Kultura matematyczna a kultura matematyków

Witold WIĘSŁAW, Wrocław

Tekst zamieszczony obok jest zapisem odczytu na XX Szkole Matematyki Poglądowej, styczeń '98. Odczyt ten został przyjęty z bardzo mieszanymi uczuciami. Społeczność matematyków została w nim – zdaniem wielu – oceniona z etycznego punkty widzenia bardzo negatywnie – to łgarze, fanfaroni, oszuści, złodzieje itp. W oryginalnej wersji Autor dodał jeszcze Epizod X, w którym zajął się uczestnikami Szkoły.

Wychodząc z założenia, że hasło „niech zakwita sto kwiatów" jest słuszne niezależnie od jego autora i niezależnie od gatunku kwiatów, przeforsowałem umieszczenie tego tekstu w *M-S-N*. Każdy przecież może, tak na naszych łamach, jak w dowolny inny sposób, zademonstrować swoją opinię na ten temat.

Ponieważ jednak potrzebne było zastosowanie forsingu, więc zdecydowałem się na zamieszczenie również tego wyjaśnienia..

Marek Kordos

Zarówno pojęcie kultury, jak – w szczególności – kultury matematycznej, to pojęcia bardzo względne, a na pewno trudne do zdefiniowania. Na przedstawionych poniżej przykładach postaram się wskazać na wzajemne relacje między kulturą matematyczną, jakkolwiek ją rozumieć, a kulturą matematyków. Świadomie sięgam do przykładów z przeszłości, dziś już beznamiętnych faktów. Ale okazuje się, że nawet odległa przeszłość może wywoływać emocje i być kontrowersyjna. Nie mówiąc już o czasach współczesnych, o czym świadomie będzie dopiero na końcu. W poszczególnych epizodach postaram się zachować powściągliwość, ocenę sytuacji pod kątem kultury pozostawiając Czytelnikowi.

Epizod I wymaga komentarza historycznego. Najbardziej liczącymi się ośrodkami naukowymi w IV wieku p.n.e. w Grecji były: Akademia Platona (założona w 387 p.n.e.), Liceum (Lykejon) Arystotelesa i Ogród Epikura (w III w. p.n.e.) W roku 308 p.n.e. Demetrius z Faleronu, wygnany z Aten przez Demetriusa Poliorketesa, zaproszony przez Ptolemeusza I Sotera, zamieszkał u niego w Aleksandrii i przekonał go o potrzebie założenia w tym mieście instytucji naukowej, na wzór ateńskich. Przychylność władcy, a przede wszystkim jego pieniądze, dopomogły w powstaniu Muzeum Aleksandryjskiego (Museion – świątynia muz). Obejmowało ono akademię, uniwersytet i bibliotekę, w dzisiejszym znaczeniu tych słów. Hojność pierwszych dwóch Ptolemeuszów zapewniła Muzeum Aleksandryjskiemu środki na rozwój. Muzeum to w znacznym stopniu przewyższyło instytucje ateńskie. Biblioteka za Ptolemeusza II liczyła około 500 000 dzieł; w I stuleciu, za Kleopatry, było tam już około 700 000 dzieł. Za przykładem Ptolemeuszów poszli Seleucydowie i Attalidzi; Seleucydowie założyli bibliotekę w Antiochii (dziś: Antakya w Turcji), a Attalidzi – w Pergamonie (niedaleko współczesnego Izmiru w Turcji). Bilbioteka w Pergamonie liczyła 200 000 dzieł. Produkcja tak wielu dzieł naukowych spowodowała kryzys – niedobór papirusu. W tej sytuacji zaczęto wyprawiać w Pergamonie skórę świńską (pergamona membrana), a potem skóry innych zwierząt. To właśnie ta zmiana technologii dała możliwości tak znacznego wzrostu zasobów bibliotecznych.

