Ważne przykłady w rachunku prawdopodobieństwa: od błądzenia przypadkowego do martyngałów

Katarzyna PIETRUSKA-PAŁUBA, Warszawa

Jest to zapis odczytu wygłoszonego podczas XIX Szkoły Matematyki Poglądowej, *Ważne przykłady*, Siedlce, sierpień 1997

Rachunek prawdopodobieństwa w pierwszej, wielowiekowej fazie swojego rozwoju był w zasadzie teorią gier hazardowych. Metody wtedy dostępne pozwoliły udowodnić wiele znakomitych twierdzeń, ale prawdziwy rozkwit rachunku prawdopodobieństwa nastąpił dopiero w XX wieku, po wprowadzeniu przez Kołmogorowa jego aksjomatycznego podejścia do prawdopodobieństwa. W artykule tym omówimy jedno z bardzo ważnych pojęć nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa: pojęcie martyngału, zilustrowane za pomocą błądzenia przypadkowego.

Wyobraźmy sobie następującą sytuację: dwie osoby, A i B, grają na pieniądze w 'orła i reszkę'. Gra polega na tym, że kolejno rzucają monetą; jeżeli wypadnie orzeł, to gracz A dostaje złotówkę od gracza B, a jeżeli reszka – to na odwrót, gracz A płaci złotówkę graczowi B. Oczywiście gra ta nie ciągnie się w nieskończoność: jeżeli któremuś graczowi zabraknie pieniędzy (tzn. jego kapitał spadnie do zera), to przegrywa całą grę. Zastanowimy się, jakie są prawdopodobieństwa wygranej dla każdego z graczy w zależności od kapitału początkowego.

Wyniki takiej gry możemy przedstawić graficznie i związać z błądzeniem przypadkowym w następujący sposób. Załóżmy, że w chwili zero umieściliśmy na osi liczbowej, w punkcie zero, cząstkę. Cząstka ta przeskakuje o jednostkę w prawo lub w lewo po każdym rzucie monetą, w zależności od wyniku tego rzutu: jeżeli wypadł orzeł – to w prawo, a jeżeli reszka – w lewo. Wykonuje więc ona *błądzenie przypadkowe*. Jeżeli S_n oznacza położenie cząstki po n krokach, to kapitałem gracza A po n rzutach będzie $K_0 + S_n$, gdzie K_0 oznacza jego kapitał na początku gry.

Co więcej, możemy napisać

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + \dots X_n,$$

gdzie $S_0 = 0$ jest położeniem początkowym cząstki, natomiast dla $i = 1, 2 \dots, n$ zmienna losowa X_i równa jest 1, jeżeli w i–tym doświadczeniu wypadł 'orzeł', lub -1, jeżeli 'reszka'. Jeżeli moneta jest symetryczna (*nieobciążona*), to dla każdego rzutu prawdopodobieństwa uzyskania orła i reszki będą równe 1/2, w ogólnym przypadku będą one równe p i q, gdzie $p, q > 0$ oraz $p + q = 1$.

Okazuje się, że nawet w takim prostym modelu możemy zaobserwować wiele interesujących zależności, dotyczących zachowania ciągu S_n dla dużych n (tzw. prawo długich prowadzeń, prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne i inne, zob. [3]). Przykład ten jednocześnie ilustruje różne ważne pojęcia rachunku prawdopodobieństwa. Jednym z takich pojęć jest pojęcie martyngału i jemu właśnie poświęcimy dalszą część tego artykułu.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ będzie daną przestrzenią probabilistyczną, związaną z wykonywanym przez nas doświadczeniem wielokrotnego rzutu monetą. Przypominamy, że Ω, przestrzeń zdarzeń elementarnych, jest to zbiór wszystkich możliwych do zaobserwowania wyników doświadczenia (naszym 'doświadczeniem' jest tym razem nieskończenie długi ciąg rzutów monetą). Formalnie:

(1) $$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}},$$

gdzie 1 oznacza orła (sukces), a 0 reszkę (porażkę). Zatem każde zdarzenie elementarne $\Omega \ni \omega = (\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ jest nieskończonym ciągiem zer i jedynek, przy czym jeżeli $\omega_i = 1$, to i–ty rzut dał orła, a jeżeli $\omega_i = 0$, to i–ty rzut dał reszkę.

