Injekcje, surjekcje i bijekcje na zbiorach skończonych

Stanisław MIKLOS, Wrocław

Już pierwsze zetknięcie ucznia z pojęciem funkcji, niekoniecznie z jego definicją, może nasunąć mu pytanie o liczbę wszystkich funkcji ze zbioru skończonego w zbiór skończony; w tym o liczbę injekcji (funkcji różnowartościowych), surjekcji (funkcji „na") i bijekcji (funkcji zarówno różnowartościowych, jak i „na"). Przeciętny uczeń bez trudu może odkryć ([Had], [Pol]) następujące

Twierdzenie 1. *Jeżeli X jest zbiorem n-elementowym i Y jest zbiorem m-elementowym, to istnieje m^n funkcji z X w Y.*

Dowód. Możemy przyjąć, że $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy każda funkcja f z X w Y jest n-wyrazowym ciągiem o wyrazach z Y. Każdy spośród n wyrazów takiego ciągu możemy wybrać na m sposobów. Wszystkich ciągów jest zatem m^n.
Podobnie,

Twierdzenie 2. *Jeżeli X jest zbiorem n-elementowym, gdzie $n \leq m$, to istnieje $m(m-1)\dots(m-n+1)$ injekcji z X na Y.*

Dowód. Połóżmy $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy pierwszy wyraz ciągu możemy wybrać na m sposobów, drugi na $m-1$, i ogólnie, i-ty wyraz możemy wybrać na $m-i+1$ sposobów. Wszystkich takich ciągów n-wyrazowych jest zatem $m(m-1)\dots(m-n+1)$.

Z twierdzenia 2 mamy

Wniosek 1. *Jeżeli X i Y są zbiorami n-elementowymi, to istnieje $n!$ bijekcji z X na Y.*

Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Wtedy tradycyjnie w literaturze: każdą funkcję z X w Y (każdy n-wyrazowy ciąg o wyrazach z Y) nazywamy n-wyrazową *wariacją z powtórzeniami* zbioru Y; każdą surjekcję z X w Y (każdy różnowartościowy ciąg n-wyrazowy o wyrazach z Y) nazywamy n-wyrazową *wariacją bez powtórzeń* zbioru Y; każdą bijekcję z X na Y (każdy różnowartościowy ciąg n-wyrazowy o wyrazach z Y) nazywamy *permutacją n* różnych elementów. Dalej, jeżeli $n \leq m$, to każdy n-elementowy podzbiór zbioru Y nazywamy n-elementową *kombinacją* zbioru Y.

Z twierdzenia 2 i wniosku 1 dostajemy

Wniosek 2. *Jeżeli Y jest zbiorem m-elementowym i $n \leq m$ jest liczbą naturalną, to istnieje $\binom{m}{n}$ n-elementowych kombinacji zbioru Y.*

Dowód. Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$ i niech $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Na mocy twierdzenia 2, istnieje $m(m-1)\dots(m-n+1)$ różnowartościowych n-wyrazowych ciągów $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_n}$. Stąd i z wniosku 1, istnieje $n!$ różnowartościowych n-wyrazowych ciągów, których wyrazami są $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_n}$. Zatem istnieje $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$ n-elementowych podzbiorów zbioru Y; czyli istnieje $\binom{m}{n}$ n-elementowych kombinacji zbioru Y.

Następne trzy twierdzenia podają wzory na obliczenie liczby $f_{n,m}$ wszystkich surjekcji ze zbioru n-elementowego na zbiór m-elementowy. Każdy z tych wzorów jest trudny do odkrycia lub udowodnienia dla przeciętnego ucznia, a nawet studenta.

Twierdzenie 3.1. $f_{n,m} = m(f_{n-1,m} + f_{n-1,m-1})$.

Dowód. Niech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, i niech f będzie surjekcją z X na Y taką, że $f(x_n) = y_j$, gdzie $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Możliwe są dwa następujące przypadki:

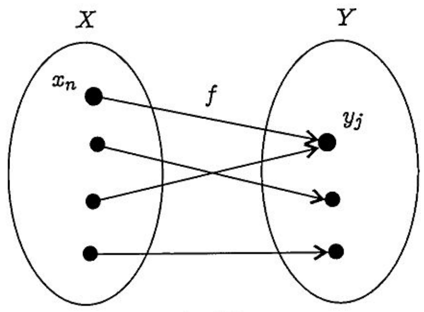
(a) $f(X \setminus \{x_n\}) = Y$, albo

(b) $f(X \setminus \{x_n\}) = Y \setminus \{y_j\}$.