Euklides pracował w Aleksandrii za panowania Ptolemeusza I. Ze szkoły aleksandryjskiej wyszli: Eratostenes, Archimedes (później w Syrakuzach na Sycylii), Apolloniusz (później w Pergamonie, lub krócej, w Perdze). I tu dopiero zaczyna się

Epizod I. Zagadnienie, słynne w Starożytności, zawarte jest w epigramie, który – jak wynika ze wstępu – został wysłany do Eratostenesa przez Archimedesa, z prośbą, aby przedstawić go matematykom aleksandryjskim. Zdaniem filologów uważa się za nieprawdopodobne, aby Archimedes sam napisał tekst, który dotrwał do naszych czasów. To wszakże nie wyklucza możliwości, że problem wywodzi się od niego. Powszechnie uważa się, że intencją sformułowania tego zadania była chęć skompromitowania Apolloniusza, który dokładniej obliczył stosunek obwodu koła do jego średnicy, niż Archimedes w *Mierzeniu Koła*, tzn. dokładniej przybliżył liczbę π (przybliżenie Archimedesa to $\frac{22}{7}$). (por. [3])

Byki i krowy pasą się na Sycylii w czterech stadach różnych kolorów: białe, czarne, łaciate i żółte. Jeżeli oznaczyć liczbę byków w tych stadach przez W, Z, P, B, a liczbę krów odpowiednio w, z, p, b, to zachodzą następujące zależności (I):

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) Z - B$$

$$Z = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) P + B$$

$$P = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) P + B$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (Z + z) \qquad p = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (B + b)$$

$$z = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (P + p) \qquad b = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$$

Ponadto żąda się, aby

(II) $W + Z$ było liczbą kwadratową (tzn. postaci n^2, $n \in \mathbb{N}$)

(III) $P + B$ było liczbą trójkątną (tzn. postaci $\frac{m(m+1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$)

Po żmudnych obliczeniach, wykonanych dopiero w XIX wieku (tekst opublikował po raz pierwszy G. E. Lessing w 1773), zadanie zostało zredukowane do rozwiązania równania

$$u^2 - \lambda v^2 = 1, \ \lambda = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 4729494.$$

Szuka się najmniejszego rozwiązania v podzielnego przez 2 i przez 4657. Liczba $\sqrt{\lambda}$ ma w rozwinięciu na ułamek łańcuchowy okres długości 91. Obliczono, że W ma 206545 cyfr i zaczyna się od 1598. Łączną liczbę krów i byków Heliosa reprezentuje liczba o 206545 cyfrach, zaczynająca się od 7766.

Jest mało prawdopodobne, aby Archimedes rozwiązał to zadanie.

Epizod II. Dotyczy on sporu o priorytet rozwiązania równania stopnia trzy (por. [9], [10], [11]).

Scipio del Ferro (1456–1526) był profesorem uniwersytetu w Bolonii w latach 1496–1526. Odkrył sposób rozwiązywania równań postaci $x^3 + ax = b$, gdzie $a, b > 0$ i przekazał tę informację swojemu uczniowi, Antonio Marii Fiore. Niezależnie od niego, Niccolo Tartaglia (a naprawdę Niccolo Fontana) znalazł algorytmy rozwiązywania równań tej samej postaci. Równania stopnia 3 rozpadają się na trzy typy: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + qx = p$, z dodatnimi współczynnikami p i q. Tartaglia w roku 1535 zaproponował 30 zadań uczniowi Scipio del Ferro, Fiore. Trzeba w tym miejscu wspomnieć, że w tamtych czasach modne były najprzeróżniejsze konkursy i zakłady, kończone bankietami wydawanymi przez przegranego. Taka też była propozycja Tartaglii – ten, który przegra, stawia 30 bankietów. Tartaglia przygotował rozmaite zadania, ale wszystkie zadania Fiore prowadziły do równania stopnia 3. W nocy 12/13 lutego 1535 upływał termin. Tej dramatycznej nocy Tartaglia zdołał rozwiązać wszystkie zadania. Fiore nie potrafił rozwiązać wszystkich zadań Tartaglii i w rezultacie przegrał. Słynny lekarz, astrolog i matematyk, Girolamo Cardano, dowiedział się w 1539 o odkryciu Tartaglii i zaprosił go do Mediolanu. Po przybyciu Tartaglii do Mediolanu Cardano zdołał go przekonać, aby zdradził sekret, obiecując, że nikomu go nie wyjawi. W związku z tym Cardano złożył przysięgę 25 marca 1539 roku. Wkrótce po spotkaniu z Tartaglią Cardano rozwiązał dwa dotąd nie rozwiązane typy równań, po czym wyniki opublikował w *Ars Magna* (*Wielka Sztuka*) w 1545 roku, pomijając jednak milczeniem, kto rozwiązał równanie pierwszego typu i kto podsunął mu pomysł. W rozdziale XI (*De cubo & rebus aequalibus numero*) wymienieni są Scipio del Ferro i Tartaglia, ale nie jest napisane, że to właśnie oni rozwiązali równanie stopnia trzy. **Cardano złamał złożoną przysięgę.**

