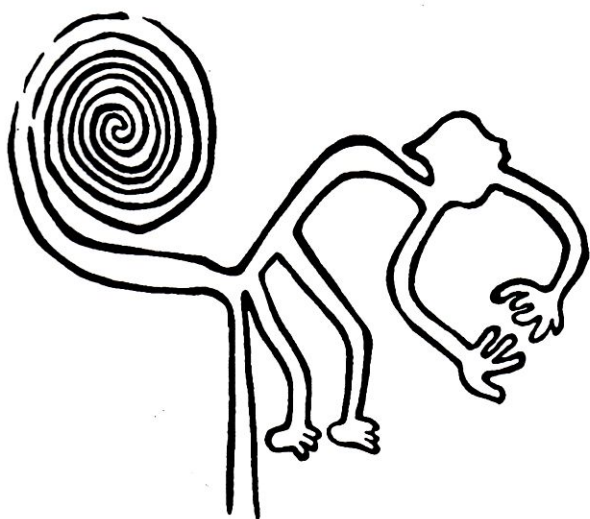
Rys. 2. Jest to jeden z pierwszych dokumentów w historii Egiptu tzw. *paleta Narmery* (legendarnego Mensema) upamiętniająca zjednoczenie Górnej i Dolnej Egiptu przez pierwszego dynastycznego władcę. Po jednej stronie nosi on Białą Koronę własnego kraju, a po drugiej ma już Czerwoną Koronę podbitego Dolnej Egiptu. Ok. 3100 r. p.n.e., wysokość 63,5 cm [Muzeum Egipskie, Kair].



Rys. 3. Gliniany dzbanek na wodę z Fajstos (Kreta) z okresu kultury minojskiej wykonany ok. 1800 r. p.n.e. [Muzeum Archeologiczne, Iraklion].



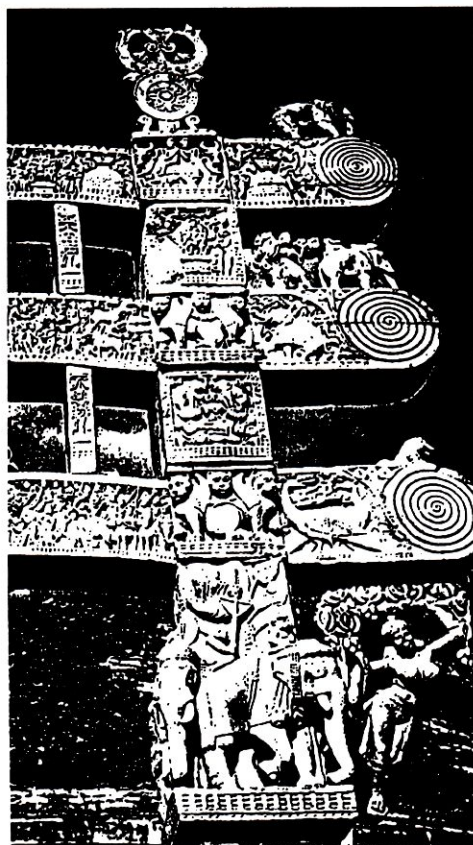
Rys. 4. Gliniany dysk z Fajstos (Kreta) o średnicy 16 cm pokryty jest ułożonymi spiralnie znakami obrazkowymi (hieroglifami), których nie udało się jeszcze odczytać. Wykonany ok. 1650-1600 r. p.n.e. [Muzeum Archeologiczne, Iraklion]. Czy nie tkwi w tym idea współczesnych płyt CD?



Rys. 5. *Malpa* z płaskowyżu Nazca (Peru) wykonana przez Indian między rokiem 500 p.n.e. a 500 n.e. Rysunek tworzy jedna linia ciągła. Ze względu na swoje rozmiary (kilkudziesięciu metrów) w całej okazałości jest on dostrzegalny z lotu ptaka. Rysunki z płaskowyżu Nazca opisał po raz pierwszy ok. 1920 r. archeolog Julio Tello. Ich przeznaczenie nie zostało jeszcze wyjaśnione.



Rys. 6. Naramiennik brązowy z okresu kultury lużyckiej, ok. 1400–1100 r. p.n.e.

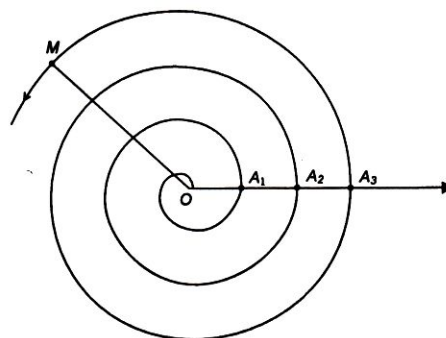


Rys. 7. Fragment wschodniej bramy pierwszej stupy [stupa, to masywna budowla (zabytek buddyjski) nie posiadająca wnętrza, w której relikwie zamykano w czasie wznoszenia] w Sañci (Indie) pochodzącej z II–I w. p.n.e.

2. Spirala Archimedesesa

Wydaje się, że do czasów Archimedesesa (278–212 r. p.n.e.) matematyczna struktura linii spiralnych nie wzbudzała większego zainteresowania. Dopiero w rozprawie *O linii spiralnej* Archimedes wykazał kilka własności spiral, których charakterystyczną cechą jest to, że **odległość pomiędzy zwojami jest wszędzie taka sama**. Nazywamy je dzisiaj *spiralami Archimedesesa*. Mechaniczne określenie takiej krzywej jest następujące:

jest to krzywa jaką zakreśla punkt płaszczyzny M poruszający się ze stałą prędkością wzdłuż półprostej o początku O , gdy ta półprosta jednocześnie obraca się wokół punktu O ze stałą prędkością kątową (rys. 8).



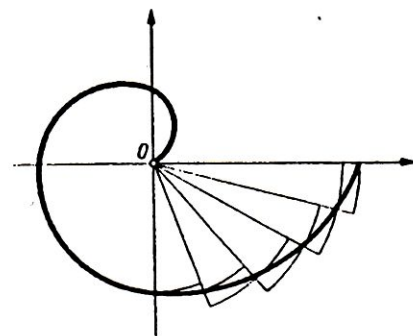
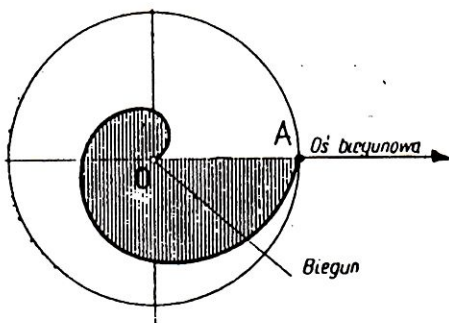
Rys. 8

We współrzędnych biegunowych spiralę Archimedesesa opisuje równanie $r = a \cdot \varphi$, gdzie $a > 0$ jest parametrem, r jest długością promienia wodzącego punktu M ($r = |OM|$), a φ jest miarą kąta, jaki zakreślił promień wodzący. W szczególności dla $\varphi = 2\pi$ otrzymujemy punkt A_1 , dla $\varphi = 4\pi$ punkt A_2 , itd. Punkty te leżą w równych (!) odstępach: $|A_i A_{i+1}| = 2\pi a$, $i = 1, 2, \dots$

We wspomnianej rozprawie Archimedes wykazał m.in., że:

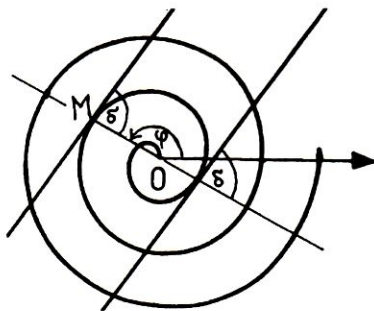
- Pole powierzchni ograniczonej pierwszym zwójem spirali $r = a \cdot \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) i osią biegunową jest równe $1/3$ pola koła o promieniu $|OA| = 2\pi a$ (rys. 9).

Wzorowo zastosował w tym przypadku metodę wyczerpywania, patrz [2, str. 130].



