Jest to zapis odczytu wygłoszonego podczas XIX Szkoły Matematyki Poglądowej, *Ważne przykłady*, Siedlce, sierpień 1997

Horysfera

Marek KORDOS, Warszawa

Stworzenie geometrii nieeuklidesowych miało bardzo dziwny przebieg. Najpierw ukazała się praca Girolamo Saccheriego *Euklides od wszelkich skaz uwolniony* – była to monografia geometrii nieeuklidesowej, z tym, że na jej końcu autor (po udowodnieniu istnienia prostych asymtotycznych) stwierdził, iż jej twierdzenia są tak absurdalne, że dowodzi to V postulatu Euklidesa. Była ta praca jednak na tyle dobra, że perspektywa istnienia różnej od euklidesowej, ale poprawnej teorii przestrzeni, stała się realna. Wywołało to reakcję filozofów, którzy (w szczególności Kant w *Krytyce czystego rozumu*) nakazali jedyność geometrii euklidesowej i zadekretowali nienaukowość wszelkich badań innych teorii mających za cel opisanie przestrzeni. Wobec tego następne monografie geometrii nieeuklidesowych – np. *Teoria równoległych* Johanna Heinricha Lamberta czy *Geometria astralna* Franza Arnolda Taurinusa – były przez autorów maskowane stwierdzeniem, że nie ma w nich mowy o żadnej teorii przestrzeni, a jest tylko efektowna igraszka intelektualna. Prace te nie ustępowały wiele tym, które się za początek geometrii nieeuklidesowej uważa: О началах геометрии i *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* Nikołaja Iwanowicza Łobaczewskiego i *Appendix* Janosa Bolyaia (po łacinie!) do pracy jego ojca – Farkasa (Wolfganga) – na temat nauczania geometrii.

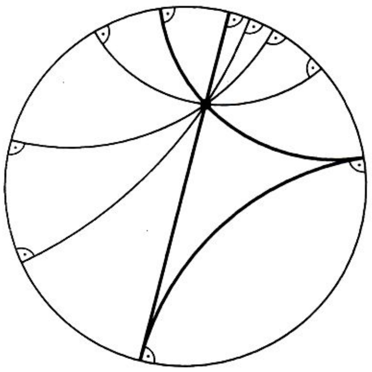
Choćby z tak ubogiego zarysu zdarzeń widać, że problem stwierdzenia istnienia, bądź nieistnienia, geometrii nieeuklidesowej (tej konkretnej, dalej będę o niej pisał **geometria BL**) nie był prosty. Nie wchodząc w szczegóły jej dziejów wypada przypomnieć, że skuteczną ideę stwierdzenia równoprawności geometrii euklidesowej (geometrii E) i geometrii BL wymyślił Eugenio Beltrami pod koniec lat 60. XIX wieku. Początek lat 70. to realizacja jego pomysłu przez Felixa Kleina.

Idea ta jest następująca. Jeżeli teoria **S** ma model zbudowany w teori **T**, to **S** jest co najmniej tak samo matematycznie poprawna, jak teoria **T**. Gdyby więc zbudować model geometrii BL w geometrii E i model geometrii E w geometrii BL (np. w zbudowanym poprzednio jej modelu), to udowodniłoby się tym samym matematyczną równoprawność obu tych geometrii.

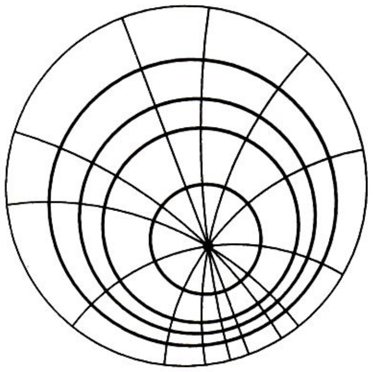
Liczne modele geometrii BL w geometrii E zbudowano stosunkowo łatwo. Nic dziwnego – doskonale znano materię, z której budowano model. Modele takie są też dość powszechnie znane. Model geometrii E w geometrii BL zbudowano później, wtedy, gdy postanowiono to zrobić tak, jak podpowiada nawias w poprzednim akapicie – w modelu geometrii BL (w geometrii E). Tekst ten jest szkicem dość prostej konstrukcji i nietrudnego – gdy się już go zna – dowodu jej poprawności.

Najdogodniej jest posłużyć się *modelem Poincaré'go* w kuli. Ten model geometrii BL w przestrzeni euklidesowej określa się w następujący sposób. Zbiorem punktów przestrzeni BL jest zbiór punktów otwartej kuli euklidesowej. Własności geometryczne tego zbioru określa zadeklarowanie, że BL-symetriami (płaszczyznowymi) są inwersje zachowujące przestrzeń BL. Inwersje są zresztą najbardziej chyba używanym narzędziem wszystkich przedstawionych w tym tekście rozważań.