Epizod III. Leonhard Euler i Daniel Bernoulli.

Euler wyprowadził podstawowe prawa hydrodynamiki. Zainteresowania te rozwinął już w młodości pod wpływem swojego nauczyciela, Johanna I Bernoulliego. Wyniki swoje przedstawił Petersburskiej Akademii Nauk w sierpniu 1727 roku, w dwa tygodnie po podobnym wykładzie Daniela Bernoulliego. Wyniki obu autorów pokrywały się, choć były uzyskane niezależnie. W tej delikatnej sytuacji **Euler ustąpił pierwszeństwa** swojemu starszemu przyjacielowi, zaprzestając badań w tej dziedzinie na całe ćwierćwiecze. Powrócił do tej tematyki badań na początku lat pięćdziesiątych. Wyprowadził wtedy równania idealnej cieczy. Równania hydrodynamiki i inne prace z tej dziedziny opublikował Euler w Berlinie w 1756 i 1757. [7]

Epizod IV. Argand i Français – priorytet odkrycia interpretacji geometrycznej liczb zespolonych.

Powszechnie wiadomo, że interpretacja geometryczna liczb zespolonych, jako punktów płaszczyzny euklidesowej, pochodzi od duńskiego geodety, Caspara Wessela (1799). Jednak dopiero po stu latach odkryto, że to właśnie Wessel pierwszy wpadł na ten pomysł. Tymczasem odkrycia tego dokonał niezależnie Jean Robert Argand w 1806 i zakomunikował o tym Legendre'owi. Ten z kolei wspomniał o tym F. Français. Français wkrótce zmarł. Notatki odnalazł jego brat, i uważając wynik za ważny, opublikował go. Zareagował na to Argand. Po wymianie korespondencji na łamach Annales de Mathématiques Pures et Appliqué es, w latach 1813–14, **Français publicznie uznał priorytet Arganda**. Szczegóły można znaleźć w [10].

Później przypisywano ten wynik Gaussowi; ponoć wzmianka na ten temat miała być w jego *Dzienniku* (*Tagebuch*). Nie było. Sprawdziłem.

Epizod V. C. G. J. Jacobi i jego pierwsza publikacja.

Carl Gustav Jacob Jacobi (urodzony w 1804), ukończył studia w Berlinie, rozpoczęte w 1821, w roku 1825, doktoratem i habilitacją, co w tamtych czasach nie było niczym nadzwyczajnym – studia na ogół kończono doktoratem, a o habilitację, czyli prawo wykładania na danym uniwersytecie, starali się ci, którzy chcieli potem wykładać. (Edward Kummer, który habilitował się na Uniwersytecie Wrocławskim – Leopoldinie, a potem był jego rektorem w okresie Wiosny Ludów, musiał ponownie habilitować się po przejściu na Uniwersytet Berliński. Ostatecznie jednak zwolniono go z tego obowiązku.) Praca habilitacyjna Jacobiego dotyczyła rozkładu funkcji wymiernych na ułamki proste. Co prawda znał to już Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748), ale habilitacja wcale nie musiała zawierać nowych wyników. W 1826 Jacobi przeniósł się do Królewca. Jeszcze będąc w Berlinie złożył do druku w nowo powstałym czasopiśmie Crellego pracę pt.: *Von den wiederholten Functionen*. Praca dotyczyła rozwinięcia w szereg potęgowy n-krotnej iteracji funkcji f, której rozwinięcie w szereg potęgowy jest dane. Pracę jednomyślnie odrzuciło siedmiu recenzentów. Nie wszyscy spośród nich byli matematykami, ale za to wszyscy – członkami Berlińskiej Akademii Nauk. Praca czekała 136 lat na opublikowanie [2]. Ale wreszcie doczekała się publikacji. Nawet po tylu latach pracy tej nie można uznać za banalną. Dzięki publikacji możemy poznać nazwiska recenzentów tej pracy. Dziś (a zapewne i wtedy) nic one nie znaczą. **Nazwiska te weszły do historii matematyki tylko dzięki incydentowi z Jacobim**. Oto lista recenzentów:

1. J. Fr. Encke, członek zwyczajny BAN od 1825; bez wyników naukowych. Uczeń Gaussa.
2. E. H. Dirksen, członek zw. BAN od 1825, od 1824 profesor zw. Uniwersytetu Berlińskiego. Wykładał w Szkole Kadetów.
3. J. Ph. Gruson, członek BAN. Politechnika (Bauakademie).
4. Fr. Th. Poselger, członek zw. BAN od 1825, samouk.
5. E. G. Fischer, członek BAN od 1803.
6. J. A. Eytelwein, członek BAN od 1803, samouk, dyrektor budownictwa.
7. J. Oltmanns, o nim niczego nie wiadomo.

Epizod VI. J. Liouville – skąd zwłoka w publikacji dorobku Galois?

Auguste Chevalier, przyjaciel Evariste'a Galois, zadbał o to, aby list Galois, napisany w nocy przed fatalnym pojedynkiem, omawiający jego wyniki w teorii równań i w teorii funkcji eliptycznych, został opublikowany. Galois prosił w nim, aby list przekazać Gaussowi i Abelowi. Po publikacji nie było reakcji ani Gaussa, ani kogokolwiek innego. Dziesięć lat później kilku przyjaciół Galois przekonało Liouville'a, aby przestudiował dorobek Galois. Liouville przygotował kilka komentarzy, których jednak nie opublikował. Pracę Galois (*Memuar o kryteriach rozwiązalności równań przez pierwiastniki*), którą dziesięć lat wcześniej Poisson ocenił jako niezrozumiałą, Liouville przygotował do druku w grudniu 1843 w swoim czasopiśmie. Jednak w ostatniej chwili zastąpił ją pracami Serreta i innych. Nie jest jasne, czy nie był pewien szczegółów tej pracy, czy też już wtedy planował wydanie dzieła Galois. Przedstawiając pracę Akademii Paryskiej stwierdził, że *praca Galois napisana jest zbyt zwięźle* i obiecał przygotować do niej wyczerpujące komentarze. Praca ukazała się w 1846, ale bez komentarzy Liouville'a. Bertrand tak pisał w 1902 roku o Liouville'u: *słyszałem jego*

Abel nie żył wtedy już od trzech lat. (*Red.*)

deklarację, że dowód jest bardzo łatwy do zrozumienia. Gdy zobaczył mój odruch zdziwienia, dodał „wystarczy poświęcić temu miesiąc lub dwa, nie myśląc o niczym innym". Liouville prywatnie wykładał teorię Galois, zapewne zimą 1843/44. W tym czasie napisał kilka not poświęconych rozprawie Galois. Noty te, a zwłaszcza ich ostatnia wersja, prawie gotowa do druku, wskazują, że Liouville rozumiał główne kroki dowodu. Nie opublikował tego w 1846, planując zapewne większą pracę. Pisze o tym Serret w pierwszym wydaniu swojej Algebry wyższej (1849). Wydaje się także, że notki Liouville'a zachęciły Cauchyego, aby po latach znów zająć się permutacjami (1845). Od czasu do czasu pojawia się opinia, że Liouville jednak tego dobrze nie rozumiał. Wskazywałby na to brak jego komentarzy w opublikowanej pracy Galois, oraz zaledwie kosmetyczne zmiany w tekście Galois, głównie redakcyjne. Kiedy to Bertrand zapytał Serreta, dlaczego nie cytuje Liouville'a w II wydaniu książki, w którym jest wzmianka o teorii Galois, usłyszał m.in.: *Istotnie, chodziłem na te wykłady, ale niczego nie zrozumiałem*. W III wydaniu z 1866 jest duży rozdział na ten temat. Jest to dosłownie (a więc z błędami) przepisana oryginalna praca Abela z Crelle's Journal z 1826, co dowodzi, że istotnie, Serret tego nie rozumiał. (por. [6])