Rys. 9

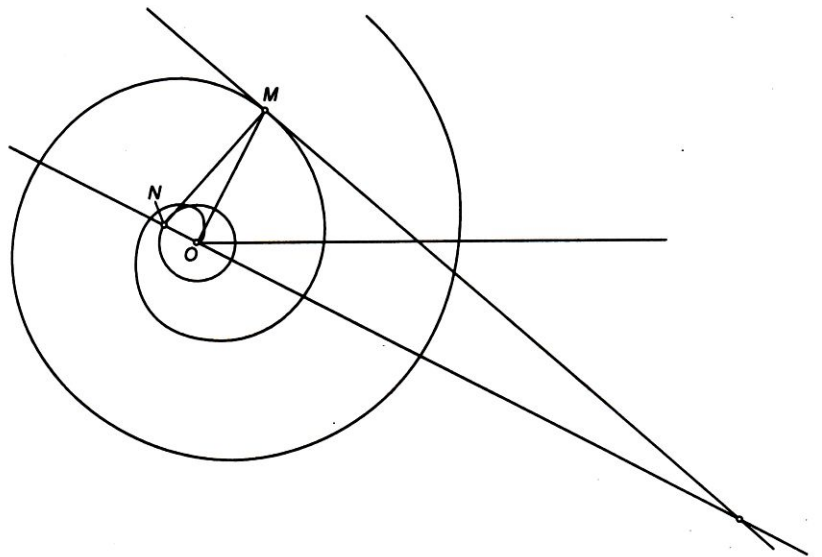
- Styczna poprowadzona do spirali $r = a \cdot \varphi$ w punkcie M (rys. 10) tworzy z promieniem wodzącym OM kąt δ spełniający warunek $\operatorname{tg} \delta = \varphi$.



Rys. 10

W rzeczywistości Archimedes wykazał ogólniejszą zależność, którą we współczesnej terminologii możemy zapisać jako: $\operatorname{tg} \delta = r/r'$, patrz [2, str. 136; 4, str. 10].

Uwaga. Możliwe jest konstrukcyjne wyznaczenie stycznej w punkcie M należącym do spirali Archimedesesa $r = a \cdot \varphi$. Prowadzimy prostopadłą do promienia wodzącego OM przechodzącą przez punkt O . Przecina ona okrąg o środku w punkcie O i promieniu a w punkcie N (rys. 11). Prosta prostopadła do odcinka NM przechodząca przez punkt M jest poszukiwaną styczną (dlaczego?).



Rys. 11

Archimedes zauważył, że dzięki drugiej z wymienionych własności, spiralę $r = a \cdot \varphi$ można wykorzystać do rozwiązania trzech słynnych problemów

Rozwiązanie problemu rektyfikacji okręgu

Zadanie rektyfikacji (= wyprostowania) okręgu polega na wyznaczeniu odcinka, którego długość jest równa długości danego okręgu. W punkcie O (rys. 12) wystawiamy prostopadłą do osi biegunowej, następnie w punkcie A kończącym pierwszy zwój spirali Archimedesesa rysujemy styczną. Proste te przecinają się w takim punkcie C , że długość odcinka OC jest równa długości okręgu o promieniu $|OA|$. Mamy bowiem:

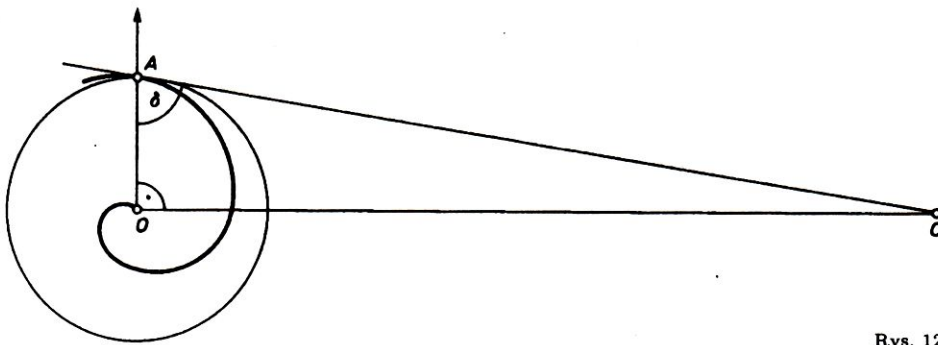
$$\frac{|OC|}{|OA|} = \operatorname{tg} \delta$$

i

$$\operatorname{tg} \delta = 2\pi,$$

a stąd

$$|OC| = 2\pi \cdot |OA|.$$



Rys. 12

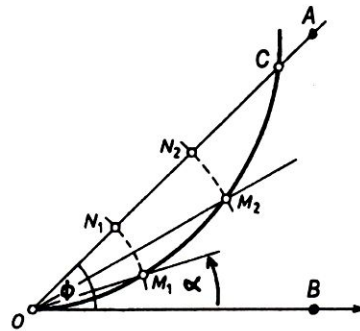
Rozwiązanie problemu kwadratury koła

Problem kwadratury koła polega na wyznaczeniu kwadratu o polu równym polu danego koła. W wyniku poprzedniej konstrukcji trójkąt AOC ma pole równe polu koła o promieniu $|OA|$:

$$P_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot |OC| \cdot |OA| = \pi \cdot |OA|^2.$$

Wykreślenie teraz kwadratu o polu równym $\pi \cdot |OA|^2$ nie sprawia trudności (rys. 13). Na przedłużeniu odcinka OC odkładamy taki odcinek OA' , że $|OA'| = |OA|$. Odcinek $A'C$ dzielimy na połowę punktem O' i z niego promieniem $\frac{1}{2} \cdot |A'C|$ zakreślamy półokrąg. Przecina on przedłużenie odcinka OA w punkcie B . Wówczas $|OB| = \sqrt{|OA'| \cdot |OC|}$. Na odcinku OB jako na przekątnej budujemy kwadrat. Jego pole jest równe:

$$\left(\frac{|OB|}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot |OB|^2 = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OC| = \pi \cdot |OA|^2.$$

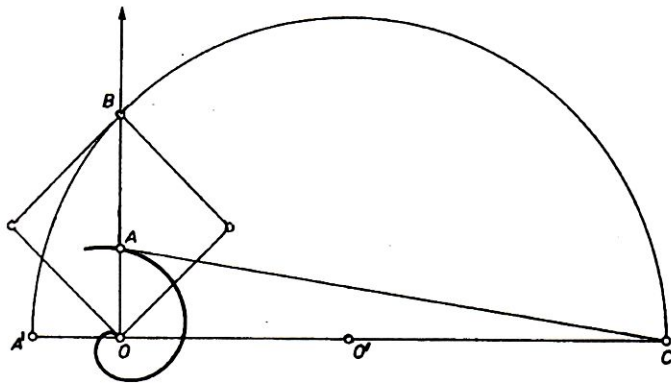


Rys. 14

Klasyczne problemy starożytnych Greków, to wykonanie powyższych zadań, ale jedynie za pomocą cyrki i linijki. Dopiero w XIX w. udowodniono, że żadnego z tych zadań w ogólnym przypadku nie można wykonać środkami klasycznymi. Mówią o tym wyniki P.-L. Wantzela (1814–1848(?)) z 1837 r., oraz F. Lindemanna (1852–1939) z 1882 r.

Zatem *spiralą Archimedesesa jest krzywą, której nie można wykreślić cyrklem i linijką!*

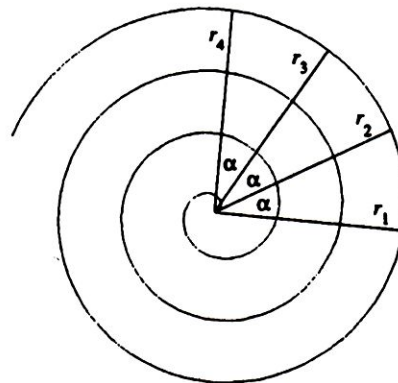
Zwróćmy jeszcze uwagę na związek jaki zachodzi pomiędzy spiralą Archimedesesa, a szeregiem arytmetycznym. Wybierzemy dowolny kąt, powiedzmy $\alpha > 0$. Z punktu na spirali zaznaczymy kolejne punkty otrzymane w wyniku zakreślenia promieniem wodzącym wielokrotności kąta α . Długości promieni wodzących r_1, r_2, r_3, \dots tak wyznaczonych punktów tworzą ciąg arytmetyczny (rys. 15). Jeżeli $r_1 = a \cdot \varphi_1$, to $r_2 = a \cdot (\varphi_1 + \alpha)$, $r_3 = a \cdot (\varphi_1 + 2\alpha)$. Zatem $r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$, czyli każdy promień jest średnią arytmetyczną promieni z nim sąsiadujących.



