Tekst odczytu zamykającego XX Szkołę Matematyki Poglądowej.

Czy w matematykę trzeba wierzyć?

Marek KORDOS, Warszawa

Pierwszej odpowiedzi na pytanie *co to jest kultura matematyczna* udzielił w połowie –VI wieku Pitagoras (lub – gdyby wierzyć Arystotelesowi, że nikt taki nie istniał – Pitagorejczycy). Odpowiedź ta brzmi: *sens istnienia człowieka polega na poszukiwaniu harmonii, którą się utrzymuje wszystko, nie wyłączając bogów.* Kultura matematyczna zaś to umiejętność skoncentrowania życia wokół tych właśnie poszukiwań, które nazwane zostały wtedy matematyką.

W tym tekście chciałbym zająć się pytaniem, czy owa harmonia – a więc przedmiot matematyki – jest tworem realnym, czy też idealnym. Czy pytanie *co jest matematyką, a co nią nie jest* rozstrzygamy na drodze stosowania racjonalnych kryteriów, czy raczej silnego choć nieuzasadnialnego przekonania. Odwołując się do klasycznych sformułowań: *czucie i wiara*, czy też *szkiełko i oko*?

Idealny, wręcz religijny charakter pitagoreizmu dostrzegano już w Starożytności – choćby wymieniony już Arystoteles. Mówiono o sekcie czy zakonie z Krotony. Znacznie później zwrócono uwagę na fakt zadziwiającej równoczesności podjęcia problemu sensu istnienia przez geograficznie odległe i odseparowane (chyba) kultury.

Po polsku można na ten temat przeczytać refleksje Stefana Kulczyckiego w jego *Z dziejów matematyki greckiej*.

Można w tej równoczesności widzieć interwencję sił nadprzyrodzonych, można wskazywać na nią jako na przykład interwencji kosmitów, ale można też nie szukać nieziemskich inspiracji, a potraktować to zjawisko, jako prawidłowość rozwoju społeczeństw analogiczną do tych, o których pisze się (gdy chodzi o jednostkowy byt człowieka) w podręcznikach psychologii rozwojowej. Po prostu, gdy ludzkość osiągnęła pewien wiek, postawienie przez nią pytania o sens istnienia było naturalnym i koniecznym zjawiskiem.

Do naszych czasów przetrwało pięć zasadniczo różnych odpowiedzi. Cztery z nich pochodzą z Dalekiego Wschodu, co nie powinno dziwić, gdyż tamtejsza cywilizacja jest dużo starsza od naszej. Konfucjusz, działający w Chinach, sens istnienia widział w przestrzeganiu zastanego ładu społecznego. Szczęście i godność jawiły mu się w byciu doskonale sprawną i posłuszną częścią ludzkości. Europejczyk tylko podczas wojny umie ponoć przeżywać spełnienie, gdy przyjdzie mu *paść wśród zawodu, jeżeli poległym swym ciałem da innym szczebel do sławy grodu*, czy też gdy w gromadzie będzie *jak kamienie przez Boga rzucane na szaniec*, żeby cytować romantyków. Trudniej przychodzi nam spełnić się jako mrówka czasu pokoju. Ale ideę konfucjańską jesteśmy w stanie zrozumieć.

K'ung-fu-tsy, postać uznawana za historyczną (–551; –479).

Lao-tsy, działający współcześnie na tych samych terenach, ale w nizinach społecznych (Konfucjusz był mandarynem), głosił najwyższą wartość ludzkiego, własnego, jednostkowego bytu. Życie godziwe to takie, w którym mamy na drodze medytacji dojść do tego, czego naprawdę chcemy i – stwierdziwszy to – wszelkimi siłami i nie oglądając się na nic dążyć do osiągnięcia naszego osobistego celu. To dążenie nazywa się *droga*, *tao*, i stąd nazwa tego światopoglądu – *taoizm*. W Europie nawet ostatnio jest on modny, a w szczególności stanowi podstawę większości praktyk psychoterapeutycznych. Jednostki postępujące tak w praktyce nazywać zwykliśmy silnymi, co świadczy o tym, iż mamy również dla taoizmu zrozumienie.