$\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ jest σ–ciałem zdarzeń 'obserwowalnych'. Ponieważ przestrzeń zdarzeń elementarnych nie jest przeliczalna, nie możemy jako $\mathcal{F}$ wziąć σ–ciała złożonego ze wszystkich podzbiorów Ω.

Przypomnijmy, że jeżeli X jest dowolnym zbiorem, natomiast $\mathcal{A}$ pewną rodziną jego podzbiorów, to $\mathcal{A}$ jest σ–ciałem jeżeli:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. jeżeli $A \in \mathcal{A}$, to $A^c \in \mathcal{A}$ (przez A^c oznaczamy dopełnienie zbioru A);
3. jeżeli $A_1, A_2, \dots$ jest ciągiem podzbiorów, z których każdy należy do $\mathcal{A}$, to również $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Odpowiednim σ–ciałem w rozważanym przez nas przypadku będzie tzw. *σ–ciało cylindryczne*: najmniejsze σ–ciało, zawierające wszystkie zbiory postaci

$$C_{i_1,\dots i_k}^{a_1,\dots a_k} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_j} = a_j, j = 1, \dots k\}, \tag{2}$$

dla $k = 1, 2, \dots, i_j = 1, 2, \dots, a_j \in \{0, 1\}$. (Zbiory takie nazywamy *cylindrami*. $\omega \in C_{i_1,\dots i_k}^{a_1,\dots a_k}$ oznacza, że wynikiem rzutu i_j jest a_j.)

W końcu musimy określić prawdopodobieństwo $\mathbf{P}$. Wystarczy zdefiniować je dla cylindrów, a potem rozszerzyć na całe σ–ciało (co wymaga sprawdzenia tzw. warunku ciagłości w zerze; pomijamy je). Jeżeli $C = C_{i_1,\dots i_k}^{a_1,\dots a_k}$ jest danym cylindrem, to przyjmiemy

$$\mathbf{P}(C) = p^{a_1+\dots+a_k} q^{k-a_1-\dots a_k}, \tag{3}$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie monetą, $q = 1 - p$ jest prawdopodobieństwem wyrzucenia reszki.

Zwracamy uwagę, że do pewnego stopnia moglibyśmy obejść się bez tej formalizacji: znaczna część zdarzeń, których prawdopodobieństwa nas interesują, zależy od pierwszych n zdarzeń, dla pewnego n. Moglibyśmy zatem wprowadzić 'skończone' przestrzenie probabilistyczne

$$\Omega_n = \{(\omega_1, \dots \omega_n) : \omega_i \in \{0, 1\}\}, \; n = 1, 2, ..$$

opisujące wyniki pierwszych n doświadczeń. Wtedy zdarzeniami obserwowalnymi będą wszystkie podzbiory Ω_n, natomiast prawdopodobieństwo, zgodnie z intuicją, zadaje się przez

$$\mathbf{P}(\{(\omega_1, \dots \omega_n)\}) = p^{\omega_1+\dots\omega_n} q^{n-\omega_1-\dots\omega_n}.$$

W tym języku możemy ściśle opisać zmienne losowe X_i: $X_i(\omega) = 2\omega_i - 1$ (równe $+1$ jeżeli wynikiem i–tego rzutu jest 1-orzeł, oraz -1, jeżeli wynikiem i–tego rzutu jest 0-reszka). Tak określone zmienne losowe $(X_n)_n$ są niezależne.

Dla ilustracji obliczmy prawdopodobieństwo tego, że cząstka po n krokach powróci do swego pierwotnego położenia (lub że gracz A będzie miał po n grach tyle pieniędzy, co na początku). Dla prostoty załóżmy, że $S_0 = 0$. Cząstka może powrócić do zera tylko po parzystej liczbie kroków, niech więc $n = 2m$. Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia $A_n = \{S_n = 0\}$. Jasne jest, że możemy ograniczyć się do przestrzeni Ω_n. Powrót do zera po $n = 2m$ krokach następuje wtedy i tylko wtedy, kiedy w pierwszych $n = 2m$ doświadczeniach jest tyle samo orłów, co reszek. A zatem

$$A_{2m} = \{(\omega_1, \dots \omega_{2m}) : \omega_1 + \dots + \omega_{2m} = m\}.$$