Rys. 13

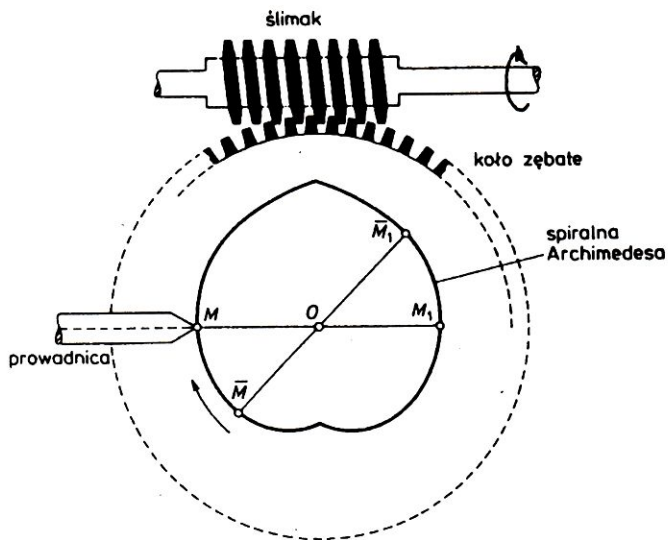
Rozwiązanie problemu trysekcji kąta

Zadanie polega na podzieleniu danego kąta na trzy równe części. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że dany mamy kąt AOB : $|\angle AOB| = \phi$. Z punktu O zaczynamy rysować spiralę Archimedesesa (jedno ramię kąta traktujemy jako oś biegunową). Przetnie ona drugie ramię w punkcie C (rys. 14). Dzielimy odcinek $|OC| = a \cdot \phi$ na trzy równe części takimi punktami N_1, N_2 , że $|ON_1| = |N_1N_2| = |N_2C|$. Następnie promieniami $|ON_1|, |ON_2|$ zakreślamy łuki, które przecinają spiralę w punktach M_1, M_2 , odpowiednio. Wówczas proste OM_1, OM_2 dzielą kąt ϕ na trzy równe części: $a \cdot \alpha = |OM_1| = |ON_1| = \frac{1}{3}|OC| = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \phi$.



Rys. 15

Spirala Archimedesesa znalazła zastosowanie w technice do zmiany jednostajnego ruchu obrotowego na zwrotny jednostajny ruch postępowy (rys. 16).

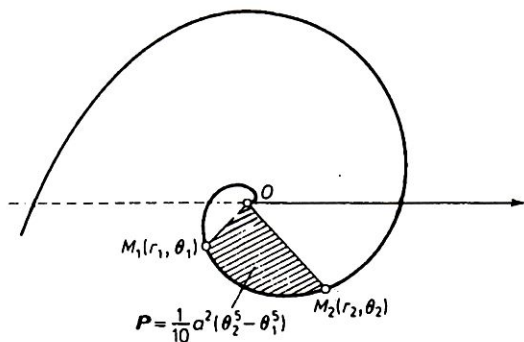


Rys. 16. Profil krzywki, o którą opiera się dociskana prowadnica są dwa luki spirali Archimedesesa. Przeciwległe punkty na profilu krzywki mają stałą odległość.

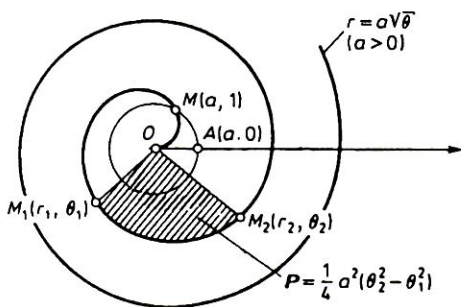
W okresie Odrodzenia dzięki pracom Galileo Galilei (Galileusza) (1564–1642), P. de Fermata (1601–1665), R. Descartesa (Kartezjusza) (1595–1650) nastąpiło ponowne zainteresowanie liniami spiralnymi. Z powodzeniem badano wówczas:

spiralę Galileusza o równaniu biegunowym $r = a \cdot \theta^2$ (rys. 17);

spiralę Fermata (zwaną też paraboliczną) o równaniu biegunowym $r = a \cdot \sqrt{\theta}$ (rys. 18).



Rys. 17



Rys. 18

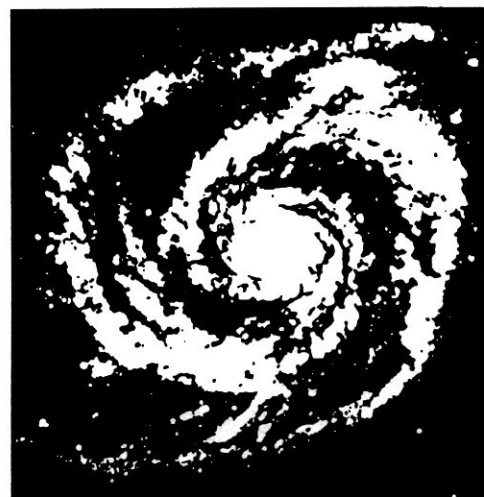
Spirala Fermata charakteryzuje się tym, że dla rosnących wartości θ odległości pomiędzy kolejnymi zwojami spirali maleją do 0.

3. Podglądanie przyrody

Innego rodzaju spirale można zaobserwować w przyrodzie, i to w tej dynamicznie się zmieniającej jak i w skamieniałościach. Na przykład, kształty spiralne przyjmują układy chmur widziane na zdjęciach satelitarnych (rys. 19), czy też wielkie gromady gwiazd i materii międzygwiazdowej zwane galaktykami (rys. 20).

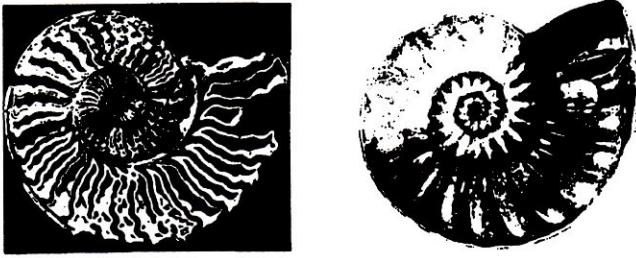


Rys. 19

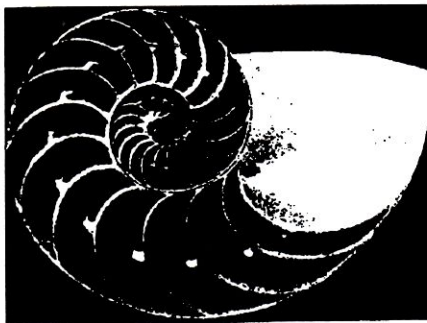


Rys. 20. Galaktyka spiralna M51 w gwiazdozbiore Psy Gończe (niebo północne).

W skamieniałości amonitów (rys. 21), czy też dzisiejszych łodzików (*Nautilus*) (rys. 22) uderzające jest jak dokładnie szerokości kolejnych zwojów podlegają prawu postępu geometrycznego.

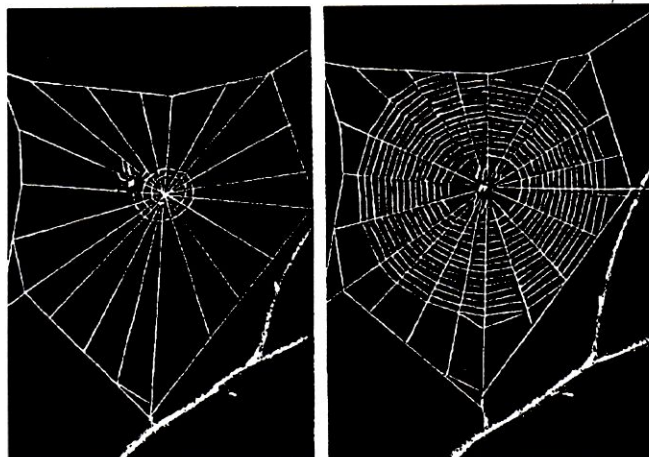


Rys. 21. Amonity (*Ammonidea*) to wymarłe głowonogi drapieżne żyjące od 400 do 66 mln lat temu. Muszle (szkielet zewnętrzny) o wymiarach od 1 cm. do 3 m. stanowiły osłonę przed drapieżnikami oraz podporę dla miękkiego ciała. Pełniły również funkcję hydrostatyczną dając możliwość balansowania na różnych głębokościach.



Rys. 22. Skorupa głowonoga łodzika (*Nautilus*) o średnicy ok. 25 cm. Zamieszkuje on Ocean Spokojny od Płw. Malajskiego do Fidzi na głębokości 200–600 m. Jest jedynym żyjącym od triasu przedstawicielem głowonogów czteroskrzelnych.