Lao-tsy, postać raczej mityczna, jej wpływy zaczynają się w –VI wieku.

Podobnie ludowy charakter ma działalność Dżiny (sanskr. *Zwycięzca*). Tu istota człowieczeństwa była zdefiniowana jako świadomość wartości życia – nakaz zachowania go w każdej postaci, zwany *ahinsa*, jest najwyższym, choć każdy przyzna, że niełatwym prawem. To nad sobą mamy odnieść zwycięstwo nie odstępując od tego nakazu. Dziś jego duchowe potomstwo to Greenpeace i inni Zieloni.

Wardhamana Mahavira (Dżina), orędownik pokrzywdzonych (∼ –599; –527).

Najbardziej znany z piątki mędrców niewątpliwie jest Budda (sanskr. *Przebudzony*). Tu sformułowanie głównej cechy człowieczeństwa poprzedza

Siddharta Gautama (Budda), całkowicie historyczny książę (∼ –580; –480).

przerażająca konstatacja – świat jest przykry. A człowieczeństwo polega na tym, by konsekwentnie wyrzec się świata rezygnując ze wszelkich pragnień, gdyż wtedy ani nikt nas, ani my nikogo nie będziemy w stanie skrzywdzić. Ostateczny stan, *nirwana*, to całkowita nieobecność duchowa na ziemskim padole.

I wreszcie Pitagoras. Pomysł, że człowieczeństwo to możliwość zrozumienia ładu, jaki utrzymuje homeostazę Wszechświata, jest o tyle rewelacyjny, iż wskazuje na myśl, jako na podstawowy atrybut ludzkości.

Zauważmy w tej wyliczance dość zaskakujący fakt: żaden z pięciu mędrców owych czasów nie umieścił w swojej doktrynie etycznej Boga. A przecież każdy z nich miał styczność z systemami mono- bądź politeistycznymi. Wskazuje to na odrębność poszukiwań istoty człowieczeństwa od problematyki religijnej – dziś rzecz właściwie niewyobrażalna. Z drugiej jednak strony, mimo braku pojęcia Boga, np. o buddyzmie mówimy dziś jako o religii. Stąd pytanie o racjonalny, bądź idealny, charakter doktryny pitagorejskiej jest ostre i nie ma oczywistej odpowiedzi.

Problematyka *racjonalny–idealny* jest w ogóle trudna, żeby nie powiedzieć zbyt trudna, do rozważania. Pierwsze bodaj dojrzałe dzieło na ten temat, *Summa Teologiae* Tomasza z Akwinu, przez ponad pół tysiąclecia nie mogło trafić do przekonania praktycznie żadnym szafarzom prawd i dopiero w 1879 roku zostało przez Leona XIII uznane za oficjalną filozofię Kościoła. Ale były to czasy tak wielkiego triumfu wieku pary i elektryczności (a i o Komunie Paryskiej nie warto zapomnieć), że zaczął się okres, gdy nawet prawdy wiary i cuda zaczęto próbować wyjaśniać materialistycznie. Do dziś zresztą funkcjonują komisje naukowe stawiające sobie za cel badanie nie tylko Całunu Turyńskiego, ale też wszystkich zarejestrowanych cudownych zdarzeń. Nie jest to żaden autorytet naukowy, ale na *signum temporis* się nadaje: Jan Dobraczyński, pisarz niewątpliwie katolicki, w *Pustyni* wyjaśnił całkowicie materialistycznie wszystkie cuda Mojżesza – można odnieść wrażenie, że za cud dzisiaj uznaje się tylko te zjawiska, które dadzą się uzasadnić bez żadnego cudu. Tutaj będę się starał odpowiedzieć na pytanie o racjonalność czy idealność matematyki szukając odpowiedzi jedynie w działaniach i wypowiedziach ludzi ją tworzących i stosujących ją. I może od razu powiem, co moim zdaniem „wychodzi":
RACJONALNOŚĆ MATEMATYKI NIE DAJE SIĘ OBRONIĆ.
Jej historia to również dzieje kolejnych niepowodzeń w dowodzeniu jej racjonalności.