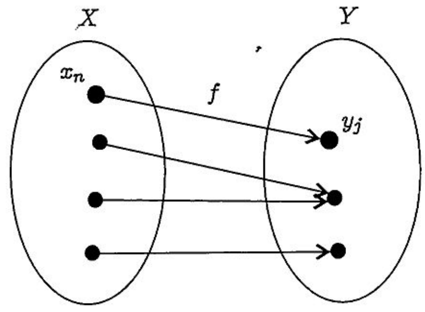
Zauważamy, że w przypadku (a), który ilustruje graf A na rysunku 1, istnieje m możliwości wyboru wartości $f(x_n)$ dla argumentu x_n oraz $f_{n-1,m}$ możliwości określenia wartości $f(X \setminus \{x_n\})$ dla argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; czyli w tym przypadku istnieje $m \cdot f_{n-1,m}$ możliwości określenia surjekcji f.

Rozumując podobnie w przypadku (b) (zob. graf B) stwierdzamy, że istnieje m możliwości określenia wartości $f(x_n)$ dla argumentu x_n oraz $f_{n-1,m-1}$ możliwości określenia wartości $f(X \setminus \{x_n\})$ dla argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; czyli w tym przypadku istnieje $m \cdot f_{n-1,m-1}$ możliwości określenia funkcji f.

Tak więc surjekcja f może być określona na $m(f_{n-1,m} + f_{n-1,m-1})$ sposobów.



Graf A



Graf B

Rys. 1

Z definicji liczby $f_{n,m}$, twierdzenia 1 i wniosku 1 mamy natychmiast

$$f_{n,1} = 1, \quad f_{n,2} = 2^n - 2 \ \text{ i } \ f_{n,n} = n!$$

Związki te możemy wykorzystać przy obliczaniu liczb $f_{n,m}$, co pokazuje następujący

Przykład 1. $f_{6,3} = 3(f_{5,3} + f_{5,2}) = 9(f_{4,3} + f_{4,2}) + 3(2^5 - 2) =$
$= 27(f_{3,3} + f_{3,2}) + 9(2^4 - 2) + 3(2^5 - 2) = 27(3! + 2^3 - 2) + 126 + 90 = 540.$

Korzystając z twierdzenia 3.1 możemy liczby $f_{n,m}$ dla $1 \leq n, m \leq 10$ zestawić w tabelę.

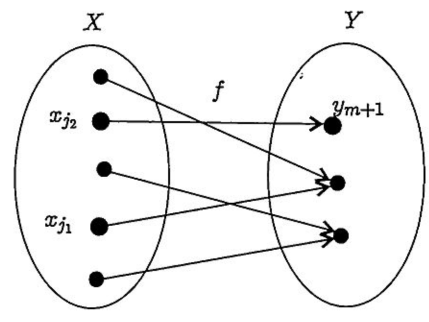
Liczby surjekcji $f_{n,m}$ ze zbioru n elementowego w zbiór m-elementowy

$n \diagdown m$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1!	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2!	0	0	0	0	0	0
3	1	6	3!	0	0	0	0	0
4	1	14	36	4!	0	0	0	0
5	1	30	150	240	5!	0	0	0
6	1	62	540	1560	1800	6!	0	0
7	1	126	1806	8400	16800	151200	7!	0
8	1	254	5756	40824	126000	191520	141120	8!

Widzimy, że każda liczba $f_{n,m}$ występująca w tej tabeli, oprócz skrajnych, równych jedności, jest m-krotną sumą liczby występującej dokładnie nad nią oraz liczby nad nią po lewej stronie. Co więcej, wszystkie liczby $f_{n,m}$ powyżej przekątnej są zerami. Stąd tabela 1 w zasadzie ma kształt trójkąta, który przypomina nam trójkąt Pascala.

Twierdzenie 3.2. $f_{n,m+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_{n-i,m}$

Dowód. Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}\}$, i niech f będzie surjekcją z X na Y. Rozważmy przeciwobraz $f^{-1}(y_{m+1}) = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}\}$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Rysunek 2 ilustruje przypadek dla $n = 5$, $m = 2$ i $i = 2$.



