Osiem

(czyli poszukiwanie szansy)

Krzysztof OMILJANOWSKI, Wrocław

Wielokrotnie na łamach *Matematyki* (por. spis literatury) dyskutowano problem *Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej spośród wszystkich liczb naturalnych?* Poniżej przedstawiam co i jak z tej dyskusji próbowałem powiedzieć uczniom. Starałem się używać możliwie prostego języka matematycznego: rozdział pierwszy nie wymaga właściwie żadnych wiadomości poza znajomością rozwinięć dziesiętnych (+ intuicja przejścia granicznego), w rozdziale drugim konieczna jest znajomość ciągów geometrycznych i pojęcia granicy, a w rozdziale trzecim – znajomość pochodnej (i ewentualnie całki oznaczonej).

I. MANOWCE INTUICJI (czyli gdzie jest problem?)

Zadając uczniom pytanie:

Słowa **szansa** używam z premedytacją; nie tylko dlatego, że jest krótsze niż słowo **prawdopodobieństwo**.

Jaka jest szansa wylosowania liczby parzystej spośród wszystkich liczb naturalnych?

prawdopodobnie zobaczycie wzruszenie ramion i zdziwienie na twarzach; „przecież to oczywiste, że 1/2!?" – odpowiedzą niektórzy, a inni będą węszyć jakiś podstęp (przyzwyczajeni, niestety, że na matmie nie ma rzeczy oczywistych). Potwierdźcie to słowami „(w zasadzie) tak". Gdy następnie zapytacie o szansę wylosowania liczby naturalnej, dla której reszta z dzielenie przez 6 wynosi 5, to po chwili zapewne stwierdzą: „1/6". Teraz spróbujmy rozważyć następujący problem:

$\boxed{\text{\textit{Jaka jest szansa wylosowania liczby naturalnej zaczynającej się cyfrą 8?}}}$

Mimo intuicyjnie oczywistej odpowiedzi: 1/9, namów uczniów do zrobienia następującej prostej tabeli (gdy wypełnisz pierwsze dwa wiersze, uczniowie na pewno podpowiedzą co wpisywać w dalszych).

Przyjmijmy na chwilę, że <u>0 jest liczbą naturalną</u> – tak będzie wygodniej.

wśród liczb:	szukanymi są:	jest ich:	szansa wylosowania:
0–9 (jednocyfrowych)	8	1	0,1
0–99 (jedno- i dwucyfrowych)	8, 80, 81, 82,. . . ,89	11	0,11
0–999 (co najwyżej trzycyfrowych)	8, 80, 81, 82,. . . ,89, 800, 801,. . . ,899	111	0,111
0–9999 (co najwyżej czterocyfrowych)	8, 80, 81, 82,. . . ,89, 800, 801,. . . ,899, 8000, 8001,. . . ,8999	1111	0,1111
. . .	. . .	. . .	. . .

Tabela potwierdza wcześniejsze przypuszczenie; liczby z ostatniej kolumny są coraz bliższe 0,111. . . (nieskończenie wiele jedynek); nieufni zobaczą na kalkulatorze wynik dzielenia 1 przez 9 – wtedy oczywiście zaakceptują odpowiedź.

Jednak nie rozwodźmy się nad tym za długo – główny cel zajęć jest jeszcze przed nami. Zacznijmy robić inne zestawienie:

wśród liczb:	szukanymi są:	jest ich:	szansa wylosowania:
0–8	8	1	1/9
0–89	8, 80, 81, 82,...,89	11	11/90
0–899	8, 80, 81, 82,...,89, 800, 801,...,899	111	111/900
0–8999	8, 80, 81, 82,...,89, 800, 801,...,899, 8000, 8001,...,8999	1111	1111/9000
...	...	...	...