Pierwszym historycznie narzędziem służącym do opisu i badania harmonii były liczby naturalne i ich stosunki, czyli liczby wymierne dodatnie. Nikt nie powątpiewał w ich racjonalność – pochodziły przecież z liczenia baranów i podobnych czynności. Istnienia Gödla nikt nawet nie podejrzewał. Okazało się jednak, że również przy założeniu racjonalności liczb naturalnych racjonalność matematyki nie dawała się obronić – odkryto wielkości niewymierne. Te wymagały już zupełnie innego podejścia – nie były wzięte z oczywistego oglądu, dostęp do nich był czysto intelektualny, czyli duchowy.

Irracjonalizm rzeczywistości stał się modną doktryną. Do dziś znamy eleackie aporie: o strzale, Achilesie i żółwiu, stadionie itd. Nie są to przecież dowody sprzeczności świata, a tylko wskazują na konieczność oparcia jego opisu o całkowicie nierealistyczne koncepcje. Na matematykach tamtych czasów Zenon i jego koledzy wymuszali tertulianowskie wyznanie *credo, quia absurdum* w odniesieniu do ich rozważań o liczbach i figurach.

To zaproszenie do fideizmu w matematyce trwało stulecie. Z perspektywy dziejów to mało, ale są to przecież aż cztery pokolenia. Zaowocowało na trzy sposoby. Po pierwsze matematyka zyskała idealistyczne podstawy. Usiedliśmy po raz pierwszy plecami do wyjścia pieczary i z cieni igrających na jej ścianie odtwarzaliśmy dla siebie prawdziwy, idealny świat na zewnątrz niej – taka była matematyka według Platona.

Jednak uczniowie już pierwszej edycji platońskiej Akademii uratowali dla nas racjonalny charakter matematyki. Pokazali, jak w sposób naturalny z tak właśnie nazywających się i tak odbieranych liczb można skonstruować liczby rzeczywiste. Teaitetos zrobił to za pomocą ułamków łańcuchowych, Eudoksos – za pomocą przekrojów liczb rzeczywistych. Ten właśnie sposób służy matematyce przez 2400 lat, ostatnio tylko (w tej skali czasowej) nieco ulepszony przez Richarda Dedekinda. Ongiś taki stan rzeczy natychmiast zaowocował dwoma tytanami matematyki: powstały *Elementy* Euklidesa i rozliczne dzieła Archimedesa.

I jakby w cieniu został sformułowany pogląd kolejnego geniusza z platońskiej Akademii, Arystotelesa. Problemy charakteru pojęć i badań matematyki przesuwał on wyraźnie poza zakres zainteresowania większości uczonych. Matematyka miała być jedynie językiem opisu zjawisk natury. Nikt zaś rozsądny w tamtych czasach nie zawracał sobie głowy epistomologicznymi i ontologicznymi problemami języka.

Skuteczna obrona racjonalności matematyki i równoczesne niemal uznanie bezprzedmiotowości tej obrony stanowiłyby bardzo ciekawe pole do intelektualnego starcia. Tymczasem jednak nastąpiły starcia zbrojne, które starły z powierzchni Ziemi tak Grecję, jak i twórczo uprawianą matematykę. Epoka imperium rzymskiego i czasy konfrontacji chrześcijańsko – muzułmańskiej na ponad półtora tysiąclecia całą wiedzę, a w szczególności matematykę, ograniczyły do jej potocznie dostępnej pragmatycznej warstwy. Potrzebne w praktyce przepisy przekazywano z pokolenia na pokolenie, ich zaś pochodzenie interesowało tylko bardzo nielicznych epigonów dawnej intelektualnej świetności. Pitagoreizm *de facto* stracił zwolenników.