Kolejnych przykładów możemy szukać wśród zachowań różnych zwierząt. Pająk krzyżak (*Araneus diadematus*) buduje swoją sieć w ten sposób (rys. 23), że współśrodkowe lepkie nici prowadzi (idąc od środka) prostopadłe do „szprychy”, na której zaczepia nić, aż dojdzie do następnej, itd.



Rys. 23

Niektóre owady poruszają się stosując zasadę stałego kąta pomiędzy ich ruchem, a promieniami światła. W ten sposób porusza się np. ćma (motyl nocny) wokół żarówki zapalanej w ciemnym pokoju. Nie chcąc stracić orientacji w przestrzeni stara się zachować stały kąt z kierunkiem światła. Ponieważ w tym przypadku

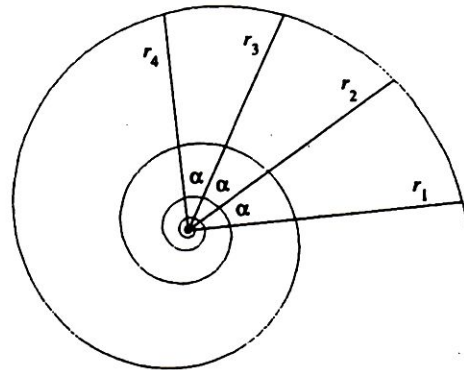
promienie światła nie są równoległe (rozchodzą się promieniście), więc ćma porusza się po torach spiralnych.

Przy odrobinie chęci linie spiralne można również dostrzec patrząc na wypełniony nasionami kwiat dojrzalego słonecznika olbrzymiego (*Helianthus maximus*).

4. Spirala logarytmiczna

Jeżeli średnią arytmetyczną $r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$ (rys. 15) zastąpimy średnią geometryczną $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$, to otrzymamy inną spiralę, tzw. *spiralę logarytmiczną*. Po zlogarytmowaniu stronami ostatniego wzoru mamy: $\ln r_2 = \frac{1}{2}(\ln r_1 + \ln r_3)$, co oznacza, że w tym przypadku logarytmy kolejnych promieni tworzą ciąg arytmetyczny. Stąd we współrzędnych biegunowych dostajemy wzór na spiralę logarytmiczną (rys. 24):

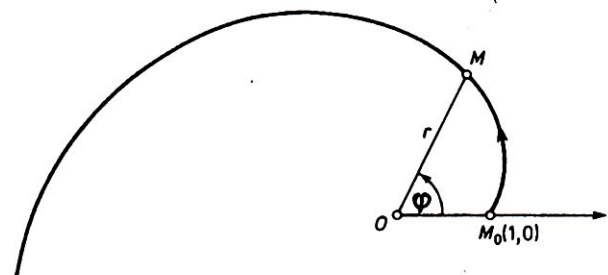
$$\ln r = a \cdot \varphi \text{ lub } r = e^{a \cdot \varphi}.$$



Rys. 24. Posuwając się wzdłuż spirali logarytmicznej krokami o stałym kącie środkowym dostajemy ciąg geometryczny promieni wodzących: r_1, r_2, \dots

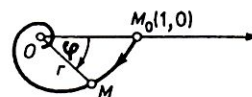
Dla tej spirali, jeśli:

- $a > 0$ i φ rośnie bez ograniczeń, to spirala „rozwija się” do nieskończoności (rys. 25);



Rys. 25

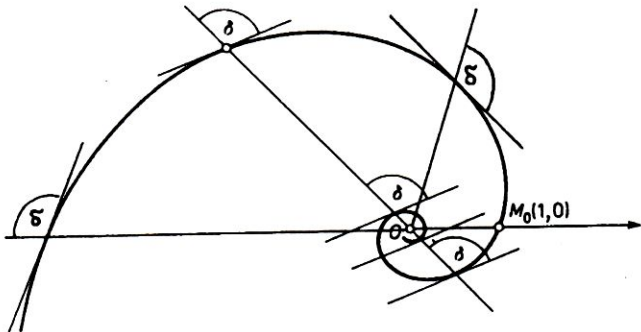
- $a = 0$, to otrzymujemy okrąg o promieniu $r = 1$;
- $a < 0$, to otrzymujemy spiralę, która „zwija się” asymptotycznie do środka układu współrzędnych w miarę jak φ dąży do nieskończoności (rys. 26).



Rys. 26

Spirale logarytmiczne nie mają ani początku ani końca.

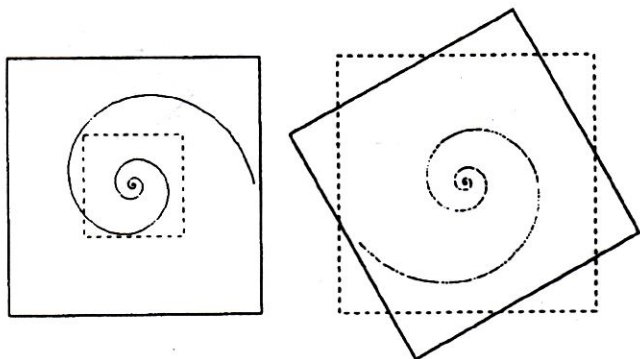
Odkryjemy teraz jedną z własności spirali logarytmicznej $r = e^{a \cdot \varphi}$. Z rozważań Archimedesesa wiemy już, że styczna w punkcie M (należącym do spirali) tworzy z promieniem wodzącym OM kąt δ spełniający warunek: $\operatorname{tg} \delta = r/r'$. W naszym przypadku, $\operatorname{tg} \delta = 1/a$ o ile $a \neq 0$. Oznacza to, że spirala ta (również okrąg jaki otrzymujemy, gdy $a = 0$) ma następującą własność: **kąt δ między styczną do spirali logarytmicznej, a jej promieniem wodzącym, jest stały niezależnie od położenia na spirali punktu styczności** (rys. 27). Przypominając sobie co zaobserwowaliśmy w przyrodzie, widzimy że przyroda od milionów lat wykorzystuje spirale logarytmiczne! Ciekawe dlaczego (w czym) są one lepsze od innych?



Rys. 27

Problem. Czy można konstrukcyjnie wyznaczyć styczną do spirali logarytmicznej (gdy $a \neq 0$) w danym jej punkcie?

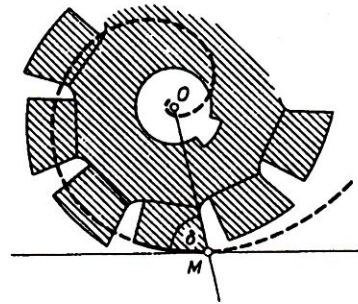
Badanie spirali logarytmicznych zapoczątkował wspomniany już R. Descartes. Omawia on ich własności w listach z 1638 r. do franciszkanina M. Mersenna'a (1588–1648). Jacob Bernoulli (1654–1705) tak był zafascynowany tą krzywą, że poświęcił jej traktat *Spira mirabilis* (Cudowna spirala). Wielkie wrażenie wywarło na nim jej samopodobieństwo – jednokładne przekształcanie spirali logarytmicznej względem jej środka daje ten sam efekt, co jej obrót o pewien kąt (rys. 28).



Rys. 28. Powiększenie spirali logarytmicznej wygląda na jej obrócenie.

Również ewoluta, krzywa spodkowa spirali logarytmicznej jest spiralą logarytmiczną. Zauroczony tą krzywą, Jacob Bernoulli życzył sobie by wyryć jej kształt na jego nagrobku wraz z inskrypcją *Eadem mutata resurgo* (taka sama niezależnie od zmian). I rzeczywiście na jego nagrobku w Katedrze w Bazylei jest spirala, ale Archimedesesa (!), ot taki żart potomnych.

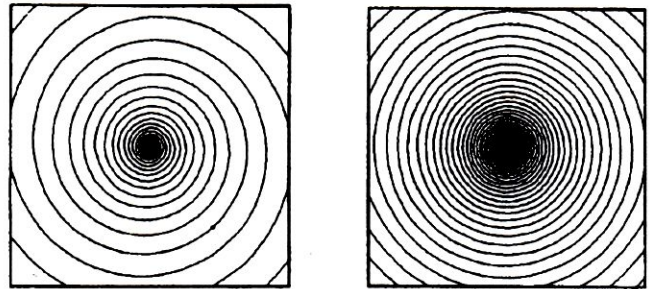
Podobnie jak spirala Archimedesesa, tak i spirala logarytmiczna znajduje zastosowanie techniczne – łuk spirali logarytmicznej jest grzbietem zębów noża frezierskiego (rys. 29), dzięki czemu uzyskuje się stały kąt skrawania.