DYGRESJA:
Kalkulator pokazuje: $\frac{10}{81} = 0{,}12345679$. Zastanawiające?! (porównaj [3], rozdział II.6).
– Czy to jest całe rozwinięcie dziesiętne? Oczywiście NIE!
– Jakie są następne cyfry? Mój kalkulator pokazuje: 0,1234567901235. Pokaż, że rozwinięciem dziesiętnym tego ułamka jest 0,(123456790).
– Czy to zbieg okoliczności, że zajmując się liczbami zaczynającymi się cyfrą 8 otrzymaliśmy liczbę o rozwinięciu złożonym z kolejnych cyfr z wyjątkiem 8? TAK. Dla liczb zaczynających się cyfrą 7 już nie jest tak ładnie. Sprawdź to.

Teraz liczby z ostatniej kolumny zbliżają się do $\frac{10}{81}$ bowiem:

$$\frac{1}{9} = \frac{10}{9} \cdot 0{,}1,$$
$$\frac{11}{90} = \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{100} = \frac{10}{9} \cdot 0{,}11,$$
$$\frac{111}{900} = \frac{10}{9} \cdot \frac{111}{1000} = \frac{10}{9} \cdot 0{,}111,$$
$$\frac{1111}{9000} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1111}{10000} = \frac{10}{9} \cdot 0{,}1111,$$
$$\ldots,$$
$$\frac{10}{9} \cdot 0{,}111\ldots = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{81}$$

Pora teraz na prawdziwe zdziwienie! Dwa sposoby liczenia dają różne wyniki! Nim się nad tym głębiej zastanowimy zróbmy jeszcze trzecie zestawienie:

wśród liczb:	szukanymi są:	jest ich:	szansa wylosowania:
0–7		0	0/8
0–79	8	1	1/80
0–799	8, 80, 81, 82,...,89	11	11/800
0–7999	8, 80, 81, 82,...,89, 800, 801,...,899	111	111/8000
...	...	...	...

Tym razem liczby z ostatniej kolumny zbliżają się do $\frac{1}{72}$ (łatwo to zobaczyć postępując podobnie jak w poprzednim przypadku).

Jaki morał wynika z tych rachunków? Szansa zależy od sposobu zliczania?!

Musimy stwierdzić, <u>że przy takim sposobie rozumowania</u> **nie istnieje <u>liczba</u> wyrażająca szansę wylosowania liczby zaczynającej się cyfrą 8.**

Co to był za „sposób rozumowania"? Ano żywiliśmy nadzieję, że zliczane szanse (liczba mnoga!) w coraz to większych, ale <u>skończonych</u> zbiorach będą oscylować wokół jakiejś jednej liczby – jednak tak nie jest! (Uściślijmy jeszcze: w tych skończonych zbiorach $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ każda z liczb miała jednakową szansę wylosowania $= 1/n$.)

DYGRESJA:
Poniżej zebrane są szanse minimalne i maksymalne (obliczane analogicznie jak w trzeciej i drugiej tabeli) wylosowania liczb zaczynających się ustaloną cyfrą m spośród wszystkich liczb naturalnych:

m	szansa minimalna	szansa maksymalna
1	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2}$
2	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{3}$
3	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{4}$
4	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{5}$
...	...	...

widać zatem, że ogólnie:

m	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{m+1}$

Warto zwrócić uwagę na dysproporcje przy $m = 1$ i $m = 9$.

Każdy zgodzi się z tym, że zliczanie w drugiej tabeli dawało maksymalny wynik (nazwijmy go szansą maksymalną), a w trzeciej – minimalny (minimalną szansę). Można więc przyjąć obie te liczby jako pewien opis szansy. Nietrudno sprawdzić, że w problemie wylosowania liczby parzystej obie te wielkości są równe 1/2, a w problemie wylosowania liczby dającej resztę 5 z dzielenia przez 6 obie są równe 1/6 (zgodnie z intuicją). W tym ostatnim przypadku wynika to z prostych nierówności:

(wracamy do typowej konwencji: liczby naturalne to 1,2,3,...; bez zera!)

gdy $n = 6k + i$, to w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ szansa wylosowania liczby dającej resztę 5 jest zawarta pomiędzy liczbami: $\frac{k}{n} = \frac{k}{6k+i}$ i $\frac{k+1}{n} = \frac{k+1}{6k+i}$, które dla coraz większych n, obie zbliżają się do $\frac{1}{6}$.