W tej sytuacji w Europie, gdy wreszcie zaczęła się dźwigać z ruin, jakie po sobie pozostawił upadek cesarstwa rzymskiego, podejście arystotelesowskie stało się naturalne, matematyka stała się jedynie narzędziem. Badania zaś językowe scholastyków ledwie starczały na potrzeby logiki formalnej. Również tam, gdzie wtedy było lepiej, nie chciano matematyki potraktować na sposób pitagorejski. Indyjsko – arabska koncepcja matematyki to traktowanie jej jako znakomitego trenażera dla wyrabiania giętkości umysłu. A nikt przecież nie usiłuje doszukiwać się istotnych relacji między nawet tak wspaniałą grą, jak szachy, a realną bądź idealną rzeczywistością.

Pitagoreizm, wiara w to, że matematyka bada jakieś podstawowe prawdy, zaistniał ponownie, gdy Europa zaczęła porządkować swoje sprawy w XVI wieku. Pitagoreizm stał się, szczególnie w czasach reformacji i kontrreformacji, bardzo pożądanym azylem intelektualnym, która to potrzeba jest dla nas, żyjących w społeczeństwie przepołowionym przez różnice ideologiczne, jak najbardziej zrozumiała. Jego ówczesna wersja nazywała się panteizm i była, zgodnie z tą nazwą, utożsamieniem Boga z pitagorejską harmonią. W ten sposób katolik Kochanowski mógł mieć te same poglądy, co protestant Kepler. Ten ostatni mówił dosłownie: *Bóg jest matematykiem* i wierzył, że uprawiając matematykę poznaje się lepiej i Boga i siebie. Matematyka znów stała się poszukiwaniem prawdy absolutnej. Tak absolutnej, że nawet okrutne wojny XVI i XVII wieku nie były w stanie jej rozszczepić.

Johannes Kepler (1571; 1630), twórca obecnie obowiązującego modelu naszego układu planetarnego.

Jest rzeczą interesującą, że ten etap myślenia o matematyce został podsumowany przez człowieka całkowicie aideologicznego, entuzjastycznie przystającego przez całe życie do wygrywającego akurat obozu – mianowicie Laplace'a. Jeszcze ciekawszy jest fakt, że ewolucja myślenia o matematyce w ciągu XVII i XVIII wieku kompletnie przekształciła jej początkowo idealny charakter na brutalnie realny. Podstawowym sposobem myślenia o matematyce w XIX wieku był determinizm podparty probabilistyką.

Pierre Simon Laplace (1749; 1827), ekspert wszystkich rządów, jakie za jego życia władały Francją, choć było ich wiele i były skrajnie różnorodne.

W swojej *Mechanice nieba* (1799-1825) Laplace stwierdza, że – mówiąc językiem dzisiejszym – gdyby mieć dostatecznie obszerną bazę danych z natychmiastowym do niej dostępem i dostateczną moc obliczeniową, możnaby na drodze rachunkowej poznać wszystkie szczegóły przeszłości i przyszłości. I matematyka to właśnie teoria takiego urządzenia.

Probabilistyka pełni tu rolę protezy wiedzy. W swojej *Rachunkowej teorii prawdopodobieństwa* (1812) Laplace stwierdza, że tam, gdzie nie sięgają jeszcze precyzyjne narzędzia nauki, należy zamiast wiedzy pewnej stosować wiedzę przybliżoną, tak jak w technice zaczęto wówczas stosować *wzory kolejowe* (miano to – używane do dziś – noszą wzory empiryczne; nazwa pochodzi stąd, że bujny rozwój kolejnictwa spowodował, iż obsługujący go technicy musieli rozwiązywać szereg problemów – np. ze statyki nasypów, czy naprężeń belek – do których teoria dojść miała znacznie później). Utwierdziło to na stulecie traktowanie probabilistyki jako dyscypliny pozamatematycznej – matematyka wszak daje wiedzę pewną.

