Jest to zapis odczytu wygłoszonego podczas XIX Szkoły Matematyki Poglądowej, *Ważne przykłady*, Siedlce, sierpień 1997

O tworzeniu funkcji tworzących

Jarosław WRÓBLEWSKI, Wrocław

Poniższe 3 zadania pochodzą z obozów przygotowawczych do Olimpiad Międzynarodowych, Zwardoń 1995-97. W rozwiązaniu każdego z nich wykorzystujemy tożsamość wyprodukowaną „na zamówienie" dzięki odpowiedniemu skonstruowaniu wielomianu (tzw. funkcji tworzącej), w którego współczynnikach lub wartościach zakodowana jest jedna, znana nam, strona tożsamości.

Zadanie pierwsze

W pudełku znajduje się 1999 krówek popularnych czekoladowych i 2002 krówki popularne śmietankowe. Wybieramy losowo k krówek popularnych. Dla jakich liczb k prawdopodobieństwo wylosowania nieparzystej liczby krówek popularnych czekoladowych jest równe $\frac{1}{2}$?

Rozwiązanie:
Niech $0 \le k \le 4001$. Liczba sposobów wylosowania k krówek popularnych wynosi $S = \binom{4001}{k}$, w tym liczba sposobów, przy których wylosowano i krówek popularnych czekoladowych wynosi $S_i = \binom{1999}{i}\binom{2002}{k-i}$. Jeśli $i > 1999$ lub $k - i > 2002$, to $S_i = 0$, co jest zgodne z umową $\binom{m}{n} = 0$ dla $m < n$. Liczba sposobów wylosowania k krówek popularnych przy zachowaniu parzystej liczby krówek popularnych czekoladowych wynosi więc

$$P = \sum_{\substack{2|i \\ 0\le i\le k}} S_i = \sum_{\substack{2|i \\ 0\le i\le k}} \binom{1999}{i}\binom{2002}{k-i},$$

natomiast liczba krówek popularnych czekoladowych jest nieparzysta przy

$$N = \sum_{\substack{2\nmid i \\ 0<i\le k}} S_i = \sum_{\substack{2\nmid i \\ 0<i\le k}} \binom{1999}{i}\binom{2002}{k-i}$$

sposobach wylosowania.

Mamy odpowiedzieć, kiedy $\frac{P}{S} = \frac{1}{2}$. Równoważne, ale przyjemniejsze w zapisie jest zapytanie, kiedy $P = N$, czyli

$$0 = \sum_{i=0}^{k} S_i(-1)^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{1999}{i}\binom{2002}{k-i}(-1)^i = T.$$

Wystarczy sprawdzić, kiedy $T = 0$! Proste? Niestety, liczba T jest dana w postaci sumy, której przyrównanie do 0 nie jest łatwe. Wyprodukujemy więc tożsamość, która wyrazi T w prostszej postaci. W tym celu rozpoznajmy, czym są poszczególne elementy wchodzące w skład wyrażenia definiującego T. Otóż $\binom{1999}{i}$ jest współczynnikiem przy x^i w rozwinięciu $(1+x)^{1999}$. Natomiast $\binom{2002}{k-i}$ jest współczynnikiem przy x^{k-i} w rozwinięciu $(1+x)^{2002}$. Jeśli jednak wyjdziemy od powyższych spostrzeżeń, to trudno będzie „zagospodarować" czynnik $(-1)^i$. Lepiej zauważyć, że $\binom{1999}{i}(-1)^i$ jest współczynnikiem przy x^i w rozwinięciu $(1-x)^{1999}$.

Wtedy T okaże się być współczynnikiem przy x^k w rozwinięciu

$$(1-x)^{1999}(1+x)^{2002} = (1-x^2)^{1999}(1+x)^3.$$

Jeśli k jest parzyste, to współczynnik przy x^k w ostatnim wyrażeniu jest równy

$$\binom{1999}{k/2}(-1)^{k/2} + 3\binom{1999}{(k/2)-1}(-1)^{(k/2)-1}.$$

Wtedy równanie $T = 0$ jest równoważne równaniu $\binom{1999}{k/2} = 3\binom{1999}{k/2-1}$, co daje $\frac{1}{k/2} = \frac{3}{1999-((k/2)-1)}$ i dalej $2000 - \frac{k}{2} = \frac{3k}{2}$, skąd $k = 1000$.

Przypadek k nieparzystego można rozpatrzyć w analogiczny sposób, ale po co? Jeśli bowiem k spełnia warunki zadania, to $4001 - k$ też. Zatem liczby k, przy których podane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2}$, są dwie: 1000 i 3001.