Rys. 29

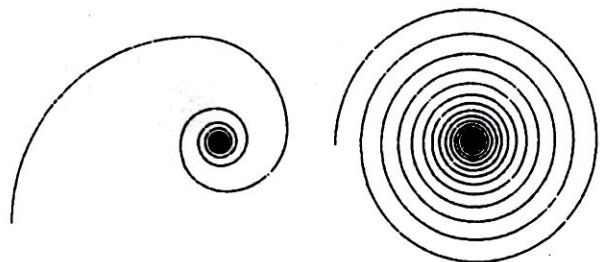
5. Długość spirali

Pewne własności linii spiralnych zdają się wymykać naszej obserwacji – na którym obrazku (rys. 30) widać jedną, a na którym dwie spirale?



Rys. 30

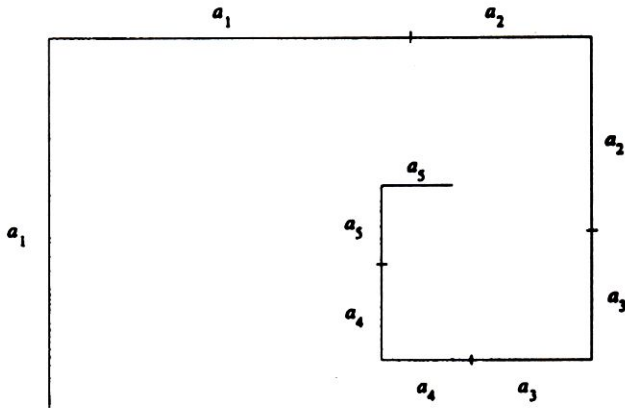
Zadziwiające jest jak niewiele nasza intuicja może nam pomóc w „zobaczeniu”, która ze spiral (rys. 31) ma długość skończoną, a która nieskończoną?



Rys. 31

Przypatrzmy się dwum spiralom wielokątnym otrzymanym według przepisu:

Wybieramy malejący ciąg liczb dodatnich $a_1 > a_2 > \dots$. Rysujemy pionowo odcinek o długości a_1 . W jego górnym końcu (skręcając w prawo) prostopadłe dorysowujemy ponownie odcinek a_1 , który przedłużamy o odcinek a_2 . Następnie, po wykonaniu zakrętu w prawo, znów prostopadłe dorysowujemy odcinek a_2 , itd. (rys. 32).



Rys. 32

Długość takiej spirali jest równa: $2(a_1 + a_2 + \dots)$. Jeżeli wybierzemy $a_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, to otrzymamy spiralę o nieskończonej długości, która mieści się na ograniczonym obszarze! Gdyby

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = L < +\infty,$$

to

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) = \frac{1}{2}L$$

i

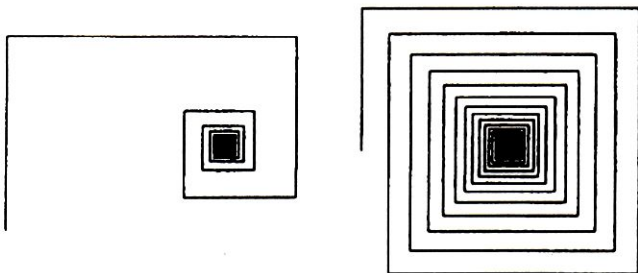
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = L - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2}L,$$

ale $1 > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, ..., więc

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots,$$

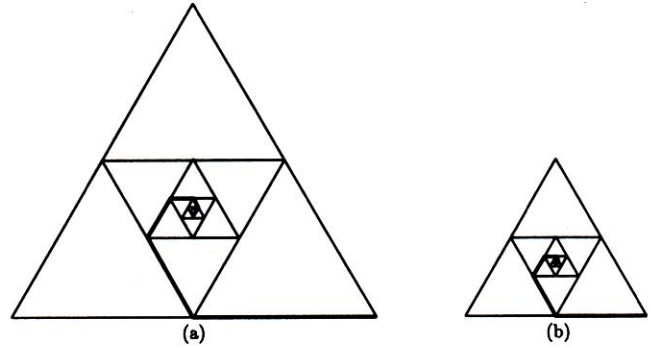
sprzeczność.

Natomiast wybór $a_k = q^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, gdzie np. $q = 0,95$, prowadzi do spirali wielokątnej o długości $2 \cdot \frac{1}{1-0,95} = 40$ (rys. 33).



Rys. 33. Po lewej stronie spirala o nieskończonej długości, po prawej zaś stronie spirala ma długość skończoną.

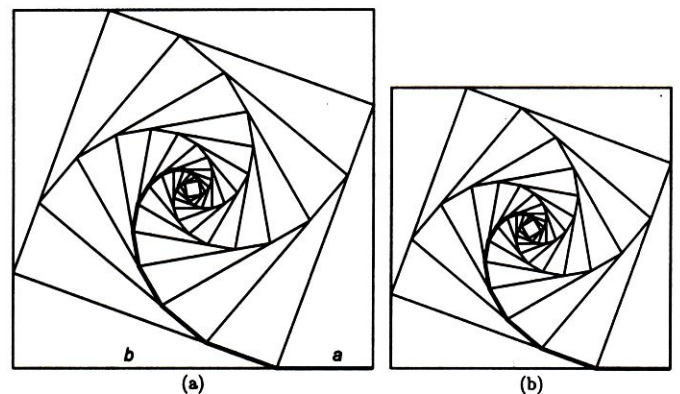
Mówiąc o spiralach wielokątnych możemy wskazać i inne sposoby ich tworzenia. Weźmy na przykład trójkąt równoboczny o bokach długości 1 (rys. 34). W ten trójkąt (jak na rysunku) wpisujemy mniejszy trójkąt równoboczny, itd. Łącząc ze sobą odpowiednie odcinki (połowy długości boków wpisanych trójkątów) wykreślamy spiralę, której długość wynosi 1.



Rys. 34

Długość tej spirali można oczywiście obliczyć wykorzystując wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, ale można też dostrzec podobieństwo spiral z rys. 34(a) i (b), część (b) otrzymaliśmy z części (a) przez usunięcie zewnętrznego trójkąta. Jeżeli spirala z części (a) ma długość S , natomiast spirala z części (b) ma długość s , to zależność między tymi wielkościami jest następująca: $s = \frac{1}{2}S$ (proporcje długości odpowiednich odcinków pomiędzy tymi trójkątami wynoszą $\frac{1}{2}$). Z drugiej strony: $S = \frac{1}{2} + s$, skąd $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}S$ i $S = 1$.

W następnym przykładzie podzielmy każdy bok jednostkowego kwadratu w stosunku $a : b$ ($a + b = 1$, $a > 0$, $b > 0$) poruszając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Punkty podziału kolejno łączymy otrzymując kwadrat o boku $h = \sqrt{a^2 + b^2}$, z którym powtarzamy opisaną procedurę, itd. (rys. 35).



Rys. 35

Łącząc teraz odpowiednie odcinki otrzymujemy spiralę o długości S w przypadku (a). Spiralę na rysunku (b), o długości s , otrzymaliśmy przez usunięcie zewnętrznego kwadratu, więc dzięki proporcjonalności tych figur mamy:

$$s = h \cdot S = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot S.$$

Z drugiej strony:

$$S = s + a,$$

skąd

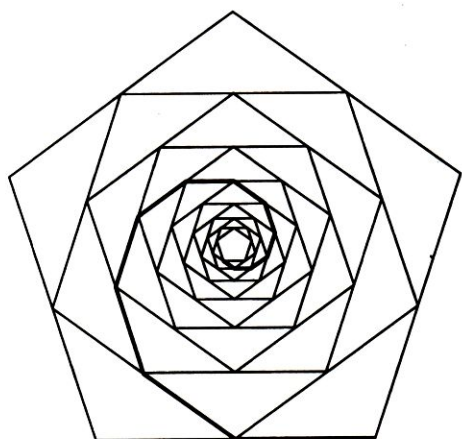
$$S = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot S + a.$$

Zatem

$$S = \frac{a}{1 - \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a(1 + \sqrt{a^2 + b^2})}{1 - a^2 - b^2} = \frac{a(1 + \sqrt{a^2 + b^2})}{2ab} = \frac{1 + \sqrt{2b^2 - 2b + 1}}{2b},$$

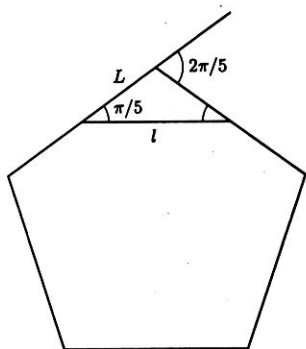
bo $1 - a^2 - b^2 = 2ab$ oraz $a = 1 - b$. Gdy $b \rightarrow 1(-)$, otrzymujemy gładką spiralę o długości 1.

