Jest to zapis wykładu wygłoszonego na XX Szkole Matematyki Poglądowej *Kultura matematyczna, teoria i zbiór zadań*, Grzegorzewice, styczeń '98.

Od wzorca do wyjątku i z powrotem,

na przykładzie dynamiki jednowymiarowej

Tomasz NOWICKI, Warszawa

1. Ciąg geometryczny i punkty hiperboliczne

Układy dynamiczne zamują się modelowaniem ewolucji w czasie, a zwłaszcza własnościami asymptotycznymi takich modeli. Wzorcowym przykładem jest podanie ewolucji za pomocą równania rekurencyjnego. Weźmy dla prostoty $x_{n+1} = a \cdot x_n$, dla $x_0, a \in \mathcal{R}$. Ciąg geometryczny ma znane własności jest zbieżny dla $a \in (-1, 1]$ (oscylująco bądź monotonicznie zależnie od znaku a), rozbieżny dla $|a| > 1$ i okresowy dla $a = -1$. Szczególny rodzaj zbieżności zachodzi dla $a = 1$ i $a = 0$.

Takie zachowanie jest wzorcowe dla iteracji $x_{n+1} = f(x_n)$, gdy badamy *lokalną* zbieżność ciągu w okolicy punktu stałego $p = f(p)$, dla funkcji gładkiej, powiedzmy klasy C^1. Rolę a spełnia $f'(p)$. Przy czym należy zauważyć, że w sytuacji niehiperpolicznej, dla $|f'(p)| = 1$, nie możemy wiele powiedzieć, ta sytuacja może być wyjątkowa. Ponadto przy $|f'(p)| > 1$ możemy stwierdzić jedynie, że ciąg opuszcza to otoczenie, gdzie $|f'| > 1$. Jednak wtedy (lokalnie) można rozpatrywać f^{-1}.

Dla przekształceń określonych na wyżejwymiarowych rozmaitościach, mówimy, że punkt stały jest hiperboliczny jeśli Df w tym punkcie nie ma wartości własnych o module jeden. Wzorzec punktów hiperbolicznych jest używany też dla badania otoczeń punktów okresowych $p = f^n(p)$. Można powiedzieć, że sytuacja hiperboliczna jest dobrze zbadana, ponadto wiadomo, że jest ona (w sensie topologicznym) typowa. W otoczeniu punktu hiperbolicznego istnieją lokalnie dwie podrozmaitości, modelowane podprzestrzeniami niezmienniczymi pochodnej. Można wydzielić podzbiory przyciągane do punktu iteracjami f i iteracjami f^{-1}, są to podrozmaitości modelowane podprzestrzeniami własnymi Df, jedna odpowiada wartościom własnym z wnętrza koła jednostkowego, a druga z zewnętrza.

Istnieje analogia w przypadku potoków (czyli rozwiązań autonomicznych równań różniczkowych zwyczajnych). Wtedy można mówić o hiperboliczności nie tylko punktów krytycznych (czyli stałych), ale także o hiperboliczności orbit zamkniętych (z wyjątkiem kierunku stycznego do orbity). W przypadku potoków żądamy, aby wartości własne pochodnej miały niezerowe części rzeczywiste.

2. Obroty

Jeden z aspektów niehiperboliczności można prześledzić na przykładzie iteracji funkcji liniowej $x_{n+1} = a \cdot x_n$, ale w dziedzinie zespolonej, $x_0, a \in \mathcal{C}$ oraz $a = \exp(2\pi i\ \phi)$. Możemy ograniczyć się do $x_0 \in S^1$. Geometrycznie mamy do czynienia z obrotem okręgu, przy czym, w zależności od ϕ mówimy o obrocie wymiernym, bądź niewymiernym. Sytuacja jest tu delikatna, gdyż dynamika zależy od dość subtelnej własności liczby a. Dla obrotu wymiernego $\phi = p/q$ funkcja f^q jest stała, po zatoczeniu p okrążeń punkt wraca na pozycję początkową. Dla obrotu niewymiernego każda trajektoria (czyli zbiór $\{x_n\}$) jest gęsta. Jeśli wyrazimy ϕ w postaci ułamka łańcuchowego, to redukty p_n/q_n opisują przybliżenia f przez obroty wymierne, a punkty x_{q_n} podchodzą kolejno najbliżej do x_0.