Zadanie drugie

Czy istnieje taka liczba naturalna n, że liczba $\binom{2n}{n}$ zapisana w układzie dziesiętnym kończy się cyfrą 8?

Rozwiązanie:
Aby odpowiedzieć na zadane pytanie należy zrozumieć, jaką resztę z dzielenia przez 10 daje $\binom{2n}{n}$. Ponieważ $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$, stwiedzamy, że $\binom{2n}{n}$ jest zawsze liczbą parzystą i pozostaje zrozumieć, jaką daje resztę z dzielenia przez 5, a dokładniej, kiedy ta reszta jest równa 3.

Ogólniej, zapytajmy jaką resztę z dzielenia przez liczbę pierwszą p daje liczba postaci $\binom{m}{n}$? Liczbę $\binom{m}{n}$ możemy znaleźć w rozwinięciu $(1+x)^m$ jako współczynnik przy x^n. Dwumian $1+x$ łatwo podnieść do p-tej potęgi, jeśli interesuje nas tylko reszta z dzielenia przez p, gdyż $(1+x)^p \equiv 1^p + x^p = 1 + x^p$, gdzie $\equiv$ oznacza, że podane wielomiany różnią się o wielomian mający wszystkie współczynniki podzielne przez p.

Podobnie $(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k}$. Wykorzystajmy tę łatwość potęgowania do uproszczenia $(1+x)^m$. W tym celu rozkładamy m na sumę potęg liczby p, co odpowiada zapisaniu m w układzie pozycyjnym o podstawie p:

$$m = \overline{c_l c_{l-1} \ldots c_2 c_1 c_0} = c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \ldots + c_2 p^2 + c_1 p + c_0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= (1+x)^{c_l p^l} \cdot (1+x)^{c_{l-1} p^{l-1}} \cdot \ldots \cdot (1+x)^{c_2 p^2} \cdot (1+x)^{c_1 p} \cdot (1+x)^{c_0} \equiv \\ &\equiv (1+x^{p^l})^{c_l} \cdot (1+x^{p^{l-1}})^{c_{l-1}} \cdot \ldots \cdot (1+x^{p^2})^{c_2} \cdot (1+x^p)^{c_1} \cdot (1+x)^{c_0} = \\ &= W(x) = (1+x^{p^l})^{c_l} \cdot V(x).\end{aligned}$$

Zapiszmy n w układzie przy podstawie p:

$$n = \overline{d_l d_{l-1} \ldots d_2 d_1 d_0} = d_l p^l + d_{l-1} p^{l-1} + \ldots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0.$$

Zauważmy, że n ma tu tyle samo cyfr, co m – w razie potrzeby liczbę n uzupełniamy początkowymi zerami.

Z jakim współczynnikiem pojawia się x^n w $W(x)$? Zauważmy, że stopień wielomianu $V(x)$ jest mniejszy od p^l. Zatem po wymnożeniu $(1+x^{p^l})^{c_l} \cdot V(x)$ możemy otrzymać x^n tylko wtedy, gdy z pierwszego czynnika wybierzemy $x^{d_l p^l}$, a z drugiego $x^{n-d_l p^l} = x^{d_{l-1} p^{l-1} + \ldots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}$. Współczynnik przy $x^{d_l p^l}$ w $(1+x^{p^l})^{c_l}$ jest równy $\binom{c_l}{d_l}$.

Rozumując dalej w podobny sposób dochodzimy do wniosku, że aby otrzymać x^n po wymnożeniu iloczynu składającego się na $W(x)$ musimy wybrać składnik $\binom{c_{l-1}}{d_{l-1}} x^{d_{l-1} p^{l-1}}$ z rozwinięcia czynnika $(1+x^{p^{l-1}})^{c_{l-1}}$ itd.

Ostatecznie współczynnik przy x^n w $W(x)$ jest równy $\binom{c_l}{d_l}\binom{c_{l-1}}{d_{l-1}} \cdots \binom{c_2}{d_2}\binom{c_1}{d_1}\binom{c_0}{d_0}$.

Zatem

$$(*) \qquad \binom{m}{n} \equiv \binom{c_l}{d_l}\binom{c_{l-1}}{d_{l-1}} \cdots \binom{c_2}{d_2}\binom{c_1}{d_1}\binom{c_0}{d_0},$$

gdzie cały czas $\equiv$ oznacza przystawanie mod p.