UWAGI („tylko dla dorosłych"): W formalnym języku, posługując się pojęciem gęstości (por. [5]), rozważania tego rozdziału można zamknąć w jednym zdaniu:

Zbiór liczb naturalnych zaczynających się cyfrą 8 nie ma gęstości.

Naturalnie można zapytać: dlaczego rozważana jest tutaj gęstość zamiast prawdopodobieństwa, dlaczego używane jest enigmatyczne sformułowanie „szansa"? Dlaczego nie zacząć, tak jak uczymy w szkole, od określenia przestrzeni zdarzeń elementarnych czyli w tym przypadku $\Omega = N$? Dlaczego, po prostu, nie policzyć prawdopodobieństwo zdarzenia $\{8, 80, 81, \ldots, 89, 800, \ldots\}$?

Tak „po prostu" to się nie da zrobić. Mianowicie gdy rozważamy zadania o rzucie kostką, to naturalnie przyjmujemy, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne (tyle oznacza termin kostka symetryczna) – w naszym przypadku, gdy Ω jest zbiorem przeliczalnym, oznaczałoby to, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego (Ω) jest równe nieskończonej sumie $\sum s$, czyli 0 gdy $s = 0$ lub ∞ gdy $s > 0$; zatem wiedzie to do sprzeczności (przy założeniu przeliczalnej addytywności prawdopodobieństwa). Zatem należałoby określić prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych niejednakowo, ale jak? W zadaniach o fałszywej kostce czy monecie odwołujemy się do empirii, do rzeczywistości, tu pozostajemy w świecie abstrakcji; nie można przeprowadzić eksperymentu, nie można „rzucać kostką o nieskończenie wielu ścianach". Trzeba zatem przyjąć arbitralnie: prawdopodobieństwo wylosowania liczby n jest równe s_n przy czym $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = 1$. By miało to jakiś związek z „rzeczywistością", wydaje się naturalne zakładać, że prawdopodobieństwa wylosowania coraz większych liczb są coraz mniejsze, oraz że prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej jest takie same jak liczby nieparzystej, tj.

$$s_1 > s_2 > s_3 > \ldots \quad \text{i} \quad s_2 + s_4 + s_6 + \ldots = s_1 + s_3 + s_5 + \ldots.$$

Okazuje się, że to też jest niemożliwe!
(Jeśli $s_1 > s_2 > s_3 > \ldots$, to $s_2 + s_4 + s_6 + \ldots < s_1 + s_3 + s_5 + \ldots$).

W dalszych rozdziałach będziemy „poszukiwać szansy", tzn. będziemy poszukiwać takiego pojęcia (wiemy już, że nie może to być „zwykłe" prawdopodobieństwo), które będzie zgodne z intuicjami, czyli: **postulujemy, by szansa wylosowania liczby parzystej była taka sama jak liczby nieparzystej.**

II. IM DALEJ, TYM MNIEJSZE SZANSE

Każdy się zgodzi, że „często można spotkać" liczby 2, 17, 131, natomiast 78930274, czy 8105428751 – dużo rzadziej. Spróbujmy więc przypisać każdej liczbie naturalnej n szansę jej wylosowania s_n w taki sposób, by dla coraz większych n były to coraz mniejsze wartości. Ponadto szanse te oczywiście powinny sumować się do 1.

Jak określić s_n? Spróbujmy – na początek – przyjąć

$$s_n = \frac{1}{2^n}.$$

Są to wyrazy szeregu geometrycznego o sumie 1 – jednak trudno to uznać za właściwe, bowiem przy takim określeniu szansa wylosowania liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ wynosi aż $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0{,}9375$, a przecież 5 i liczby większe nie są aż taką rzadkością; kłóci się to ze zdrowym rozsądkiem. W dodatku przy takim ujęciu (licząc według znanego wzoru)

$$\text{szansa wylosowania liczby parzystej} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots = \frac{1}{2^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{3}$$

jest różna od szansy wylosowania liczby nieparzystej (=2/3).