Obroty niewymierne są wzorcowe w następującym sensie. Rozpatrzmy dostatecznie gładki (C^{1+}, gdzie + oznacza ograniczoną wariację pochodnej) dyfeomorfizm g okręgu zachowujący orientację. Jeśli g nie ma punktów okresowych, to g jest topologicznie sprzężony z obrotem niewymiernym.

Sprzężenie topologiczne f z g oznacza, że istnieje homeomorfizm h taki, że $f \circ h = h \circ g$. Istnienie sprzężeń prowadzi do twierdzeń klasyfikacyjnych.

Ponadto istnieje topologiczny niezmiennik dyfeomorfizmów zachowujacych orientację, zwany liczbą obrotu, całkowicie wyznaczający klasę dyfeomorfizmów topologicznie równoważnych, liczba ta równa jest ϕ dla obrotu. Stopień niewymierności liczby obrotu (wyznaczony przez nierówność diofantyczną) wyznacza minimalną gładkość sprzężenia.

Gdy liczba obrotu jest wymierna, to dyfeomorfizm ma punkt okresowy (o okresie równym mianownikowi liczby obrotu). Liczba obrotu jest definiowana punktowo, ale nie zależy od wyboru punktu. Jest to graniczna wartość średniego obrotu punktu podczas iterowania.

3. Przekształcenia nieliniowe

Powróćmy do zastosowania wzorca liniowego, czyli do modelowania funkcji w otoczeniu punktów stałych przekształceniem liniowym. Weźmy przykładowo $x_{n+1} = x_n^2$, wystarczy rozpatrywać $x_0 \geq 0$. Mamy dwa punkty stałe funkcji $f(x) = x^2$. Są to silnie ściągający $x = 0$ i odpychający $x = 1$ o pochodnych odpowiednio 0 i 2. Wszystko co żyje w $[0, 1)$ jest ściągane do 0, a co żyje w $(1, +\infty)$ ucieka do $+\infty$. Jeśli teraz rozszerzymy dziedzinę do $\mathcal{C}$, to mamy gotowy opis zachowania się modułów, widzimy więc, że zbiorami niezmienniczymi są 0, S^1 i $+\infty$. W okolicy S^1 iteracje nie są normalne (nie wybierzemy podciągów zbieżnych jednostajnie).

Mamy do czynienia z kolejnym wzorcem : punkty przyciągające i zbiór niezmienniczy, w otoczeniu którego rodzina iteracji nie jest normalna, taki zbiór nazywa się zbiorem Julii, jest to domknięcie odpychających punktów okresowych.

Prześledźmy teraz dokładniej dynamikę $f(z) = z^2$ na S^1. Wystarczy przypatrywać się argumentom, a dokładniej liczbie ϕ, dla $z = \exp(2\pi i\ \phi)$. Mamy $\phi \mapsto 2\phi$ na okręgu lub 2ϕ mod 1 na odcinku. Dynamika ta jest dość skomplikowana. Zauważmy, że f^n ma wykres złożony z 2^n równoległych kawałków liniowych, zatem f^n ma $2^n - 1$ punktów stałych (0 i 1 są jednym punktem). Mamy więc gęsty zbiór punktów okresowych.

Jeśli zapisać liczby w rozwinięciu dwójkowym, to f działa jak przesunięcie ciągu. Można odtworzyć to kodowanie śledząc, które iteracje danego punktu wpadają do dolnej, a które do górnej połowy odcinka $[0, 1)$. Zauważmy też, że dowolny odcinek A rozciągnie się w skończonym czasie (rzędu $-\ln|A|$) na cały odcinek $[0, 1]$. Można stąd wywnioskować, że zbiór trajektorii gęstych jest topologicznie gruby (przecięcie przeliczalnie wielu zbiorów otwartych i gęstych).

4. Miary niezmiennicze

Iteracje z^2 na okręgu S^1 sprawiają wrażenie chaotyczne, istnieje jednak pewien opis pozwalający zachować zimną krew. Zauważmy, że długość jest niezmiennicza przy braniu przeciwobrazów, bo każdy odcinek ma w przeciwobrazie dwa odcinki dwa razy krótsze. To samo tyczy się wszystkich zbiorów borelowskich, zatem miara Lebesgue'a λ jest niezmiennicza w tym sensie, że $\lambda(f^{-1}A) = \lambda(A)$.

Ponadto, podobnie jak w przypadku zbiorów otwartych, dowolny zbiór miary dodatniej napotka przy iteracjach wprzód dowolny inny ustalony zbiór miary dodatniej. Tę własność nazywamy ergodycznością miary niezmienniczej i z niej wynika, że dla prawie każdego (w sensie tej miary) punktu jego trajektoria odwiedza zadany zbiór z częstością dążącą do miary tego zbioru. (Z tego można otrzymać twierdzenie o liczbach normalnych.)