Rys. 2

Wtedy, wobec wniosku 2, dla ustalonego i istnieje $\binom{n}{i}$ możliwości wyboru argumentów $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}$ przeciwobrazu $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}\}$ dla wartości obrazu y_{m+1}, oraz $f_{n-i,m}$ surjekcji z $X \setminus \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}\}$ na $Y \setminus \{y_{m+1}\}$; czyli w tym przypadku f możemy określić na $\binom{n}{i} f_{n-i,m}$ sposobów. Zatem, skoro i jest dowolną liczbą naturalną taką, że $1 \leq i \leq n$, to surjekcję f można określić na $\binom{n}{1} f_{n-1,m} + \binom{n}{2} f_{n-2,m} + \ldots + \binom{n}{n} f_{n-1,m}$ sposobów.

Następny przykład pozwala porównać skuteczność obliczania liczb $f_{n,m}$ za pomocą obydwu wzorów rekurencyjnych.

Przykład 2. $f_{6,3} = \binom{6}{1} f_{5,2} + \binom{6}{2} f_{4,2} + \binom{6}{3} f_{3,2} + \binom{6}{4} f_{2,2} + \binom{6}{5} f_{1,2} + \binom{6}{6} f_{0,2} =$
$= 6\,(2^5 - 2) + 15\,(2^4 - 2) + 20\,(2^3 - 2) + 15 \cdot 2! + 0 + 0 = 540.$

Z każdego wzoru na liczbę $f_{n,m}$ można wyprowadzić następujące

Twierdzenie 3.3. $f_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m - i)^n$.

Dowód. Stosujemy indukcję matematyczną względem n i wykorzystujemy twierdzenie 3.1, czyli rekurencyjny wzór $f_{n,m} = m(f_{n-1,m} + f_{n-1,m-1})$.

Dla $n = m = 1$, obie strony wzoru są równe 1. Dla $n = 1$ oraz $m = 2, 3, \ldots$ lewa strona wzoru jest równa 0, a prawa strona jest równa

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(n-i) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{m!}{i!(m-i)!}(m-i) = m\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{(m-1)!}{(m-1-i)!} =$$

$$= m\sum_{i=0}^{m}\binom{m-1}{i}(-1)^i = m(-1+1)^n = 0.$$

Zatem dla $n = 1$ i dowolnego m twierdzenie 3.3 jest prawdziwe.

Załóżmy teraz, że twierdzenie 3.3 jest prawdziwe dla ustalonej liczby n i dowolnej liczby m. Pokażemy, że jest ono prawdziwe dla liczby $n+1$ i dowolnej liczby m, czyli, że

$$f_{n+1,m} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^{n+1}.$$

Widzimy, że wzór jest prawdziwy dla $m = 1$. Pokażemy, że jest on prawdziwy dla $m = 2, 3, \ldots$. Istotnie, z twierdzenia 3.1 i założenia indukcyjnego mamy:

$$f_{n+1,m} = m(f_{n,m} + f_{n,m-1}) =$$

$$= m\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n + \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m-1}{i}(m-1-i)^n\right) =$$

$$= m\left(m^n + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\binom{m-1}{i-1}(m-i)^n\right) =$$

$$= m\left(m^n + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n - \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m-1}{i-1}(m-i)^n\right) =$$

$$= m\left(m^n + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i} - \binom{m-1}{i-1}(m-i)^n\right) =$$

$$= m\left(m^n + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{m-i}{m}(m-i)^n\right) =$$

$$= m^{n+1} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^{n+1}.$$

Stąd twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n+1$ oraz dla dowolnego m.

Tak więc, na mocy zasady indukcji matematycznej, wnosimy, że twierdzenie 3.3 zostało udowodnione.

Twierdzenie 3.3 możemy udowodnić bez odwoływania się do twierdzeń 3.1 i 3.2 (por. [Guz], [Lip], s.44, [Szu], s.53). Zrobimy to wykorzystując poniższy lemat, który można udowodnić metodą indukcji. Zarówno w sformułowaniu lematu, jak i w dowodzie twierdzenia 3.3, $l(A)$ oznacza liczbę wszystkich elementów skończonego zbioru A.