Jeżeli $\omega \in A_{2m}$, to $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^m q^m$ (dla wszystkich takie samo). A ile jest elementów w zbiorze A_{2m}, tzn. ile jest $2m$–elementowych ciągów zerojedynkowych, mających tyle samo zer, co jedynek? Jest ich $\binom{2m}{m}$. Zatem

$$\mathbf{P}(A_{2m}) = \binom{2m}{m} p^m q^m.$$

Zastanówmy się teraz, jak wielkość ta zachowuje się gdy $m \to \infty$. Stosując przybliżenie Stirlinga dla silni ($m! \approx m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}$) dostajemy, że

$$\mathbf{P}(A_{2m}) \approx \frac{(4pq)^m}{\sqrt{\pi m}}.$$

Widzimy, że jeżeli $p \neq q \neq 1/2$, to wyrażenie poniższe dąży do zera eksponencjalnie szybko, natomiast jeżeli $p = q = 1/2$ (błądzenie jest symetryczne), to tempo tej zbieżności do zera jest znacznie wolniejsze, tylko jak pierwiastek z m.

Jest to jedna z wielu ciekawych własności błądzenia przypadkowego, coś, co fizycy nazwaliby 'przejściem fazowym'. Mogliśmy ją pokazać używając naszego nieskomplikowanego jeszcze aparatu.

Kolejnym zagadnieniem, które chcemy rozpatrzyć, jest wspomniane we wstępie zagadnienie ruiny gracza. Gra odbywa się na opisanych wyżej zasadach, z tym, że określamy kapitały początkowe graczy: gracz A ma początkowo a złotych, natomiast gracz B ma b złotych (a, b – liczby naturalne). Gra kończy się, gdy któryś z graczy pozostanie bez grosza, wtedy drugi z graczy automatycznie wygrywa. Można zadać pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo wygranej dla każdego z graczy. Zadanie to można rozwiązać elementarnie, stosując wzory na prawdopodobieństwo całkowite. My natomiast do rozwiązania tego zadania zastosujemy pojęcie martyngału.

Definicja. *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ będzie daną przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ – rosnącym ciągiem $\sigma-$ ciał. Powiemy, że ciąg zmiennych losowych $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem ciągu $\sigma-$ciał $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli:*

1. dla każdego $n \geq 0$ M_n jest zmienną losową $\mathcal{F}_n-$mierzalną;
2. M_n są zmiennymi losowymi całkowalnymi, $\mathbf{E}|M_n| < \infty$, $n = 0, 1, 2 \ldots$;
3. $$\forall n \; \forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A M_{n+1} \mathrm{dP} = \int_A M_n \mathrm{dP}.$$

Pojęcie martyngału pojawiło się w latach 40. i pochodziło z teorii gier losowych. Można je zilustrować następująco na naszym przykładzie. Jeżeli $\mathcal{F}_n$ będzie $\sigma-$ciałem związanym z rozgrywkami do $n-$tej włącznie, zaś M_n będzie oznaczało wygraną gracza po n rozgrywkach, to fakt, że $(M_n)_n$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)_n$ oznacza, że gra jest 'sprawiedliwa': jeżeli wiemy coś o rozgrywkach do $n-$tej włącznie, to średnia wygrana gracza po n rozgrywkach będzie taka sama, jak po $n+1, n+2, \ldots$ rozgrywkach.

W rozważanym przypadku nieskończonego (cokolwiek by to miało znaczyć) ciągu rzutów monetą, w przestrzeni probabilistycznej, zdefiniowanej za pomocą (1., 2., 3.), $\sigma-$ciało $\mathcal{F}_n$ związane z doświadczeniami do $n-$tego włącznie to $\sigma-$ciało generowane przez te cylindry, dla których $i_k \leq n$. Do tego $\sigma-$ciała należą wszystkie podzbiory Ω, które są postaci $A \times \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, gdzie A jest dowolnym podzbiorem Ω_n.

Własność. *Jeżeli S_n jest położeniem cząstki po n krokach, to $(S_n)_n$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 1/2$.*

Dowód. Mamy $S_{n+1} = S_0 + X_1 + \ldots + X_n + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Niech A będzie dowolnym zdarzeniem z $\sigma-$ciała $\mathcal{F}_n$. Wtedy

$$\int_A S_{n+1} \mathrm{dP} = \int_\Omega \chi_A \cdot (S_n + X_{n+1}) \mathrm{dP} = \int \chi_A \cdot S_n \mathrm{dP} + \int \chi_A \cdot X_{n+1} \mathrm{dP}.$$

Widzimy, że (S_n) będzie martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy druga całka znika. Ponieważ jednak χ_A i X_{n+1} są niezależne (X_{n+1} jest zmienną losową niezależną od $\sigma-$ciała $\mathcal{F}_n$), to

$$\int \chi_A \cdot X_{n+1} \mathrm{dP} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{P}(A) \cdot (p - q),$$

a ostatnie wyrażenie jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q = 1/2$. □

Z niesymetrycznym błądzeniem przypadkowym możemy związać dwa inne martyngały.

