Matematyka na salonach

Michał SZUREK, Warszawa

Chodzi o Szkołę Matematyki Poglądowej *Kultura matematyczna, teoria i zbiór zadań.*

W jednej z przerw między wykładami na konferencji „Kultura w matematyce" (Grzegorzewice, 28 I–3 II 1998) wyrażono zdecydowany pogląd, że używanie zwrotu „wtedy i tylko wtedy" jest w matematyce niekulturalne. Zwolennik tego poglądu przytaczał jako argument, że często jedna z implikacji w owej równoważności jest łatwa, niekiedy trywialna, a druga trudna i nie można ich w ten sposób równać. Dodatkowym argumentem było to, że trudno jest odróżnić te dwa kierunki: czy *wtedy* to znaczy że z lewej strony wynika prawa, czy na odwrót.

Otóż ja chcę tutaj *expressis verbis* wygłosić pogląd przeciwny: używanie zwrotu „wtedy i tylko wtedy" świadczy o pewnym wyrobieniu matematycznym i kulturze.

Pierwszy z przytoczonych argumentów przeciwnika jest chybiony: czemu to mamy się spodziewać, że w równoważności

$$\alpha \Leftrightarrow \beta$$

implikacje $\Rightarrow$ i $\Leftarrow$ są tak samo trudne? To nie jest tam napisane, ani nie wystaje z pomiędzy wierszy. Polemika z drugim argumentem wyniknie z dalszego ciągu tekstu.

Gdy byłem młodym studentem, starałem się zapamiętać, co jest definicją jakiegoś pojęcia, a co „warunkiem koniecznym i dostatecznym". Było to właściwe – słownik języka polskiego Stanisława Skorupki wyjaśnia:

definicja ż I «określenie treści znaczeniowej wyrazu, formułowane zazwyczaj po to, aby zorientować się w jego możliwym zakresie» ⟨fr.⟩

A więc definicja ma wyjaśniać, na jakie cechy badanego obiektu zwracamy uwagę, co jest istotą wprowadzanego pojęcia. Każdy nauczyciel matematyki wie, że odpowiedni dobór definicji rozjaśnia materiał, czyni wykład bardziej przystępnym i ułatwia wobec tego życie tak studentom, jak i wykładowcy. Odwrotnie, wprowadzanie np. pojęcia grupy słowami:

> Grupą nazywamy system algebraiczny $\langle G, f_0, f_1, f_2\rangle$ gdzie G jest niepustym zbiorem, dla każdego zaś $i \in \{0,1,2\}$ funkcja f_i jest operacją i-argumentową, przy czym mają być spełnione następujące aksjomaty równościowe: *itd.* ...

świadczy o tym, że wykładowca rozumie, co to jest grupa – ale być może nic ponadto.

Gdy jednak student zrozumie dobrze dane pojęcie – grupy, przestrzeni zwartej, przestrzeni liniowej, płaszczyzny rzutowej – wtedy ogarnia je całościowo, w każdym jego aspekcie. Potrafi równie dobrze pracować z pojęciem bazy przestrzeni liniowej jako „minimalnego układu rozpinającego", jak i „maksymalnego generującego". Równie dobrze dostrzega liniową strukturę $P^2(R)$, jak i to, że rzeczywista płaszczyzna rzutowa topologicznie jest kulą, z której wycięto dziurkę, by zakleić ją wstęgą Möbiusa. Piękno matematyki polega miedzy innymi na tym, że odkrywa ona związki łączące z pozoru odległe pojęcia. Zwracanie uwagi na to, co jest definicją, a co twierdzeniem, jest wtedy balastem – a jego pozbycie się świadczy o wyrobieniu i kulturze matematycznej. Ten kto na przyjęciu u króla zagląda do notatnika, by znaleźć tam radę, czy wino pije się małymi łyczkami, czy też jednym haustem do dna (wznosząc przy tym stosowny toast *Vive les belles dames*), czy powoli – jest jak gdyby mniej kulturalny od tego, który takie rzeczy po prostu *wie*.

Żeby zdeklarować się do końca, wyjaśnię, że również jestem pozytywnego zdania o wyklinanym zwrocie typu: *„Przestrzeń X nazywamy przestrzenią Szurka, jeśli spełnia jeden z następujących równoważnych warunków ...* " Kulturalny matematyk – *a o innych tu nie mówimy* – zrozumie bez słów, że należy jednak

udowodnić, że owe warunki są zaiste równoważne, a sformułowanie podkreśla właśnie, że nie chcemy żadnej z tych własności wyróżniać. I znowu uwaga: co jest dobre dla wyrobionego matematyka, nie musi być automatycznie dobre dla uczniów i studentów.

I jeszcze drobiazg: kulturalny matematyk nie wygra już walki z używaniem słowa „liczyć" w znaczeniu „obliczać", podobnie jak nie wypleni się słowa „rożno". Natomiast powinniśmy się pozbyć nawyku mówienia „maksymalny" tam, gdzie logicznie lepszy jest „największy". Prawie każdy, to uczył się algebry liniowej słyszał, że *rząd macierzy jest to maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn*. Nie jest to nieprawda – ale to jest po prostu największa liczba o tej własności.

Mam nadzieję, że cały spór o *wtedy i tylko wtedy* jest tylko nominalny i naprawdę wszyscy się zgadzamy. Może to jest tak, jakbym ja mówił „posługiwanie się nożem i widelcem przy jedzeniu *boeuf Strogonoff z truflami* jest kulturalne", a Oponent mój protestował: „nie, nie, nie można tak mówić, bo kiedyś mój wujek właśnie przy tym daniu użył wspomnianych sztućców: dziobał i kładł sobie mięso do ust nożem a widelcem dłubał w zębach i książęca służba wyrzuciła go z przyjęcia jako chama".