Wartości s_n dla początkowych n są za duże (w stosunku do pozostałych). Spróbujmy temu jakoś zaradzić przypisując wartości innego ciągu geometrycznego. Ogólnie dla $q \in (0, 1)$ mamy:

$$q^1 + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{q}{1 - q},$$

zatem trzeba przyjąć $s_n = \frac{q^n}{\frac{q}{1-q}} = q^{n-1} - q^n$ (by wyrazy te sumowały się do 1).

Dla q bliskich 1 (ale mniejszych od 1) wartości s_1, s_2, s_3 są małe i mało się od siebie różnią; przykładowo dla $q = 0{,}9$ mamy $s_1 = (0{,}9)^0 - (0{,}9)^1 = 0{,}1$,

$s_2 = (0{,}9)^1 - (0{,}9)^2 = 0{,}09$, $s_3 = 0{,}081$. Dla $q = 0{,}99$ dysproporcje są jeszcze mniejsze.

Ogólnie

$$\text{szansa wylosowania liczby parzystej} =$$

$$= \frac{q^2}{\frac{q}{1-q}} + \frac{q^4}{\frac{q}{1-q}} + \frac{q^6}{\frac{q}{1-q}} + \ldots = \frac{1-q}{q}\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{q}{1+q} = 1 - \frac{1}{1+q},$$

co

dla $q = 0{,}9$ daje $1 - \dfrac{1}{1+0{,}9} = 0{,}47368\ldots$,

dla $q = 0{,}99$ daje $1 - \dfrac{1}{1+0{,}99} = 0{,}49749\ldots$,

dla $q = 0{,}999$ daje $1 - \dfrac{1}{1+0{,}999} = 0{,}49975\ldots$.

Widać więc, że są to wartości coraz to bliższe 1/2 – prawie tak jak podpowiada intuicja.

Wyliczmy jeszcze szanse wylosowania liczby, której reszta z dzielenia przez 6 jest równa 5:

$$\frac{q^5}{\frac{q}{1-q}} + \frac{q^{11}}{\frac{q}{1-q}} + \frac{q^{17}}{\frac{q}{1-q}} + \frac{q^{23}}{\frac{q}{1-q}} + \ldots = \frac{1-q}{q}\frac{q^5}{1-q^6} =$$

$$= q^4\frac{1-q}{1-q^6} = \frac{q^4}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}$$

Używając kalkulatora (do przedostatniego wyrażenia w powyższym zapisie):

dla $q = 0{,}9$ otrzymujemy $(0{,}9)^4\dfrac{1-0{,}9}{1-(0{,}9)^6} = 0{,}14003\ldots$,

dla $q = 0{,}99$ otrzymujemy $(0{,}99)^4\dfrac{1-0{,}99}{1-(0{,}99)^6} = 0{,}16415\ldots$,

dla $q = 0{,}999$ otrzymujemy $(0{,}999)^4\dfrac{1-0{,}999}{1-(0{,}999)^6} = 0{,}16642\ldots$,

dla $q = 0{,}9999$ otrzymujemy $(0{,}9999)^4\dfrac{1-0{,}9999}{1-(0{,}9999)^6} = 0{,}16664\ldots$.

Widać więc, że są to wartości coraz bliższe $\dfrac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$ (nieskończenie wiele szóstek) co również łatwo obliczyć z ostatniego wyrażenia:

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{q^4}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5} = \frac{\lim\limits_{q\to 1^-} q^4}{\lim\limits_{q\to 1^-}(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)} = \frac{1}{6}$$

Powyższe rozważania dają więc nowy pomysł obliczania szansy wylosowania liczby z pewnego zbioru $A = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ losując spośród wszystkich liczb naturalnych (zbiór A może być skończony lub nie; zakładamy, że jego elementy $n_1, n_2, n_3, \ldots$ są wypisane bez powtórzeń). Należy postępować według następującego schematu:

– najpierw przyjmujemy, że $s_n = q^{n-1} - q^n$ (przy ustalonym q, $0 < q < 1$);
– obliczamy sumę $s_{n_1} + s_{n_2} + s_{n_3} + \ldots$; oznaczmy ją symbolem $p_q(A)$;
– na koniec szukamy liczby wokół której skupiają się wartości $p_q(A)$ dla q coraz bliższych jedynce; formalnie – liczymy granicę $\lim\limits_{q\to 1^-} p_q(A)$.