Przykład 1. $(S_n - n \cdot (p-q))_n$ *jest martyngałem względem* $(\mathcal{F}_n)_n$.

Przykład ten jest naturalnym uogólnieniem przykładu powyższego: $n \cdot (p - q)$ jest właśnie tą liczbą, którą trzeba odejmować od S_n, by odpowiednie całki były równe. Drugi przykład natomiast jest innej natury; trywializuje się on w przypadku błądzenia symetrycznego.

Przykład 2. *Przypuśćmy, że $p \neq q$. Wtedy*

$$(T_n)_n = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right)_n$$

jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)_n$..

Analogicznie jak przedtem trzeba wykazać, że dla dowolnego n i dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_n$ mamy

$$\int_A T_{n+1} \mathrm{dP} = \int_A T_n \mathrm{dP}.$$

Mamy:

$$\int_A T_{n+1}\mathrm{dP} = \int_A \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \mathrm{dP} = \int_A T_n \mathrm{dP} \cdot \int_\Omega \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \mathrm{dP}$$

(ostatnia równość wynika z faktu, że $A \in \mathcal{F}_n$, S_n jest $\mathcal{F}_n$—mierzalne, natomiast X_{n+1} nie zależy od $\mathcal{F}_n$.) Co więcej

$$\int_\Omega \left(\frac{p}{q}\right)^{X_{n+1}} \mathrm{dP} = \frac{q}{p} \cdot p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \cdot q = 1,$$

a zatem $(T_n)_n$ jest martyngałem. □

Omówimy jeszcze jeden przykład. Niech $(M_n)_n$ będzie martyngałem względem ciągu σ—ciał $\mathcal{F}_n$. Interpretując M_n jako kapitał naszego hipotetycznego gracza po n rozgrywkach zapytamy, czy może on średnio zwiększyć swoją wygraną, opuszczając niektóre rozgrywki, na podstawie wiadomości o dotychczasowym przebiegu gry. Odpowiada to wprowadzeniu następujących 'zmiennych decyzyjnych' ϵ_n, z których każda będzie $\mathcal{F}_{n-1}$—mierzalna: $\epsilon_n = 0$ oznacza, że gracz opuści n—tą rundę, a $\epsilon_n = 1$, że weźmie w niej udział (decyzja ta podejmowana jest na podstawie znajomości przebiegu gry do chwili $n-1$).

Kapitał gracza po n rundach wynosił będzie

$$K_n = K_{n-1} + \epsilon_n \cdot (M_n - M_{n-1}).$$

Stwierdzenie. *$(K_n)_n$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)_n$.*

Dowód. Niech $A \in \mathcal{F}_n$. Wtedy

$$\int_A K_{n+1}\mathrm{dP} = \int_A (K_n + \epsilon_{n+1} \cdot (M_{n+1} - M_n))\mathrm{dP} =$$

$$= \int_A K_n \mathrm{dP} + \int_A \epsilon_{n+1} \cdot (M_{n+1} - M_n)\mathrm{dP}.$$

Ale

$$\int_A \epsilon_{n+1} \cdot (M_{n+1} - M_n)\mathrm{dP} = \mathbf{E}\left[\chi_A \cdot \epsilon_{n+1} M_{n+1}\right] - \mathbf{E}\left[\chi_A \cdot \epsilon_{n+1} M_n\right].$$

Zmienna ϵ_{n+1} jest $\mathcal{F}_n$—mierzalna, więc

$$\mathbf{E}\left[\chi_A \cdot \epsilon_{n+1} M_{n+1}\right] = \mathbf{E}\left[\chi_{A \cap \{\epsilon_{n+1}\}} M_{n+1}\right] = \mathbf{E}\left[\chi_{A \cap \{\epsilon_{n+1}\}} M_n\right] = \mathbf{E}\left[\chi_A \cdot \epsilon_{n+1} M_n\right].$$

Stwierdzenie jest udowodnione. □

Dla każdego martyngału $(M_n)_n$ prawdą jest, że $\mathbf{E}M_n = \mathbf{E}M_0$, co wynika stąd, że $\Omega \in \mathcal{F}_n$, dla wszystkich n. Okazuje się, że przy pewnych założeniach deterministyczny moment n można zastąpić momentem losowym τ, i że wtedy również $\mathbf{E}[M_\tau] = \mathbf{E}[M_0]$ (dokładniej omawiamy to poniżej). Spróbujmy zastosować tę własność do naszego zadania o ruinie gracza.