Taki mechaniczno-probabilistyczny model wiedzy wyraźnie sugerował, iż matematyka może być wywiedziona z realności. A jak na złość pogląd ten został natychmiast wystawiony na ciężką próbę. Otóż matematycy stanęli przed intelektualną koniecznością uznania istnienia geometrii nieeuklidesowych, a więc istnienia dwu wykluczających się, choć matematycznie pewnych, opisów realnej przestrzeni. I tak powstała dyscyplina zwana podstawami matematyki. Matematycy zlecili samym sobie rozstrzygnięcie pytań: *czym są, w jaki sposób istnieją obiekty, o których wypowiada się matematyka?* oraz *jak poznajemy matematyczne prawdy?*.

Początkowo jedynie geometryczny charakter takich pytań (zresztą i odpowiedzi) okazał się przypadkowy – odkryta 120 lat temu teoria mnogości dostarczyła tylu pojęciowych kłopotów, że niebawem podstawy matematyki zaczęły być kojarzone przede wszystkim z jej problemami.

Mniej więcej osiemdziesięcioletnie istnienie tej dyscypliny dostarczyło matematykom mocnych przeżyć.

Wymyślono przede wszystkim pojęcie, bez którego matematyka przez tysiąclecia się obywała – teorię matematyczną. Były, o dziwo, aż dwa pomysły na ten temat. Pierwszy, autorstwa Felixa Kleina z 1872 roku mówił, że teoria to para: ⟨zbiór, grupa⟩, przy czym grupa ma być podgrupą bijekcji tego zbioru – dziś śladem po istnieniu takiego pomysłu jest to, co w starszych podręcznikach geometrii nazywa się Programem Erlangeńskim, oraz metoda niezmienników stosowana w każdej problematyce matematycznej od zadań olimpijskich poczynając.

To, co zostało powszechnie przyjęte, to pomysł Moritza Pascha z 1882 roku – teoria to kolekcja pewnych napisów. Wszyscy zostaliśmy wykształceni na takim pojęciu teorii, więc mogę nie opowiadać szczegółów. Dość, że na teorię składają się specjalne napisy zwane zdaniami – ich zbiór nazywa się teorią, gdy jest zamknięty ze względu na (też zresztą zdefiniowaną) operację wyciągania wniosków. Twór taki jest naogół przedziwny, więc narzucono na teorie matematyczne ostre, ale zrozumiałe kanony przyzwoitości. Chciano więc, by teoria

była elementarna (obywała się bez kwantyfikowania zbiorów),
była niesprzeczna (co oznacza, że z dwóch zdań przeciwnych do niej należy co najwyżej jedno),
była zupełna (co oznacza, że z dwóch zdań przeciwnych do niej należy co najmniej jedno),
była kategoryczna (co oznacza, że wszystkie jej modele są izomorficzne),
była rozstrzygalna (co oznacza, że istnieje algorytm, który w skończonej liczbie kroków orzeka, czy dane zdanie należy do tej teorii),
była aksjomatyzowalna (co oznacza, że cała teoria jest zbiorem wniosków ze skończonego zbioru zdań).

Stworzenie z całej, istniejącej przecież niezależnie od tych pomysłów, matematyki zbioru porządnych w powyższym sensie teorii nazwane zostało – dla propagatora tej idei – programem Hilberta. Skierowano na jego realizację znaczną część potencjału naukowego matematyki. I jeszcze przed drugą wojną światową wiedziano, dzięki pracom Gödla, Skolema, Löwenheima i wielu innych, że porządnych, a znaczących teorii matematycznych po prostu nie ma.