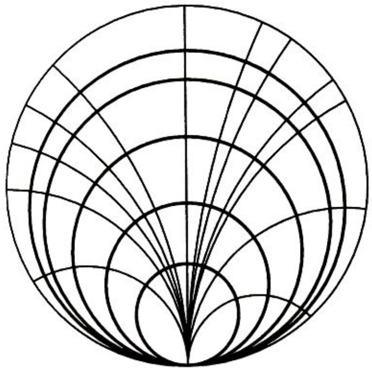
Dla wszystkiego przypomnijmy: *inwersja względem płaszczyzny* to zwykła (euklidesowa) symetria płaszczyznowa; *inwersja względem sfery* o środku O i promieniu r to takie przekształcenie przestrzeni bez O na nią samą, w którym dowolny punkt P i jego obraz P' leżą na jednej półprostej o początku w O oraz spełniają warunek $OP \cdot OP' = r^2$. Inwersję względem prostej czy okręgu definiuje się analogicznie. Już z definicji widać, że inwersje są inwolucjami, czyli ich kwadrat jest tożsamością.



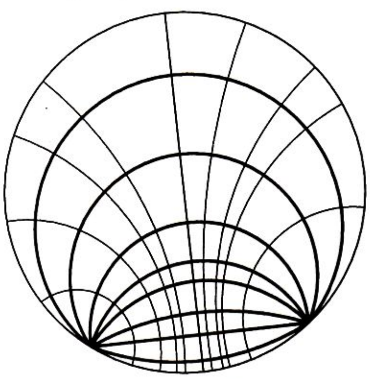
Rys. 1



Rys. 2. BL-okrąg w rozpatrywanym modelu jest euklidesowym okręgiem, tylko BL-środek ma trochę z boku



Rys. 3. Horycykle to w modelu okręgi styczne w tym samym punkcie do brzegu modelu.
Uwaga. Po angielsku mamy bardzo podobne nazwy, choć z dziwną zmianą czwartej litery: *horosphere* i *horocycle*.



Rys. 4. Ekwidystanty to w modelu łuki okręgów. Nazwa pochodzi stąd, że wszystkie punkty ekwidystanty są jednakowo oddalone od wyznaczającej pęk prostej (płaszczyzny).

Nietrudnym ćwiczeniem jest sprawdzenie podstawowych własności inwersji (zachęcam).
• Inwersje względem sfery przeprowadzają płaszczyzny (i proste) przechodzące przez O na nie same.
• Przeprowadzają płaszczyzny nie przechodzące przez O na sfery przechodzące przez O i wzajemnie; szczególnym przypadkiem – gdy płaszczyzna jest styczna do sfery inwersyjnej – jest tu rzut stereograficzny (dlatego też na ogół nie definiuje się, czy odbywa się on ze sfery na płaszczyznę, czy odwrotnie).
• Przeprowadzają sfery nie przechodzące przez O na sfery nie przechodzące przez O.
• Poza sferą inwersyjną wszystkie sfery stałe (nie punktowo stałe) to sfery ortogonalne do niej.

To spostrzeżenie pozwala podać jednolitą definicję inwersji – dla większej jednolitości posłużmy się nazwą ***blok*** obejmującą sfery i płaszczyzny (na płaszczyźnie – okręgi i proste):
• Inwersja względem bloku A to przekształcenie, które punktowi przecięcia trzech (na płaszczyźnie – dwóch) bloków ortogonalnych do A przypisuje (gdy istnieje) drugi ich punkt przecięcia, bądź (gdy nie istnieje) – ten sam punkt.

Najciekawszą własnością inwersji jest to, że
• Inwersja jest przekształceniem wiernokątnym (konforemnym) – jest nawet twierdzenie Liouville'a orzekające, że każde przekształcenie konforemne da się z inwersji poskładać.

Sprawdziwszy (bądź przyjąwszy na wiarę) powyższe własności inwersji możemy powrócić do modelu Poincaré'go w kuli. Płaszczyzny w tym modelu to bloki ortogonalne do brzegu – są to przecież zbiory punktów stałych BL-symetrii. Bardzo przydatną własnością tego modelu jest to, że kąty mają BL-rozwartość taką samą, jak w geometrii E (konsekwencja konforemności).

Każdy z Czytelników może sprawdzić, że w modelu tym spełnione są dowolne aksjomaty geometrii E niezależne od V postulatu – rysunek 1 wskazuje, że na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić dowolnie wiele prostych z nią rozłącznych, w tym dwie asymptotyczne, zwane równoległymi (pozostałe nazywa się nadrównoległymi). Warto na to zwrócić uwagę, bo ciąg dalszy do tego nawiązuje.