Analogicznie możemy tworzyć spirale oparte na regularnych n -kątach (rys. 36, $n = 5$).



Rys. 36

Jeżeli przyjmiemy, że długość boku wyjściowego n -kąta wynosi L , to długość pierwszego odcinka spirali wynosi $\frac{1}{2}L$. Kolejny wpisany n -kąt ma bok długości $l = L \cdot \cos(\frac{\pi}{n})$ (rys. 37).



Rys. 37

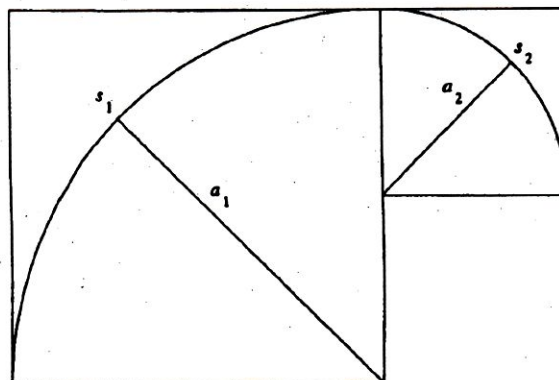
Ponieważ stosunek długości boków wpisanego n -kąta i n -kąta wyjściowego wynosi $\cos(\frac{\pi}{n})$, więc długość całej spirali wynosi

$$S = \frac{L}{1 - \cos(\frac{\pi}{n})}.$$

Problem. Jaka jest długość spirali otrzymanej w analogiczny sposób, jeśli każdy bok n -kąta jest podzielony w ustalonej proporcji tak, jak było to w przypadku kwadratu (rys. 35)?

Zamiast spirali wielokątnych możemy również tworzyć spirale gładkie wykorzystując opisane już wcześniej konstrukcje. Zauważmy, że spirala wielokątna (rys. 32) była budowana z kątów prostych o ramionach jednakowej długości a_k . Każdy z nich obejmuje czwartą część okręgu o promieniu a_k . Odpowiednie połączenie tych łuków (rys. 38) daje gładką spiralę, której długość wynosi

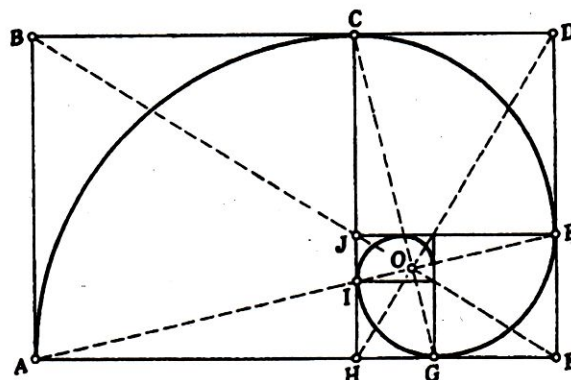
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot 2\pi a_k = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$



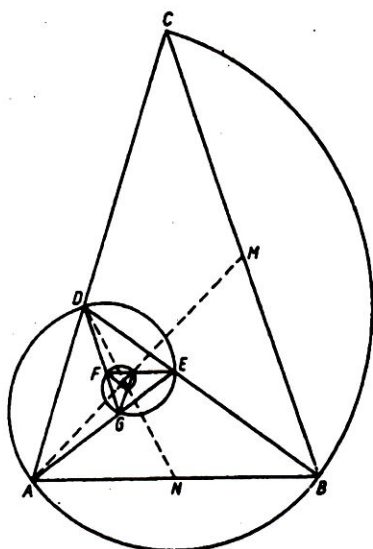
Rys. 38

Ma więc ona skończoną długość dla $a_k = q^{k-1}$, $0 < q < 1$ oraz nieskończoną dla $a_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Wracając do rys. 31, spirala po lewej stronie ma długość nieskończoną, natomiast spirala po prawej stronie ma długość skończoną.

Mówiąc o spiralach gładkich zwróćmy uwagę na dwie szczególne spirale utworzone w *złotym prostokącie* (stosunek długości boku dłuższego do krótszego jest równy $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$) (rys. 39) lub w *złotym trójkącie* (to trójkąt równoramienny, w którym stosunek długości ramienia do podstawy wynosi φ ; inaczej: kąty przy podstawie mają po 72° , a kąt przy wierzchołku 36°) (rys. 40).



Rys. 39. Jeśli przeprowadzimy tę konstrukcję zgodnie z ideą wskazaną na rys. 32, gdy $a_k = \frac{1}{\varphi^{k-1}}$, $k = 1, 2, \dots$, to długość tak otrzymanej złotej spirali wyniesie $(3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{\pi}{4}$.



Rys. 40. Czy jest to spirala podobna do spirali z rysunku 39? Jaka jest jej długość?

Spirale te mają szczególny walor estetyczny, oparte są bowiem na *złotej proporcji*. Kanon ten najpierw świadomie stosowali starożytni Grecy w architekturze (Iktinos, Kallikrates przy wznoszeniu Partenonu w Atenach), rzeźbie (Fidiasz), a następnie artyści Renesansu (Leonardo da Vinci, Michał Anioł Buonarroti).

6. Sztuka w matematyce

Pojawienie się komputerów (H. H. Aiken (1900–1973), II.1944 r.), a wraz z nimi nowej jakości ludzkiego działania otworzyło przed matematyką niespotykane dotychczas możliwości – wykonywanie *matematycznych eksperymentów*. Uzyskane w ten sposób fakty nie pozostają bez wpływu na naszą matematyczną wrażliwość.

Na przykład za pomocą komputerów sprawdzono, że dla liczb naturalnych $x_0 \leq 2^{50}$, po skończonej ilości kroków procedura L. Collataz:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \text{ o ile } x_n \text{ jest parzyste}$$

albo

$$x_{n+1} = 3x_n + 1 \text{ o ile } x_n \text{ jest nieparzyste,}$$

gdy $n = 0, 1, 2, \dots$ doprowadza nas do 1. Czy tak jest dla wszystkich liczb naturalnych? Dotychczas tego nie wiadomo, choć eksperyment matematyczny zdaje się to potwierdzać.

Rodzi to naturalne wątpliwości: jak bardzo jesteśmy skłonni wierzyć eksperymentom matematycznym (obliczeniom komputerowym) skoro przerastają one nasze możliwości sprawdzenia ich? Zostawmy te wątpliwości na boku i przenieśmy się na chwilę w świat matematyki eksperymentalnej.

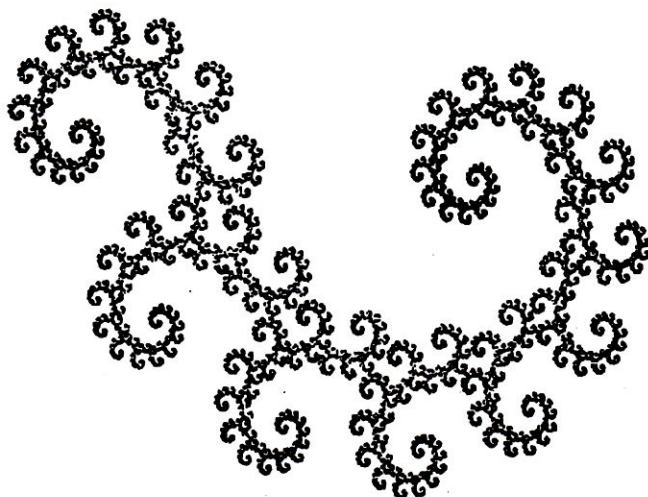
Rozważmy na płaszczyźnie XOY dwa przekształcenia afiniczne:

$$(x; y) \xrightarrow{S} (-0,4x - 1; -0,4y + 0,1)$$

i

$$(x; y) \xrightarrow{T} (-0,76x - 0,4y; 0,4x + 0,76y).$$

Wybieramy dowolny punkt płaszczyzny (x_0, y_0) i tworzymy zbiór $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots\}$, gdzie każdy następny punkt otrzymujemy działając na punkt poprzedni losowo wybranym odwzorowaniem ze zbioru $\{S, T\}$. Czy wystarcza nam wyobraźni, aby „zobaczyć” co otrzymamy? Czy można gdzieś tu dostrzec linie spiralne? Niezastąpiony wydaje się w tej sytuacji eksperyment matematyczny (rys. 41).