Skąd się wzięła trzyletnia zwłoka w publikacji pracy Galois i czy Liouville naprawdę ją zrozumiał, tego zapewne już nigdy nie dowiemy się. Liouville, mimo, że publikował wiele prac, był bardzo krytyczny. Na przykład, niemal w ostatniej chwili wycofał z druku w Comptes Rendus rzekomy dowód przestępności e. Dlatego też można przypuszczać, że **Liouville zapewne nie rozumiał pracy Galois** i z tego powodu zwlekał z jej publikacją.

Epizod VII. (por. [1]) Czy na pewno skandal?

Jak dobrze wiadomo, kwaterniony odkrył William Rowan Hamilton 16. X 1843 w Dublinie i uwiecznił to na jednym z tamtejszych mostów (por. [11]). Istota odkrycia nie polega na jeszcze jednym uogólnieniu liczb, lecz na wprowadzeniu do algebry pojęć definiowanych aksjomatycznie. To od Hamiltona pochodzi termin *rozdzielność mnożenia względem dodawania*. To on dla dodawania i mnożenia w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sprawdzał łączność, pojęcie wprowadzone przez Servois w 1813. J. J. Sylvester (1883) wykazał to, co wcześniej podejrzewał A. Cayley: kwaterniony to macierze zespolone postaci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

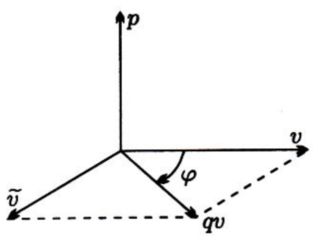
Okazuje się, że Gauss skonstruował kwaterniony i to dużo wcześniej od Hamiltona, bo w latach 1819–23 (por. [5]) z zamiarem użycia ich do opisu obrotów kuli wokół punktu w przestrzeni trójwymiarowej. Już Euler udowodnił w 1770 (por. [4]), że każdy obrót kuli wokół punktu jest obrotem wokół pewnej osi. Jednym z pierwszych zastosowań kwaternionów, które podał Hamilton, był dowód tego twierdzenia: utożsamiając punkt (x_1, x_2, x_3) przestrzeni trójwymiarowej z kwaternionem czystym $x = x_1 i - x_2 j - x_3 k$, dowolny obrót kuli wokół początku układu współrzędnych 0 ma postać: $x \mapsto qxq^{-1}$, gdzie q jest ustalonym kwaternionem długości 1. Otóż **Altmann** [1] **usiłuje dowieść, że** to niejaki **Olinde Rodrigues** [8] **był odkrywcą kwaternionów**. Co zrobił Rodrigues? Wyliczył, jak wygląda złożenie takich dwóch obrotów kuli wokół różnych osi, używając mozolnie geometrii analitycznej w przestrzeni trójwymiarowej. Wyszło mu to samo, co Hamiltonowi z pomocą kwaternionów (bo jakże mogło by być inaczej?!). Mianowicie, jeżeli f i g są obrotami wyznaczonymi, jak wyżej, przez macierze q i p, to superpozycja f i g (tzn. $f \circ g$) wyznaczona jest przez iloczyn qp.

Rozumowanie Altmanna można streścić w następujący sposób: skoro Rodrigues obliczył to, co później dały kwaterniony Hamiltona, to musiał znać kwaterniony!