Nie jest przy tym wcale jasne, czy ten sposób postępowania zawsze prowadzi do „sukcesu"; na przykład nie wiemy, czy dla każdego zbioru A istnieje ta granica. Może dla $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ i dla $A = \{5, 11, 17, 23, \ldots\}$ wyjątkowo się nam udało?

Spróbujmy zatem zastosować opisaną procedurę do zbioru liczb zaczynających się cyfrą 8:

$$A = \{8, 80, 81, \ldots, 89, 800, 801, 899, \ldots\}.$$

Trzeba obliczyć sumę

$$s_8 + s_{80} + s_{81} + \ldots + s_{89} + s_{800} + s_{801} + \ldots + s_{899} + \ldots$$

to znaczy

$$(q^7 - q^8) + (q^{79} - q^{80}) + (q^{80} - q^{81}) + \ldots$$
$$\ldots + (q^{88} - q^{89}) + (q^{799} - q^{800}) + (q^{800} - q^{801}) + \ldots + (q^{898} - q^{899}) + \ldots$$

Można pokazać (poprzez dość żmudne rachunki), że nie istnieje granica tego wyrażenia przy q dążącym do 1^-; szczegóły tu pomijamy.

co można zapisać jako

$$q^7 - q^8 + q^{79} - q^{89} + q^{799} - q^{899} + \ldots$$

lub

$$\frac{1}{q}\left(q^8(1-q) + (q^{10})^8(1-q^{10}) + (q^{100})^8(1-q^{100}) + \ldots\right)$$

Niestety nie widać jednak żadnego „ładnego” wzoru, który pozwoliłby nam pozbyć się tych trzech kropek, bo jak inaczej porachować granicę tego wyrażenia przy q dążącym do 1? Utknęliśmy w martwym punkcie.

Rozważania zawarte w tym rozdziale również nie pozwoliły nam odpowiedzieć na główne pytanie tego tekstu: *Jaka jest szansa wylosowania liczby naturalnej zaczynającej się cyfrą 8?*

III. MODYFIKACJA (czyli niekoniecznie ciąg geometryczny)

Teraz schemat postępowania będzie podobny do opisanego w poprzednim rozdziale, jednak z pewnymi zmianami. Na początek inaczej określimy wartości s_n. Pozwoli to przebrnąć przez kłopoty rachunkowe, które napotkaliśmy przed chwilą.

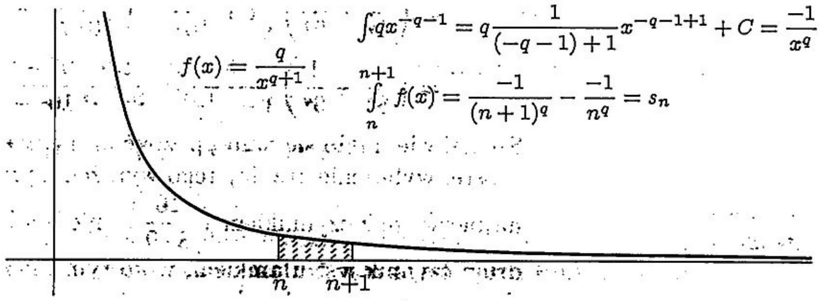
Niech przy ustalonym $q > 0$ szanse wylosowania poszczególnych liczb naturalnych mają wartości

$$s_n = \frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}.$$

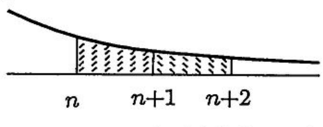
Dla $n = 1$ jest to $\frac{1}{1^q} - \frac{1}{2^q} = 1 - \frac{1}{2^q}$. Łatwo można zobaczyć, że suma $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$ jest równa 1 (wystarczy zapisać np.: $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_7$ i uprościć).