Zatem nie tylko mamy topologicznie duży zbiór punktów o gęstych trajektoriach, ale jest on pełnej miary i trajektorie rozkładają się równomiernie na całym odcinku.

Miary niezmiennicze stanowią kolejny wzorzec. Co prawda nie wiadomo jak zachowują się poszczególne punkty, ale wiemy jak zachowują się typowe punkty. Pamiętajmy jednak, że wyjątkowych punktów może być wiele.

W tym przypadku punkty okresowe są wyjątkowe. Z drugiej strony jednak ich zachowanie może przybliżać zachowanie typowe. Na przykład miary dyskretne rozłożone na takich punktach dążą (w sensie rozkładu) do miary Lebesgue'a, a zatem trajektorie okresowe o dużych okresach mogą być bardzo skomplikowane. Może to spowodować niewiarygodność symulacji jako narzędzia badawczego. Analogicznie obroty wymierne o wielkich mianownikach przybliżają obroty niewymierne o takich reduktach.

Można tu dodać, że w przypadku $\phi \mapsto 2\phi$ mod 1 mamy do czynienia z mocniejszymi własnościami stochastycznymi miary niezmienniczej niż ergodyczność. Jak widać poprzez kodowanie binarne przekształcenie to modeluje schemat Bernoullego.

Dla porównania przypomnijmy, że obroty również zachowują miarę Lebesgue'a. Jednak obroty wymierne nie są ergodyczne (są zbiory miary dodatniej nie pokrywające w wędrówce całego okręgu), a obroty niewymierne, choć ergodyczne, nie są mieszające (to znaczy zbiory nie są asymptotycznie niezależne).

5. Rodzina $tx^2 - t + 1$

Zrzutujmy $z \mapsto z^2$ z okręgu na oś rzeczywistą. Mamy $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, przy czym $x^2 + y^2 = 1$. Ponadto $Re(z^2) = Re(\bar{z}^2)$, a więc $x \mapsto 2x^2 - 1$ jest dobrze określonym rzutem na $[-1, 1]$. Miara Lebesgue'a z okręgu po zrzutowaniu jest niezmiennicza dla tego przekształcenia, jej gęstość ma osobliwości całkowalne postaci $(1 - x^2)^{-1/2}$.

Poznaliśmy w ten sposób drugiego przedstawiciela rodziny $x \mapsto tx^2 - t + 1$, $x \in [-1, 1]$, $t \in [0, 2]$. Dla $t = 1$, mamy $x \mapsto x^2$, a dla $t = 2$ mamy $x \mapsto 2x^2 - 1$. Jak widzieliśmy dynamiki tych przekształceń są diametralnie różne.
W pierwszym przypadku asymptotyka jest prosta, granice trajektorii i ich baseny (to jest punkty początkowe trajektorii przyciąganych do danego punktu) są łatwe do klasyfikacji. W drugim zaś trajektorie są zagmatwane, niezależne i nadają sie raczej do opisu probabilistycznego niż deterministycznego.

Powstaje więc pytanie, czy jest jakiś wzorzec dla iteracji funkcji z tej rodziny. Zanim odpowiemy przypatrzmy się drugiej iteracji f.

6. Solenoidy

Dla małych $t > 0.5$ stwierdzamy istnienie odcinka pomiędzy punktem stałym $p = f(p) < 1$ i $-p$. Na tym odcinku f^2 jest niezmiennicza i unimodalna (mówimy wtedy o istnieniu renormalizacji). Dla $t > 1{,}8\ldots$ taki odcinek już nie występuje. Można więc wyróżnić podzbiór parametrów t z odcinkiem niezmienniczym dla f^2. Okazuje się, że wewnątrz tego zbioru parametrów istnieje podzbiór, kiedy f^4 ma odcinek niezmienniczy wewnątrz pierwszego odcinka niezmienniczego. Wyróżnianie kolejnych podzbiorów parametrów z kolejnym, zagnieżdżonymi cyklami odcinków niezmienniczych można kontynuować, okresy tych cykli można dobrać dowolnie.