Tak w geometrii E jak i BL przez *powierzchnie* (w przypadku dwuwymiarowym – linie) ***kołowe*** rozumie się powierzchnie (linie) ortogonalne do pęku prostych. Pęk zaś prostych (w uproszczeniu – ale poprawnym – dla naszych potrzeb) to albo zbiór prostych mających wspólny punkt, albo równoległych (w BL wypada dodać: z tej samej strony) do ustalonej prostej, albo wreszcie prostopadłych do tej samej płaszczyzny (w przypadku dwuwymiarowym – prostej). W geometrii E ostatnie dwa rodzaje pęków pokrywają się.

Zapewne większość Czytelników nie zna pojęcia powierzchni (linii) kołowych. To zupełnie naturalne, gdyż – jak łatwo sprawdzić – są to w geometrii E sfery (względnie okręgi – przypadek pierwszy) i płaszczyzny (względnie proste – przypadek drugi). Po co więc miałyby korzystać z jeszcze jednej nazwy? W geometrii BL są trzy rodzaje takich powierzchni (linii): odpowiednio sfery (okręgi), horysfery (horycykle) i ekwidystanty. Na rysunkach 2–4 pokazany jest ich wygląd w przypadku płaskim. W przypadku przestrzennym jest podobnie – są to odpowiednio albo sfery zawarte w modelu, albo pozbawione jednego punktu, albo ich czasze. Dla pragnącego zawrzeć z horysferami (horycyklami) bliższą znajomość – ćwiczenie: wykazać, że dowolne dwie horysfery (dwa horycykle) są przystające. Widać, że trzeba jakoś ze złożenia stosownych inwersji uzyskać „jednokładność".

I tym sposobem doszliśmy do horysfery, która jest tytułową bohaterką tego tekstu. Otóż to, co odkrył Klein, to fąkt, że geometria horysfery jest geometrią euklidesową. Sformułujmy to dokładniej.

A więc model geometrii E w geometrii BL będzie następujący. Punktami budowanej przestrzeni będą punkty horysfery. Zauważmy, że wszystkie wprowadzane na niej pojęcia musimy wyrazić za pomocą pojęć geometrii BL.

Każde dwie proste pęku równoległych wyznaczającego horysferę leżą na pewnej BL-płaszczyźnie. Każde przecięcie dowolnej z takich płaszczyzn z horysferą jest horycyklem, czyli – z tradycyjnego punktu widzenia – okręgiem przechodzącym przez punkt, w którym horysfera dotyka brzegu modelu. I to są właśnie proste w modelu na horysferze. Czyli proste budowanego modelu to leżące na horysferze horycykle.

Symetrie w budowanym modelu (co określa wszelkie zależności metryczne) to zwykłe inwersje względem horycykli. Określenie to jest w języku geometrii BL, bo – jak to zauważyliśmy – inwersję da się określić za pomocą prostopadłości, a ta (na szczęście) jest taka sama w geometrii E i w modelu Poincaré'go w kuli.

To kończy budowę modelu geometrii E w geometrii BL. Mamy horysferę na której wyróżnione są horycykle i inwersje względem nich. Patrząc na to samo poprzez model Poincaré'go w kuli widzimy sferę bez punktu, z wyróżnionymi okręgami przechodzącymi przez ten brakujący punkt i inwersjami względem tych okręgów.

Rozważmy teraz płaszczyznę styczną do tej sfery w punkcie antypodycznym do brakującego. I rozważmy rzut stereograficzny rozpatrywanej sfery na tę płaszczyznę z brakującego punktu. Przypomnijmy: rzut stereograficzny to pewna inwersja. Co więc otrzymamy po wykonaniu owego rzutu? Otrzymamy płaszczyznę z wyróżnionymi prostymi i symetriami względem nich. Czyli geometrię euklidesową.

Co w tym jest trudne? Moim zdaniem spartańska prostota tego pomysłu i uzasadniającego go rozumowania.

Notka dla koneserów. Geometria sfery, na której weźmiemy pod uwagę wszystkie okręgi (i symetrie wględem nich), a nie tylko przechodzące przez jeden punkt, jest definicyjnie równoważna euklidesowej, ale od niej bogatsza w tym sensie, że dopuszczone są, w roli „izometrii", wszystkie przekształcenia konforemne. Jest ona nazywana *geometrią Möbiusa* i przez niego właśnie była po raz pierwszy badana. Mówi się też o niej, jako o geometrii płaszczyzny uzwarconej jednym punktem – wtedy nazywa się *płaszczyzną inwersyjną*; jest to zastosowanie tego samego co wyżej rzutu stereograficznego. Płaszczyzna z grupą odwzorowań konforemnych w sposób naturalny ma zastosowania w teorii funkcji analitycznych.

Ciekawe, że twórca tej geometrii nie doczekał chwili, gdy odpowiedni redukt badanych przez niego zależności stał się ostatnim elementem dowodu równoważności geometrii Euklidesa i geometrii Bolyai–Łobaczewskiego.