Trudniej zauważyć, że $s_n > s_{n+1}$, dla każdej liczby naturalnej n. Można to żmudnie wyrachować, albo skorzystać ze znacznie ogólniejszej obserwacji:

Narysujmy wykres funkcji $f(x) = \frac{q}{x^{q+1}}$ dla wartości q równej na przykład 1/2 (dla innych wykresy wyglądają podobnie). Zaznaczony fragment ma pole równe $\int_n^{n+1} f(x)$ czyli właśnie s_n.



Zaznaczając dwa fragmenty widzimy, że wartości s_n tworzą ciąg malejący (bo f jest funkcją malejącą):



Początkowe wartości $s_1, s_2, s_3, \ldots$ są małe i bliskie sobie, gdy q jest bliskie 0 (np.: dla $q = 0{,}01$ jest $s_1 = 0{,}0069\ldots$, $s_2 = 0{,}004\ldots$, $s_3 = 0{,}0028\ldots$). Mamy więc te same „dobre” własności, co w rozdziale II, z tą różnicą, że teraz będziemy zbliżać parametr q do 0 (a nie do 1).

Spróbujmy teraz obliczyć szanse wylosowania liczby parzystej, tj sumę

$$s_2 + s_4 + s_6 + \ldots = \left(\frac{1}{2^q} - \frac{1}{3^q}\right) + \left(\frac{1}{4^q} - \frac{1}{5^q}\right) + \left(\frac{1}{6^q} - \frac{1}{7^q}\right) + \ldots$$

Tu napotykamy pewien kłopot – nie znamy „zwięzłego” ogólnego wzoru (dla $q=1$ znany jest wzór: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots=1-\ln 2$). Ale można sobie poradzić bez niego przy liczeniu granicy tej sumy (zależnej od q) przy $q\to 0^+$.

DYGRESJA: Traktowanie „nieskończonego” dodawania jak „zwykłego” (łączność, przemienność) wymaga uzasadnień, czy choćby słów przestrogi, że nie zawsze tak można postępować. Wydaje się, że lepiej te uwagi zostawić na inną okazję – tu rozpraszałyby tylko uczniów.

Zauważmy najpierw, że z faktu iż ciąg s_n jest malejący wynikają nierówności:

$$s_2+s_4+s_6+\ldots=s_2+s_4+s_6+\ldots\le s_1+s_3+s_5+\ldots$$

$$s_3+s_5+s_7+\ldots\le s_2+s_4+s_6+\ldots=s_2+s_4+s_6+\ldots$$

Zatem po dodaniu stronami (pamiętając, że $s_1+s_2+s_3+\ldots=1$):

$$1-s_1\le 2(s_2+s_4+s_6+\ldots)\le 1$$

i po podzieleniu przez 2 dostajemy

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1\le s_2+s_4+s_6+\ldots\le\frac{1}{2}.$$

Czyli szansa wylosowania liczby parzystej mało różni się od 1/2 (gdy q będzie coraz bliższe 0, to $s_1=1-\frac{1}{2^q}$ jest też coraz bliższe 0).

UWAGA. W podobny sposób można łatwo pokazać, że szansa wylosowania liczby dającej resztę 5 z dzielenia przez 6 jest równa 1/6 oraz, że szansa wylosowania liczby podzielnej przez 17 jest równa 1/17 – zgodnie z intuicją.

Warto jeszcze stwierdzić, że w tych rozumowaniach wykorzystuje się tylko następujące własności s_n:

$s_1\le s_2\le s_3\le\ldots$, $s_1+s_2+s_3+\ldots=1$ oraz s_1 dąży do 0 przy q dążącym do 0.