Rys. 41. Rysunek zawiera ok. 65000 wyrazów tak utworzonego ciągu, z pominięciem pewnej liczby wyrazów początkowych.

Sprawą matematyki pozostaje wyjaśnić:

- dlaczego tak się dzieje?
- wokół jakiego zbioru (o jakich własnościach) koncentrują się generowane w powyższy sposób punkty?

Jednym z najpopularniejszych obiektów współczesnej matematyki jest tzw. *zbiór Mandelbrota* (M).

Pojawił się on w 1979 r. w wyniku eksperymentu matematycznego jaki przeprowadził B. B. Mandelbrot (ur. 1924 r.). Określenie tego zbioru jest trochę zawile.

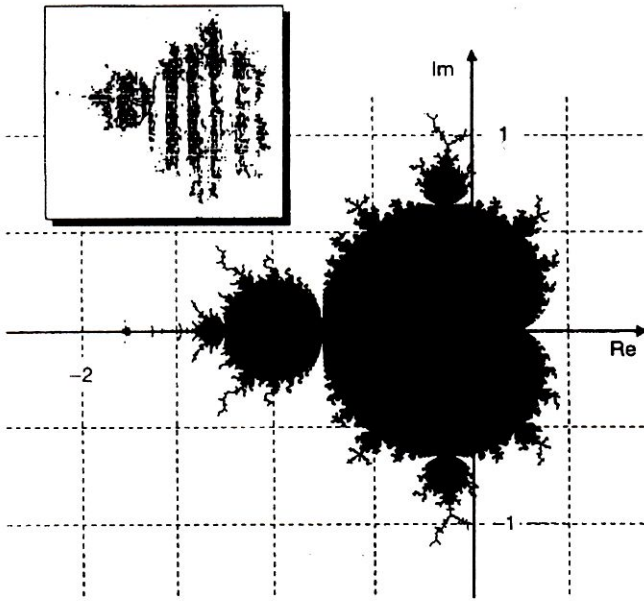
Rozważmy na płaszczyźnie zespolonej ciąg $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$, którego początkowy wyraz jest zerem, a następnie wyrazy określamy rekurencyjnie:

$$(*) \quad z_{n+1} = f_c(z_n) = (z_n)^2 + c.$$

gdzie c jest parametrem zespolonym. W zależności od parametru c ciąg $\{z_n\}$ może uciekać do nieskończoności lub być ograniczony. Te wartości parametru c (zaznaczamy je na czarno), dla których ciąg $\{z_n\}$ jest ograniczony, tworzą na płaszczyźnie zespolonej zbiór Mandelbrota (rys. 42).

Niebanalnym problemem jest tutaj pytanie: jak numerycznie rozstrzygnąć, czy *orbita* punktu c jest ograniczona, czy nie?

Idea zawarta we wskazanej wyżej procedurze jest znacznie wcześniejsza. W roku 1918 – mając 25 lat – Gaston Julia [czytaj: żulja] (1893–1978) i niezależnie w 1919 r., paryski astronom Pierre Fatou (1879–1929),



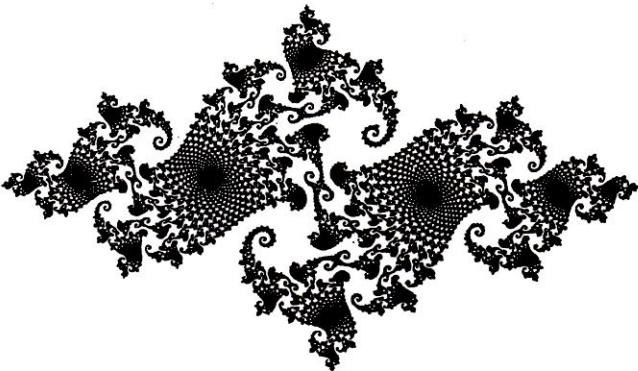
Rys. 42. Wstawka pokazuje wydruk eksperymentu Mandelbrota z 1979 r. Poniżej zbiór M utworzony za pomocą bardzo precyzyjnego algorytmu.

opublikowali swoje prace poświęcone badaniu iteracji. Wyniki te zapoczątkowały ogólną teorię iteracji funkcji wymiernych w dziedzinie zespolonej. Proste postępowanie prowadzi tam do bardzo skomplikowanych zbiorów.

Na przykład, korzystając z zależności (*) dla ustalonej wartości zespolonej c tworzymy ciąg liczb zespolonych: $z \rightarrow z^2 + c \rightarrow (z^2 + c)^2 + c \rightarrow ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$

Za pomocą tego ciągu dzielimy płaszczyznę zespoloną na dwa zbiory: tych z , dla których powyższy ciąg jest ograniczony (zbiór *więźniów*) i jego dopełnienie (zbiór *uciekierów*). Wspólny brzeg tych zbiorów nazywamy *zbiorem Julii* (J_c) dla rozważanego odwzorowania.

Julia i Fatou (polegając jedynie na swojej wyobraźni – w owych czasach nie istniały komputery(!)) stwierdzili, że opisywane w ten sposób kształty mogą być niewiarygodnie skomplikowane (rys. 43).



Rys. 43. Jeden z możliwych zbiorów Julii.

Prawdopodobnie ze względu na stopień skomplikowania omawianych obiektów i brak wiary, że konstrukcje te mogą być do czegoś przydatne, wspomniane prace Julii i Fatou zostały niemal zapomniane. Przywrócił je do życia i tchnął w nie nowe idee pod koniec lat siedemdziesiątych Mandelbrot. Za pomocą grafiki komputerowej *pokazał*, że prace Julii i Fatou są nie tylko źródłem fantastycznych obrazów o niekończącej się różnorodności, ale zawierają matematykę nadającą się do opisu rzeczywistości i znajdującą zdumiewające zastosowania [5, 6].

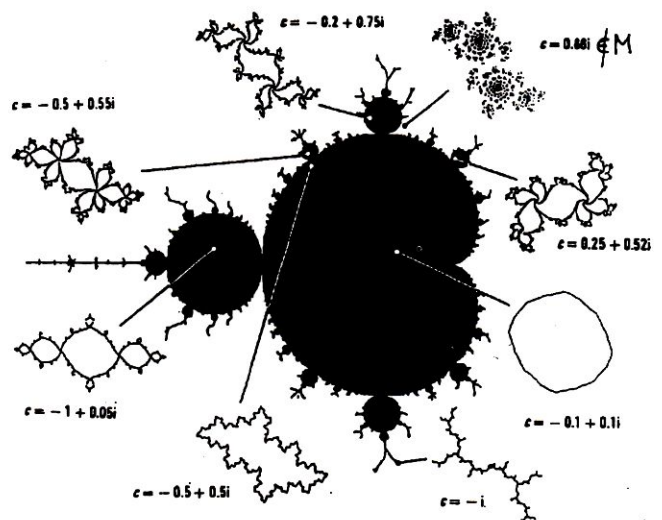
Aby spróbować zrozumieć jak skomplikowaną strukturą jest zbiór M wskażemy jego związek ze zbiorami Julii, które mają następujące własności:

- są spójne (= składają się z jednego kawałka), bądź są totalnie niespójne;
- nie zawierają punktów odosobnionych;
- jeśli nie są domkniętą płaszczyzną zespoloną, to są zbiorami brzegowymi (mają puste wnętrze);
- globalna struktura zbioru Julii zawiera się już w dowolnie małej jego części (działając skończoną liczbę razy przekształceniem $z \rightarrow z^2 + c$ na jakąkolwiek część zbioru J_c otrzymamy cały zbiór J_c).