Lemat. *Niech $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m$ będą skończonymi zbiorami i niech*

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} l(\mathcal{F}_i),\ S_2 = \sum_{1 \le j_1, j_2 \le m} l(\mathcal{F}_{j_1} \cap \mathcal{F}_{j_2}), \ldots, S_n = l(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{F}_m).$$

Wtedy

$$l(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m) = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{m+1}S_m = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}S_i.$$

Dowód twierdzenia 3.3. Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Dla $i = 1, 2, \ldots, m$, niech $\mathcal{F}_i$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : X \to Y$ takich, że $y_i \notin f(X)$. Liczba $l(\mathcal{F}_{j_1} \cap \mathcal{F}_{j_2} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{j_i})$, gdzie $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_i \le m$, jest równa liczbie wszystkich funkcji ze zbioru n-elementowego X w $(m-i)$ – elementowy zbiór $Y - \{y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_i}\}$, czyli

$$l(\mathcal{F}_{j_1} \cap \mathcal{F}_{j_2} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{j_i}) = (m-i)^n.$$

Stąd, skoro wszystkich ciągów postaci $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leq m$ jest $\binom{m}{i}$, to

$$S_i = \binom{m}{i}(m-i)^n, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Zauważmy, że $S_m = 0$, co odpowiada temu, że $S_m = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{F}_m$ jest zbiorem pustym. Zatem, wykorzystując lemat otrzymujemy

$$l(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1} S_i = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\binom{m}{i}(m-i)^n.$$

Zauważmy, że $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m$ jest zbiorem wszystkich funkcji z X w Y, które nie są surjekcjami. Stąd

$$f_{n,m} = l(X^Y) - l(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m),$$

czyli

$$f_{n,m} = m^n - \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\binom{m}{i}(m-i)^n,$$

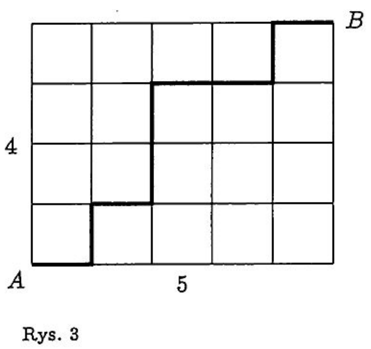
a stąd

$$f_{n,m} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{i}\binom{m}{i}(m-i)^n.$$

Stosując twierdzenie 3.3 możemy bardzo szybko obliczać liczby $f_{n,m}$, co w przypadku wzorów rekurencyjnych było żmudne, zwłaszcza dla większych liczb n i m.

Kombinatoryka jest ważna w rachunku prawdopodobieństwa, teorii grafów, teorii informacji i innych działach matematyki stosowanej. W nauczaniu szkolnym występuje głównie ze względu na zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa, a na szkolnych kołach zainteresowań znakomicie pobudza rozwój umysłowy dziecka [Aeb, Fre]. Pojęcia kombinatoryczne zrozumiane intuicyjnie i logicznie, a nie biernie wyuczone, mogą się stać użytecznym narzędziem w rozwiązywaniu wielu zadań. W starszych klasach szkoły podstawowej i w szkole średniej, kształcące jest rozwiązywanie zadań, których uogólnienia prowadzą do nowych zadań i twierdzeń. Autorami takich zadań mogą być sami uczniowie. Oto przykłady takich zadań.

1. Na ile sposobów można rozmieścić 6 rozróżnialnych piłek w 3 pudełkach?
2. Na ile sposobów można rozmieścić 6 rozróżnialnych piłek w 3 pudełkach tak, aby w każdym pudełku była co najmniej jedna piłka?
3. Na ile sposobów można rozmieścić 5 nierozróżnialnych piłek w 3 pudełkach?
4. Na ile sposobów można rozdać 6 identycznych prezentów 3 dzieciom tak, aby każde dziecko dostało co najmniej jeden prezent?
5. Rysunek 3 ilustruje podział prostokąta na $5 \cdot 4$ przystające kwadraty oraz drogę od A do B, w której poruszamy się tylko w górę lub w prawo. Ile jest takich dróg od A do B ?
6. Na ile sposobów możemy usadowić przy okrągłym stole 7 dziewcząt i 7 chłopców tak, aby dwóch chłopców ani dwie dziewczyny nie siedziały obok siebie?
7. Ile różnych liczb siedmiocyfrowych, w których cyfra 2 występuje dokładnie dwa razy, można zapisać za pomocą cyfr 1, 2 i 3?