Przejdźmy wreszcie do liczenia szans wylosowania liczby zaczynającej się cyfrą 8:

$$\begin{aligned}
&s_8+s_{80}+s_{81}+\ldots+s_{89}+s_{800}+s_{801}+\ldots+s_{899}+\ldots=\\
&=\left(\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}\right)+\left(\frac{1}{80^q}-\frac{1}{81^q}\right)+\left(\frac{1}{81^q}-\frac{1}{82^q}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{89^q}-\frac{1}{90^q}\right)+\\
&\quad+\left(\frac{1}{800^q}-\frac{1}{801^q}\right)+\left(\frac{1}{801^q}-\frac{1}{802^q}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{899^q}-\frac{1}{900^q}\right)+\ldots=\\
&=\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}+\frac{1}{80^q}-\frac{1}{90^q}+\frac{1}{800^q}-\frac{1}{900^q}+\ldots=\\
&=\left(\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}\right)+\frac{1}{10^q}\left(\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}\right)+\frac{1}{100^q}\left(\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}\right)+\ldots=\\
&=\left(\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}\right)\left(1+\frac{1}{10^q}+\left(\frac{1}{10^q}\right)^2+\left(\frac{1}{10^q}\right)^3+\ldots\right)=\\
&=\left(\frac{1}{8^q}-\frac{1}{9^q}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{10^q}}=\frac{10^q}{8^q\cdot 9^q}\frac{9^q-8^q}{10^q-1}=\left(\frac{10}{8\cdot 9}\right)^q\frac{9^q-8^q}{10^q-1}
\end{aligned}$$

Szczęśliwie udało się nam „pozbyć kropeczek”. Pozostaje jeszcze, niecałkiem proste, wyliczenie granicy tego wyrażenia przy q dążącym do 0. Zauważmy najpierw, że z czynnikiem $\left(\frac{10}{8\cdot 9}\right)^q$ nie ma kłopotu – dąży do 1. Natomiast drugi czynnik jest ułamkiem, w którym i licznik, i mianownik dążą do 0. Wymaga to pewnych zabiegów – Zróbmy „małą sztuczkę” (łatwo sprawdzić, że zachodzi równość):

DYGRESJA: Znając regułę de L'Hospitala można to obliczyć znacznie szybciej.

$$\frac{9^q-8^q}{10^q-1}=\left(\frac{9^q-1}{q}-\frac{8^q-1}{q}\right)\frac{1}{\frac{10^q-1}{q}}.$$

Zajmijmy się tylko jednym z ułamków i zamiast q piszmy h

$$\frac{8^h-1}{h}=\frac{8^h-8^0}{h}=\frac{8^{0+h}-8^0}{h}.$$

Widzimy teraz iloraz różnicowy funkcji $g(x)=8^x$ obliczony w punkcie 0, zatem

$$\lim_{h\to 0}\frac{8^{0+h}-8^0}{h}=g'(0),$$

a ponieważ $(8^x)'=(e^{x\ln 8})'=\ln 8\cdot e^{x\ln 8}=\ln 8\cdot 8^x$, mamy

$$\lim_{q\to 0}\frac{8^q-1}{q}=\ln 8.$$

Podobnie licząc otrzymujemy: $\lim\limits_{q\to0}\dfrac{9^q-1}{q}=\ln 9$ oraz $\lim\limits_{q\to0}\dfrac{10^q-1}{q}=\ln 10$.

Możemy więc dokończyć nasze rachunki:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{q\to0}\left(\left(\frac{10}{8\cdot9}\right)^q\frac{9^q-8^q}{10^q-1}\right)=\\
&=\lim_{q\to0}\left(\frac{10}{8\cdot9}\right)^q\cdot\left(\lim_{q\to0}\frac{9^q-1}{q}-\lim_{q\to0}\frac{8^q-1}{q}\right)\frac{1}{\lim\limits_{q\to0}\frac{10^q-1}{q}}=\\
&=\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 10}=\log_{10}9-\log_{10}8.
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy wreszcie długo oczekiwany rezultat. Z powyższych rozważań wynika, że

szansa wylosowania spośród liczb naturalnych liczby zaczynającej się cyfrą 8 jest równa $\log_{10}9-\log_{10}8$.

Niemal identyczne rachunki pozwalają stwierdzić ogólnie, że

szansa wylosowania spośród liczb naturalnych liczby zaczynającej się cyfrą n jest równa $\log_{10}(n+1)-\log_{10}n$.

Pełny sukces!!!