Dowody wymienionych twierdzeń nie są trudne, więc może warto je przytoczyć. Nietrudno sprawdzić, że jeżeli x, y są kwaternionami czystymi (wektorami z przestrzeni trójwymiarowej), to

$$(*) \qquad xy = -\langle x, y\rangle + x \times y,$$

gdzie nawias oznacza iloczyn skalarny, a krzyżyk – iloczyn wektorowy. Jeżeli teraz $q = a + bi + cj + dk$ jest kwaternionem długości 1, to można go zapisać w postaci $q = \cos\varphi + p\sin\varphi$, gdzie $a = \cos\varphi$, a p jest już zdefiniowane przez tę równość. Niech teraz v będzie kwaternionem czystym prostopadłym do p. Zatem $qv = v\cos\varphi + \widetilde{v}\sin\varphi$, gdzie $\widetilde{v} = pv = p \times v$. Kwaternion $\widetilde{v}$ powstaje z v przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi p. Ostatecznie więc funkcja $v \mapsto qv$ opisuje obrót o kąt φ wokół p. Za pomocą podobnych argumentów dowodzi się, że funkcja $v \mapsto qvq^{-1}$ opisuje obrót wokół osi p o kąt 2φ.



Twierdzenie Eulera wynika z faktu, że każdy obrót f kuli wokół 0 opisany jest macierzą ortogonalną U o wyznaczniku 1. Wielomian charakterystyczny takiej macierzy ma wartość własną 1, tzn. istnieje niezerowy wektor własny x macierzy U: $Ux = x$. Wynika stąd, że f jest obrotem wokół osi. A więc każdy obrót f kuli wokół 0 ma postać $f(x) = qxq^{-1}$.

Niech teraz $f_s(x) = q_s x q_s^{-1}$ $(s = 1, 2)$ będą dwoma obrotami, gdzie q_s jest kwaternionem o normie 1. Stąd wynika, że $f_1 \circ f_2(x) = q_1(q_2 x q_2^{-1})q_1^{-1} = (q_1q_2)x(q_1q_2)^{-1}$, co pozwala efektywnie wyznaczyć oś obrotu złożenia dwóch obrotów kuli.

Epizod IX. (A właściwie dziesiątki epizodów) Współczesne plagiaty w matematyce.

Przed dziesięciu laty w Notices AMS ukazał się krótki artykuł, który dowodzi upadku dobrych obyczajów wśród części matematyków. Przytoczona jest tam lista plagiatów odkrytych dzięki współczesnej technice elektronicznej. Ofiarą plagiatów padają publikacje (książki, rozprawy naukowe etc.) fragmentarycznie lub w całości. Ale to tylko mała część wszystkich publikacji. Możliwe. Nawet, jeżeli tak jest, to w złym świetle stawia to nie tylko kulturę matematyczną, ale przede wszystkim – kulturę matematyków.

Bibliografia:

[1] Simon L. Altmann, *Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal*, Mathematics Magazine 62 (1989), No 5, 291–308.

[2] Kurt-R. Biermann, *Eine unveröffentliche Jugendarbeit C.G.J. Jacobis über wiederholte Funktionen*, Journal für dier reine und angewandte Mathematik 207 (1961), 96–112.

[3] E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Princeton University Press, Princetown, New Jersey 1987.

[4] L. Euler, *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 1771, 75–106. (Opera Omnia. Seria Prima. Volumen Sextum, 287–315)

[5] C. F. Gauss, [Mutationen des Raumes]. [I.] [Transformationen des Raumes.], Werke, Band 8, 357–361. Teubner 1900.

[6] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809–1882. Master of pure and applied mathematics*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 15. Springer 1990.

[7] *Razvitije idei Leonarda Ejlera i sovremennaja nauka*. Sbornik statej pod redakciej N. N. Bogolubova, G. K. Mihajłowa, A. P. Juszkievicza, (ros.) Moskwa 1988.

[8] O. Rodrigues, *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un systeme solide dans l'espace, et la variation des coordonnèes provenant de ses déplacements considérés indé pendamment des causes qui peuvent les produire*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqué es 5 (1840), 380–440.

[9] B. L. van der Waerden, *A history of algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer 1985.

[10] W. Więsław, *Liczby i geometria*, WSiP, Warszawa 1996.

[11] – , *Matematyka i jej historia*. NOWIK, Opole 1997.