Przypomnijmy, że gracz A ma początkowo a złotych, gracz B ma b złotych, grają w orła i reszkę o stawkę równą 1 złotemu, gracz A obstawia orła, a gracz B – reszkę. Gra kończy się, gdy któryś z graczy zostanie zrujnowany. Jakie jest prawdopodobieństwo ruiny gracza A? Gracza B?

Przypominamy, że $X_n = 1$, jeżeli w n-tym rzucie wypadł orzeł, $X_n = -1$, jeżeli reszka, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Gra skończy się, jeżeli $S_n = b$ (ruina gracza B) lub jeżeli $S_n = -a$ (ruina gracza A). Niech zatem

$$\tau = \inf\{n > 0 : S_n = b \text{ lub } S_n = -a\}.$$

Rozważymy dwa przypadki.

1. Błądzenie symetryczne. Wtedy $(S_n)_n$ jest martyngałem. Gdybyśmy wiedzieli, że $\mathbf{E}[S_\tau] = \mathbf{E}[S_0]$, to mielibyśmy:

$$0 = \mathbf{E}[S_0] = b \cdot \mathbf{P}(S_\tau = b) + (-a) \cdot (1 - \mathbf{P}(S_\tau = b)),$$

co daje

$$\mathbf{P}(S_\tau = b) = \frac{a}{a+b}.$$

Zatem prawdopodobieństwo ruiny gracza B wynosi $\frac{a}{a+b}$, prawdopodobieństwo zaś ruiny gracza A – $\frac{b}{a+b}$.

2. W przypadku błądzenia niesymetrycznego rozpatrzmy martyngał z przykładu 2, $(T_n)_n = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right)_n$, τ – jak wyżej. W tym przypadku

$$\mathbf{E}[T_0] = 1 = \mathbf{E}[T_\tau] = \left(\frac{q}{p}\right)^b \cdot \mathbf{P}(S_\tau = b) + \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} \cdot (1 - \mathbf{P}(S_\tau = b)),$$

i dalej

$$\mathbf{P}(S_\tau = b) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}.$$

Pozostaje nam jeszcze uzasadnić, dlaczego powyższy rachunek jest poprawny, dlaczego można zastąpić momenty deterministyczne – momentem losowym τ. Otóż, po pierwsze, τ jest tak zwanym *momentem Markowa*, tzn. dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$ zdarzenie $\{\tau = n\}$ należy do σ-ciała $\mathcal{F}_n$.

Wprowadźmy dwa nowe ciągi zmiennych losowych:

$$S_n^* = \begin{cases} S_n & \text{dla } n \leq \tau, \\ S_\tau & \text{dla } n \geq \tau \end{cases} \quad \text{oraz } T_n^* = \begin{cases} T_n & \text{dla } n \leq \tau, \\ T_\tau & \text{dla } n \geq \tau \end{cases}$$

Za pomocą elementarnego rachunku (podobnego do rozważań przeprowadzonych wyżej) sprawdzamy, że $(S_n^*)_n$ oraz $(T_n^*)_n$ są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_n$. Mają one jednak pewną dodatkową własność: są martyngałami *ograniczonymi*. A dla martyngałów ograniczonych prawdziwe jest następujące

Twierdzenie (wersja twierdzenia Dooba). *Jeżeli $(M_n)_n$ jest ograniczonym martyngałem względem ciągu σ-ciał $\mathcal{F}_n$, natomiast τ jest dowolnym momentem Markowa, to* $\mathbf{E}[M_0] = \mathbf{E}[M_\tau]$.

Twierdzenie Dooba właśnie umożliwia nam zastąpienie momentów deterministycznych losowymi.

Bibliografia

1. T. Bojdecki, *Martyngały z czasem dyskretnym*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1986.
2. P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.
3. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t.1, PWN, Warszawa 1977.