W ten sposób możemy wydzielić parametry, dla których istnieje nieskończony ciąg zagnieżdżonych cykli odcinków, oraz takie, dla których istnieje najmniejszy cykl odcinków niezmienniczych. W pierwszym przypadku cała istotna dynamika skupiona jest na zbiorze Cantora będącym przecięciem wszystkich cykli, zbiór ten zwany jest solenoidem. Ciąg parametrów odpowiadający kaskadzie odcinków niezmienniczych o okresach 2^n daje w granicy solenoid o minimalnym parametrze. Ciąg ten jest asymptotycznie geometryczny o ilorazie będącym uniwersalną stałą dla szerokiej klasy jednoparametrowych rodzin funkcji i takich kaskad. Analogiczny uniwersalizm występuje dla dowolnych okresowych kaskad.

Kiedy nie ma nieskończenie wielu renormalizacji, to typowe trajektorie są gęste w najmniejszym (geometrycznie) cyklu odcinków.

7. Klasyfikacja

Otrzymujemy następującą klasyfikację. Jeśli funkcja kwadratowa ma orbitę okresową przyciągającą (czyli istnieje punkt p i okres n taki, że $f^n(p) = p$ i $|Df^n(p)| < 1$) to typowa (zarówno topologicznie jak i miarowo) orbita jest przyciągana do orbity punktu p (tj. taki jest zbiór punktów skupienia). Zbiór parametrów jest otwarty i gęsty, jednak nie jest pełnej miary. (Przypadek $|Df^n(p)| = 1$ w przypadku parabol również daje atraktor okresowy.)

Własność posiadania atraktora okresowego jest niezmiennikiem topologicznym w szerokiej klasie funkcji.

Jeśli funkcja kwadratowa posiada przeliczalną zagnieżdżoną rodzinę cykli niezmienniczych, to typowa (topologicznie i miarowo) orbita jest przyciągana do solenoidu, gdzie dynamika jest dynamiką maszyny dodającej. Wiadomo, że zbiór takich parametrów jest dla rodziny parabol miary zero, ale ponieważ można realizować dowolne cykle zagnieżdżeń, to jest to zbiór nieprzeliczalny.

W pozostałych przypadkach typowa (topologicznie i miarowo) orbita jest gęsta w najmniejszym cyklu odcinków. Zbiór takich parametrów ma dodatnią miarę Lebesgue'a. Jeśli ograniczymy się do iteracji będącej okresem cyklu najmniejszego odcinka niezmienniczego, to iteracja ta będzie sprzężona z namiotem (tj. funkcją postaci $a \cdot |x| + 1 - a$, tu dla $a > 1$). Jedną z intrygujących zagadek jest zależność parametrów a i t.

Podzbiorem tej klasy są funkcje kwadratowe mające miarę niezmienniczą równoważną mierze Lebesgue'a na najmniejszym cyklu odcinków. Te parametry, dla których istnieje miara, są w tej klasie pełnej miary, ale wiadomo, że istnieją też parametry w tej klasie, dla których nie istnieje skończona miara niezmiennicza (ale istnieje σ-skończona). Istnienie tej ostatniej miary niewiele wnosi do wiedzy o typowej trajektorii, są przykłady, gdy iterowanie miary Diraca na typowym punkcie daje w granicy miarę skupioną na odpychającym punkcie stałym (iterowanie takiej miary przy istnieniu skończonej niezmienniczej miary bezwzględnie ciągłej daje w granicy tę właśnie miarę - wynika to z ergodyczności).

W każdej sytuacji końcowy zbiór graniczny dla każdego parametru jest typowo jeden i ten sam, a jego postać zależy od typu parametru. Zwracam uwagę, że do pojęcia zbioru granicznego podchodzi się indywidualnie, jako do zbioru punktów skupienia trajektorii. Zbiory graniczne na ogół nie mają otoczenia, które w całości przechodzi w siebie i w granicy daje ten zbiór. Ta komfortowa sytuacja występuje tu jedynie dla atraktorów okresowych (skończonych orbit przyciągających).

8. Ogólniejsze przekształcenia odcinka

Czy klasyfikacja dla rodziny parabol jest wzorcem dla gładkich przekształceń odcinka ?

W zasadzie tak, to znaczy we wszystkich interesujących przypadkach można się odwołać do tej klasyfikacji i stwierdzić zgodność lub wymienić jakie warunki tę zgodność wykluczają. W zasadzie też klasyfikacja jest niezmiennikiem topologicznym.