Zajęto się więc nowym kierunkiem podstaw matematyki – badaniem teorii zbudowanych z nieograniczonym udziałem teorii mnogości, co nazywa się teorią modeli. Ten nurt znalazł swój kres w latach sześćdziesiątych naszego stulecia. Jeśli bowiem mamy opierać swoje działania na teorii mnogości, to byłoby niegłupio wiedzieć, jaka ta teoria jest. W szczególności dwa były fundamentalne pytania, na które szukano odpowiedzi: ***hipoteza continuum*** (a więc pytanie o istnienie zbioru mającego więcej elementów od zbioru liczb naturalnych, ale mniej od zbioru liczb rzeczywistych) i ***problem pewnika wyboru*** (a więc czy dla dowolnej rodziny zbiorów można utworzyć selektor – zbiór mający z każdym z danych zbiorów jeden element wspólny). Wynik Paula Cohena z 1962 roku mówiący, że oba te zdania mają status aksjomatu, a więc są prawdziwe lub nie zgodnie z naszym zamówieniem, został odebrany, jako wielkie zatrzaśnięcie nam drzwi przed nosem. I nie szło tu nawet o to, że każda z tych możliwości niesie za sobą matematyczne konsekwencje co najmniej krępujące, takie jak paradoksalny rozkład kuli, czy nierównoważność definicji ciągłości Heinego i Cauchy'ego. Chodzi o to, że na pytanie, co leży u podstaw matematyki odpowiedź jest: nasza własna wolna wola lub głęboka wiara.

Młodszym z kolegów niesposób dziś uwierzyć, że kiedyś (nie tak dawno temu, jeszcze czterdzieści lat nie minęło) problematyka podstaw matematyki była na samym szczycie matematycznej mody i budziła szacunek dla swoich sług. Dziś tej problematyki nie ma, jej czciciele stali się dziś w przeważającej części badaczami *computer science*. Dziś tak dalece odwracamy się od ontologicznych i epistemologicznych problemów matematyki, że nie umielibyśmy odpowiedzieć, jakie widmo filozoficznego aspektu matematyki konstruujemy w duszyczkach naszych uczniów. Jedyność poglądów stała się tak wielka, że łudząco przypomina ich brak.

A dziś myśli się o matematyce tak. W wielkiej dżungli teorii mnogości żyją przeróżne matematyczne stwory i żyjemy także my matematycy. Wędrujemy przez gąszcze i napotykamy to lub owo, wpadamy w wykrot, topimy się w grzęzawisku, huśtamy na lianach, uciekamy przez jakimś potworem, podglądamy życie gniazd, łowimy w potoku zwinne fraktale, ubijamy i pieczemy na ognisku smakowite atraktory. Niektórzy z nas zabrnęli w ostępy, gdzie najstarsze stwory nigdy nie widziały pewnika wyboru, a o hipotezie continuum nawet nie słyszały, inni galopują po sawannach przestrzeni Banacha, słowem wiedzie się nam różnie. Ale szczególną cechą takiego życia jest jedno – ta cała nasza nisza ekologiczna jest dla profanów jak czarna dziura: nie daje się jej w żaden sposób zobaczyć i – nie łudźmy się: do większości żaden promień z jej wnętrza nigdy nie dociera.

Model jest jasny. Wprawiamy siebie i swoich uczniów w pewnego rodzaju mistyczny sen, w którym przeżywamy nasze matematyczne sukcesy, porażki, odkrycia i rozczarowania. I można by to nawet prześladować, jako zbiorową hipnozę, czy wręcz narkotyzowanie się, gdyby nie jedno, co budzi w pospólstwie zabobonny lęk:
zdumiewająca i niewytłumaczalna stosowalność matematyki.
Przytoczmy tu opinię fizyka noblisty, Eugena Paula Wignera:
To czarodziejski dar, którego nie rozumiemy i na który nie zasłużyliśmy. Możemy tylko błogosławić za niego los i mieć nadzieję, że również w przyszłości będziemy mogli, jak dotąd, z niego korzystać.
Ale przecież silna wiara, taka, jak nasza wiara w matematykę, *którą się utrzymuje wszystko, nie wyłączając bogów*, jak mówili nasi koledzy przed dwu i pół tysiącem lat, taka wiara winna być nagradzana. I jest.