Na koniec tego rozdziału nagroda dla wytrwałych – „praktyczne zastosowanie" otrzymanego wyniku. Obliczmy:

$$
\begin{aligned}
&(\log_{10}2-\log_{10}1)+(\log_{10}3-\log_{10}2)+(\log_{10}4-\log_{10}3)+(\log_{10}5-\log_{10}4)=\\
&\qquad=\log_{10}5-\log_{10}1=\log_{10}5=0{,}69897\ldots\approx 0{,}7.
\end{aligned}
$$

Jest to szansa wylosowania spośród liczb naturalnych liczby zaczynającej się jedną z czterech cyfr 1, 2, 3, 4. Zatem dużo więcej niż intuicyjne 4/9! Wystarczy teraz założyć własne kasyno, w którym ruletka będzie losowała dowolną liczbę naturalną; obstawiać będzie się czy wylosowana liczba zaczyna się cyfrą mniejszą od 5. Zapewne większość grających będzie obstawiać, że nie. Jest tylko jeden kłopot mianowicie zbudowanie takiej ruletki, która losuje liczbę naturalną spośród wszystkich liczb naturalnych. Tym, którym się uda pokonać te „techniczne" trudności, proponuję przeznaczyć część fortuny na zakup dawno już nie wznawianej książeczki [9], w której między innymi opisywany jest (str. 227–234) tu rozważany paradoks, ale w trochę inny sposób.

Odsuńmy jednak żarty na bok i zastanówmy się jeszcze nad pytaniem: czy tak otrzymany wynik jest prawdziwy?

IV. JAK JEST NAPRAWDĘ?

Skąd to pytanie?! Czyżby rezultat otrzymany w poprzednim rozdziale nie był poprawny? Przecież właśnie taki wzór można znaleźć w literaturze: [2] str. 65, [9] str. 229 (w obu pozycjach cytowana jest praca Pinkhama [6]).

Otrzymaliśmy wynik, tj. granicę

$$\lim_{q\to0}(s_8+s_{80}+s_{81}+\ldots+s_{800}+s_{801}+s_{899}+\ldots)$$

przy pewnym szczególnym sposobie określenia s_n – szans wylosowania poszczególnych liczb naturalnych. Przy innym sposobie można otrzymać inną granicę albo nawet brak granicy (tak właśnie jest w przypadku opisanym w rozdziale II – żmudne rachunki tu jednak pomijam).

DYGRESJA:
Praca Pinkhama ([6]) podaje ten sam wynik również „tylko" w obrębie pewnej teorii. Każde twierdzenie w matematyce (i nie tylko) jest wyrażone w trybie warunkowym: *„jeżeli ..., to ... "* (czasami niejawnie).

Zatem odpowiedź na pytanie: *Czy otrzymany wynik jest prawdziwy?* brzmi: TAK – jeśli rozumieć słowo „prawdziwy" w obrębie teorii zarysowanej tutaj w rozdziale III. Jednak to stwierdzenie mało kogo zadowala – PRAWDA musi być nie w obrębie jakiejś tam teorii, ale w ogóle, w rzeczywistości! Jednak by dalej rozwijać ten temat, trzeba innych rozważań, raczej filozoficznych, trzeba wyjść poza matematykę – ja zostaję.

LITERATURA

[1] Andrzej Dąbrowski, *O losowym wyborze liczb naturalnych*, Matematyka 1 (1994).
[2] William Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom II, PWN 1981.
[3] Szczepan Jeleński, *Lilavati*, np. PZWS 1951 (są oczywiście wydania nowsze).
[4] Rafał Kołodziej, Krzysztof Mostowski, Wacław Zawadowski, *Trójgłos*, Matematyka 1 (1995).
[5] Wiesław Kuczyński, *O pewnym zadaniu maturalnym*, Matematyka 1 (1994).
[6] Roger S. Pinkham, *On the distribution of first significant digits*, Ann. Math. Stat. 32 (1961), 1223–1230.
[7] Edward Stachowski, *Jeszcze raz o pewnym zadaniu maturalnym*, Matematyka 6 (1982).
[8] Paweł Walczak, *O pewnym zadaniu maturalnym*, Matematyka 5 (1981).
[9] Warren Weaver, *Elementarz rachunku prawdopodobieństwa*, Wiedza Powszechna 1970.