Istnienie miary niezmienniczej równoważnej mierze Lebesgue'a nie jest na ogół niezmiennikiem topologicznym, ale jest tak dla najważniejszej podklasy, tak zwanych przekształceń Colleta–Eckmanna. Przy istnieniu skończonej ciągłej miary niezmienniczej typowe (miarowo) punkty mają jednostajnie wykładniczo rosnące pochodne (są to warunki równoważne). W przypadku przekształceń CE wiemy to (tylko, ale to wystarcza) o specjalnych orbitach (na przykład okresowych). Przekształcenia CE są bardzo częste, zbiór parametrów CE ma miarę dodatnią (przypuszcza się, że pełną wśród przekształceń kwadratowych mających bezwzględnie ciągłą miarę niezmienniczą), wypełnia prawie wszystkie entropie topologiczne (entropie liczy się wykładnikiem wzrostu liczb gałęzi monotoniczności). Są jednak znane przekształcenia z miarą niezmienniczą nie będące CE.

Jeśli ograniczymy się do klasy C^2 i niezdegenerowanych przekształceń unimodalnych, to klasyfikacja pozostaje w znacznej mierze w mocy. W przypadku wielomodalnym następuje rozbicie klasyfikacji na podklasy związane z liczbą niezależnych punktów krytycznych.

Jedynie w trzecim przypadku, jeśli dopuści się większe spłaszczenia punktu krytycznego (tj. zerowanie kilku kolejnych pochodnych), wtedy dojść może do różnych zachowań typowych punktów, zależnie od tego, czy typowość jest topologiczna (wtedy orbity są gęste), czy miarowa (wtedy orbity mogą być zbieżne do pewnego minimalnego zbioru Cantora i nie ma nawet miary σ-skończonej równoważnej mierze Lebesgue'a). Znane są przykłady, gdy na zbiorze granicznym (nigdziegęstym podzbiorze odcinka) dynamikę można modelować za pomocą obrotów niewymiernych na okręgu lub ich analogonów na wyżej wymiarowych torusach.

Często zakładanym dodatkowym warunkiem regularności jest kontrola wypukłości przez narzucenie ujemności pochodnej Schwartza ($f'''/f' - 3(f''/f')^2/2$). Własność ta powoduje rozciąganie metryki Poincaré'go (albo dwustosunku). Dla ogólnych przekształceń gładkich pochodna Schwartza jest ujemna w otoczeniu punktów krytycznych, poza tymi otoczeniami przekształcenia są asymptotycznie rozciągające (w zwykłej metryce). Kombinacja obu typów rozciągań powoduje to, że parabole są dobrymi wzorcami.

Niemniej jednak nie ma jeszcze twierdzenia globalnego mówiącego o całkowitej zgodności klasyfikacji, wykraczającego poza przekształcenia z dodatkowymi własnościami.

Jednym z najważniejszych pozostałych problemów jest pytanie, czy zbiór przekształceń o deterministycznym charakterze asymptotyki, tj. posiadających orbity okresowe przyciągające typowe orbity jest otwarty w topologii C^2.

Powodem, dla którego rozpatrujemy klasę C^2, a nie C^1 jest duża liczba wymyślnych konstrukcji dających nieprzyjemne kontrprzykłady.

W szczególności w C^2 (ale nie w C^1) klasyfikującym niezmiennikiem topologicznym jest wygniotek przekształcenia unimodalnego, to jest ciąg znaków iteracji punktu krytycznego (wynika to ze związków topologii z porządkiem na odcinku). Wygniotek pełni tu rolę liczby obrotu.

9. Kiedy dynamika jednowymiarowa może być wzorcem?

Przypomnijmy, że w przypadku dynamiki na rozmaitościach wielowymiarowych typowe zachowanie jest hiperboliczne. Istnieją wtedy podrozmaitości związane z kierunkami przyciągania i odpychania w otoczeniu elementów krytycznych. Dynamika jest regularna, gdy rozmaitości te są rozłączne lub pokrywają się.

Pierwsza nietypowość następuje, gdy te rozmaitości przecinają się transwersalnie. Okazuje się, że można wykryć istnienie ogromnej liczby takich przecięć, zagęszczających się w otoczeniu punktów krytycznych. Można to modelować najprościej iteracjami namiotu.

Następna nietypowość jest wtedy, kiedy rozmaitości te wyginają się. Możemy otrzymać fałdki, które przecinają się lub stykają tworząc typowo sytuację odpowiadającą lokalnie dynamice jednowymiarowego przekształcenia unimodalnego.

Zauważmy, że zanikanie hiperboliczności występować będzie typowo najpierw dla jednego kierunku własnego Df, stąd kolejność nietypowości związana jest z częstością występowania w klasie przekształceń.