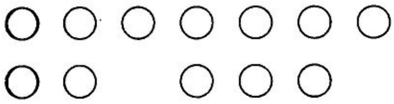
Rys. 3

Uogólnienie zadania 1 prowadzi do twierdzenia 1, a zadania 2 – do twierdzeń 3.1 – 3.3. Rozwiązując zadanie 3, przeciętny uczeń najczęściej próbuje wypisać, np. w tabeli, wszystkie możliwe rozmieszczenia 5 piłek w 3 pudełkach. Po wypisaniu już kilku możliwości może on zauważyć, że skoro mamy 5 piłek, to

(a) liczby piłek we wszystkich pudełkach są różne, i wynoszą odpowiednio: 4, 1, 0 lub 3, 2, 0, albo
(b) liczby piłek tylko w dwóch pudełkach są równe, i wynoszą odpowiednio: 5, 0, 0 lub 3, 1, 1 lub 2, 2, 1.

Stąd, w przypadku (a) piłki możemy rozmieścić w pudełkach na $3! + 3! = 12$ sposobów (liczby permutacji 2 zbiorów 3-elementowych), a w przypadku (b) – na $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 9$ sposobów (liczby permutacji 3 zbiorów 3-elementowych, w których dwa elementy są identyczne). Zatem istnieje $12 + 9$ sposobów rozmieszczenia 5 nierozróżnialnych piłek w 3 pudełkach.

To zadanie uczeń może rozwiązać także rozumując następująco. Rozmieszczenie 5 nierozróżnialnych piłek w 3 pudełkach, to rozkład liczby 5 na trzy całkowite nieujemne składniki. Tak na przykład rozkład $5 = 2 + 3 + 0$ oznacza, że w pierwszym pudełku znajdują się 2 piłki, w drugim 3 i w trzecim 0. Aby otrzymać ten rozkład, 7 nierozróżnialnych piłek ustawiamy w jednym wierszu i numerujemy je od lewej do prawej, co ilustruje rysunek 4.



Rys. 4

Następnie z tych 7 piłek zabieramy trzecią i siódmą. Wtedy pozostałe piłki dają rozkład $2 + 3 + 0$. W ten sposób wybierając 2 z pośród 7 piłek, otrzymamy możliwe rozkłady; jest ich więc $\binom{5+2}{2} = \binom{7}{2}$. Rozumując analogicznie zauważamy natychmiast, że n nierozróżnialnych piłek możemy rozmieścić w m pudełkach na $\binom{n+m-1}{m-1}$ sposobów.

Podobnie rozumując zauważamy, że istnieje $\binom{n-1}{m-1}$ sposobów rozdania n identycznych prezentów m dzieciom tak, aby każde dziecko otrzymało co najmniej jeden prezent (zad. 4), a dzieląc prostokąt na $m \cdot n$ przystających kwadratów, otrzymujemy $\binom{m+n}{n}$ różnych dróg od A do B (zad. 5). Dziewczęta i chłopcy mogą być usadowieni na $2(7!)^2$ sposobów (zad. 6), i wreszcie, istnieje $\binom{7}{2}2^5$ liczb siedmiocyfrowych (zad. 7).

Nabywanie umiejętności rozwiązywania zadań kombinatorycznych, przez przeciętnego ucznia i studenta, wymaga szczególnych zabiegów dydaktycznych, w tym zwłaszcza upoglądowienia poprzez sporządzanie tabel, drzew, grafów etc. Co więcej, próby poszukiwania różnych sposobów rozwiązywania tego samego zadania, pozwalają uwolnić się od schematów i wyeliminowania ewentualnych błędów [Dyb, Pło]. Wyniki badań i obserwacji potwierdzają, że poza liczbą surjekcji, uczniowie i studenci znają wzory na liczbę funkcji na zbiorach skończonych, ale często mają kłopot z ich uzasadnieniem. Jednak największą przeszkodę stanowi interpretacja tych wzorów nawet w prostych sytuacjach.

Literatura

[Aeb] Aebli K., *Dydaktyka psychologiczna*, PWN, Warszawa 1959.
[Dyb] Dybiec Z., *Błędy w procesie uczenia matematyki*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1996.
[Fre] Freudenthal H., *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company/Dordrecht Holland, 1978.
[Guz] Guzicki W., *O zliczaniu. Kilka zadań kombinatorycznych*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 18 (I 1997) – cz.II.
[Had] Hadamard J., *Psychologia odkryć matematycznych*, PWN – Omega, Warszawa 1964.
[L-M] Lipski W., Marek W., *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.
[Pło] Płocki A., *Rachunek prawdopodobieństwa w szkole*, WSiP, Warszawa 1977.
[Pol] Polya G., *Odkrycie matematyczne*, WNT, Warszawa 1975.
[Szu] Szurek M., *Z komputerem przez matematykę*, OW – P i P – M „Adam”, Warszawa 1995.