Kształt zbioru Julii J_c odpowiadający odwzorowaniu $z \rightarrow f_c(z) = z^2 + c$ zależy od parametru c . Jedno z twierdzeń Julii-Fatou mówi: *zbiór J_c jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty$* . Wobec tego zbiór M tworzą na płaszczyźnie zespolonej te wartości parametrów c , dla których J_c jest spójny:

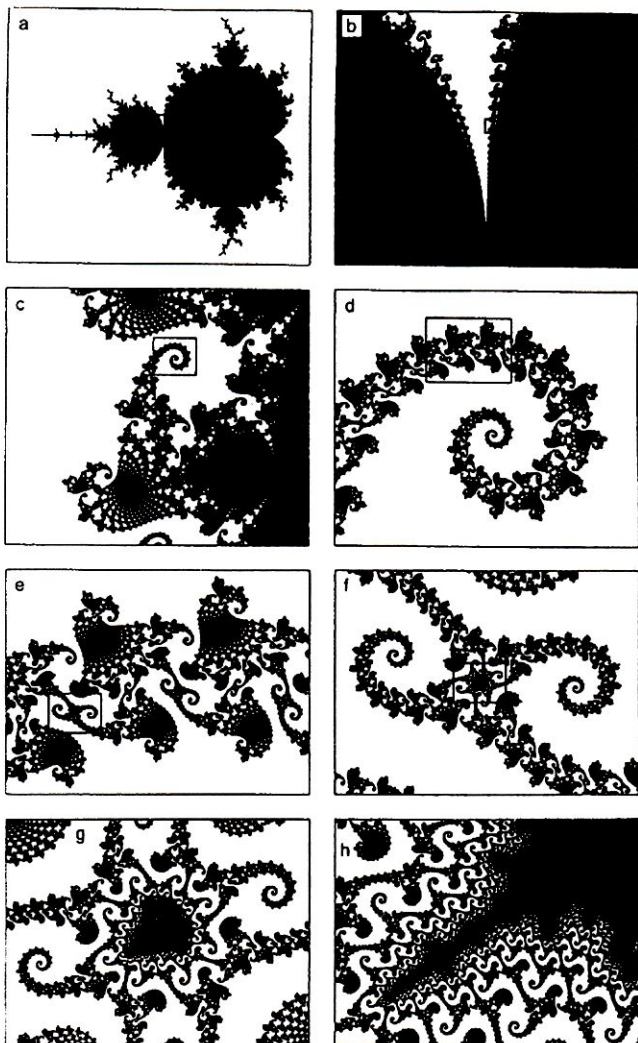
$$M = \{c \in C : J_c \text{ jest spójny}\} = \\ = \{c \in C : \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty\}.$$

Zbiór Mandelbrota może więc być traktowany jako bardzo szczegółowy atlas pokazujący drogi do wszystkich możliwych zbiorów Julii (rys. 44).



Rys. 44. Zbiory Julii odpowiadające różnym punktom w zbiorze Mandelbrota.

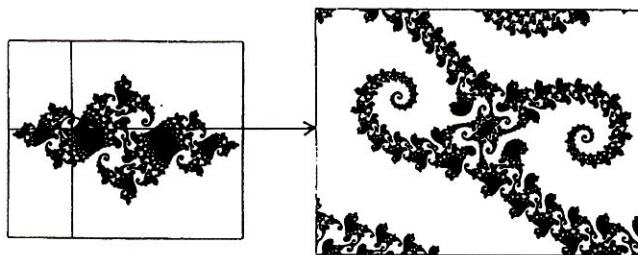
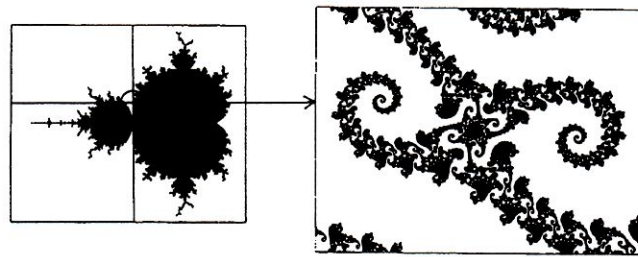
Chcąc wreszcie zobaczyć jak skomplikowaną strukturą jest zbiór Mandelbrota przypatrzmy się kolejnym przybliżeniom jego brzegu (rys. 45). Tego doświadczenia nie wolno przegapić, jest to spektakularne ćwiczenie matematycznej wyobraźni i wrażliwości (porównać to można z wpływem idei Cantora zmuszających do nowego spojrzenia na matematykę).



Rys. 45. Podróż w głąb zbioru Mandelbrota.

Najbardziej zadziwiającą (charakterystyczną) cechą zbioru Mandelbrota jest to, że zachowuje on swoją bardzo skomplikowaną strukturę przy dowolnie wielkim powiększeniu, a małe (ale doskonałe) kopie zbioru M można znaleźć w każdym otoczeniu każdego punktu na brzegu zbioru M.

Zaskakująca (i do końca jeszcze nie wyjaśniona) jest następująca obserwacja: powiększenie zbioru Mandelbrota w otoczeniu punktu c (leżącego blisko brzegu) jest uderzająco podobne do zbioru Julii J_c (lub jego części) (rys. 46).



Rys. 46. Podobieństwo powiększenia zbioru M i powiększenia zbioru Julii dla parametru $c = -0,745429 + 0,113008i$.

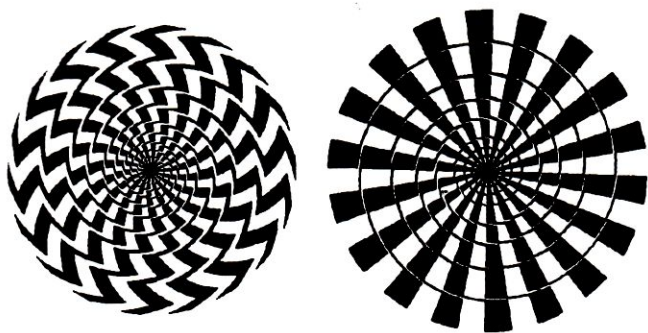
Możemy tutaj mówić jedynie o pewnym podobieństwie, gdyż fragment zbioru Mandelbrota musi zawierać nieskończenie wiele małych kopii zbioru M, a fragment zbioru Julii nie może zawierać żadnej takiej kopii (bo przeczyłoby to jego samopodobieństwu).

Ale co to wszystko ma wspólnego ze spiralami? Sądzę, że wystarczającym argumentem są powyższe obrazki, i te dotyczące zbiorów Julii, jak i zbioru Mandelbrota. Przepelnione są one strukturami spiralnymi. Wydaje się, że nie jest to tylko sprawa przypadku, ale tkwi w tym jakaś prawidłowość, dla której nie mamy jeszcze zadowalającego wytłumaczenia. Spirale logarytmiczne już okazały się dobrymi modelami do opisywania pewnych zjawisk, z jakimi spotykamy się w zbiorze Mandelbrota, tzw. asymptotycznego samopodobieństwa.

Istnieje jeszcze wiele nierozwiązanych problemów dotyczących własności zbioru Mandelbrota. Wiemy na przykład, że jest on spójny (pokazali to A. Douady i J. H. Hubbard w 1982 r.), ale bardzo trudny jest problem zbadania jego lokalnej spójności. Pewne wyniki w tym zakresie uzyskał w latach 1989-1990 francuski matematyk J.-C. Yoccoz, za co w 1994 roku otrzymał medal Fieldsa (zob. [7]).

Podane określenie zbioru Mandelbrota można (klonować) odnieść nie tylko do wielomianu $(z^2 + c)$, lecz do dowolnych wielomianów zależnych w analityczny sposób od parametru. Zaczyna się tu zupełnie nowa dziedzina wiedzy – dynamika zespolona.

Posługując się eksperymentami matematycznymi należy jednak zachować szczególną ostrożność –



Rys. 47. „Spirale” Nicholasa Wade’a z jego książki *The Art and Science of Visual Illusions*, Routledge & Kegan Paul, London 1982.

oglądając skomplikowane rysunki łatwo można ulec złudzeniom, jakie one prezentują (rys. 47).

Wykorzystana literatura

1. S. Jaśkowski, *Matematyka ornamentu*, PWN, Warszawa 1957.
2. A. P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, tom 1, *Od czasów najdawniejszych do początków nowożytnych*, PWN, Warszawa 1975.
3. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 1993.
4. E. Niczyporowicz, *Krzywe płaskie, wybrane zagadnienia z geometrii analitycznej i różniczkowej*, PWN, Warszawa 1991.
5. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, fraktale*, tom 1, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1995.
6. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, fraktale*, tom 2, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1996.
7. F. Przytycki, *Jean-Christophe Yoccoz*, *Wiad. Mat.* 31 (1995), 94–101.
8. J. M. Roberts, *Ilustrowana historia świata*, tom 1, *Pierwsi ludzie, pierwsze cywilizacje*, Wyd. Łódzkie, Łódź 1986.
9. J. T. Sandefur, *Using self-similarity to find length, area and dimension*, *Amer. Math. Monthly*, Feb. 1996, 107–120.
10. H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989.
11. I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1994.
12. *Sztuka świata*, tomy 1–10, Arkady, Warszawa 1992–1996.
13. H. Weyl, *Symetria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.