Przejdźmy teraz do zrozumienia reszty z dzielenia $\binom{2n}{n}$ przez 5. Niech

$$n = \overline{d_l d_{l-1} \dots d_2 d_1 d_0} = d_l 5^l + d_{l-1} 5^{l-1} + \dots + d_2 5^2 + d_1 5 + d_0$$

będzie zapisem liczby n w układzie piątkowym. Jeśli k jest najmniejszą taką liczbą, że $d_k \geq 3$, to liczba $2n$ w układzie piątkowym ma końcówkę

$$\overline{\dots (2d_k - 5)(2d_{k-1})(2d_{k-2}) \dots (2d_2)(2d_1)(2d_0)},$$

co daje we wzorze (*) iloczyn

$$\dots \binom{2d_k - 5}{d_k} \binom{2d_{k-1}}{d_{k-1}} \binom{2d_{k-2}}{d_{k-2}} \dots \binom{2d_2}{d_2} \binom{2d_1}{d_1} \binom{2d_0}{d_0}.$$

Ponieważ $\binom{2d_k - 5}{d_k}$ jest tożsame z $\binom{1}{3}$ lub $\binom{3}{4}$, czyli równe 0, cała prawa strona wzoru (*) jest zerem. Zatem $\binom{2n}{n}$ dzieli się przez 5. To oczywiście przy założeniu, że n ma w układzie piątkowym chociaż jedną cyfrę 3 lub 4.

Dla n zapisanych w systemie piątkowym przy pomocy cyfr 0, 1 i 2 mamy

$$\binom{2n}{n} \equiv \binom{2d_l}{d_l} \binom{2d_{l-1}}{d_{l-1}} \dots \binom{2d_2}{d_2} \binom{2d_1}{d_1} \binom{2d_0}{d_0} \pmod 5$$

Ponieważ $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ oraz $\binom{4}{2} \equiv 1 \pmod 5$ otrzymujemy $\binom{2n}{n} \equiv 2^i \pmod 5$, gdzie i jest liczbą cyfr 1 występujących w piątkowym rozwinięciu n. Ponieważ $2^i \equiv 3 \pmod 5$ dla $i \equiv 3 \pmod 4$ otrzymujemy następującą charakteryzację:

Liczba $\binom{2n}{n}$ jest zakończona w układzie dziesiętnym cyfrą 8 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n zapisana w układzie piątkowym składa się tylko z cyfr 0, 1 i 2, przy czym liczba wystąpień cyfry 1 dzieli się przez 4 z resztą 3.

Najmniejszą liczbą spełniającą ten warunek jest $31 = 111_{(5)}$. Bezpośrednie obliczenia wskazują, że $\binom{62}{31} = 465428353255261088$.

Kolejnymi liczbami spełniającymi warunki zadania są 131, 151, 155, 157, 161, 181, 281, 631, 651, 655, 657, 661, 681, 751, 755, 757, 761, 775, 777, 785, 787, 801, 805, 807, 811, 881, 901, 905, 907, 911, 931, 1281, 1381, 1401, 1405, 1407, 1411, 1431, 1531, 3131, ...

Oczywiście takich liczb jest nieskończenie wiele.

Zadanie trzecie

Niech s_n będzie sumą cyfr liczby n. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną k taką, że

$$A_k = \sum_n n^k (-1)^{s_n} \neq 0 ,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby naturalne $n \leq 10^{1997} - 1$, które w zapisie dziesiętnym nie mają ani cyfry 2, ani 7.

UWAGA: 0 nie jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:
Najpierw przypomnimy sobie reguły różniczkowania wielomianów.
(i) $(P \pm Q)^{\cdot} = P^{\cdot} \pm Q^{\cdot}$
(ii) $(cP)^{\cdot} = cP^{\cdot}$
(iii) $(PQ)^{\cdot} = P^{\cdot}Q + PQ^{\cdot}$
(iv) Jeśli 1 jest m-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to $P^{[r]}(1) = 0$ dla $r < m$ oraz $P^{[m]}(1) \neq 0$ dla $r < m$. W szczególności 1 jest $(m-r)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P^{[r]}(x)$.

Spróbujemy wyrazić A_k jako wartość pewnego wielomianu w 1. Najpierw uporajmy się z $\sum\limits_n (-1)^{s_n}$. Brakujące n^k mamy nadzieję uzyskać przez różniczkowanie.

Niech więc

$$V(x) = 1 + \sum_n (-1)^{s_n} x^n.$$

Nietrudno sprawdzić, że

$$V(x) = W(x)W(x^{10})W(x^{100})\ldots W(x^{10^{1996}}),$$

gdzie $W(x) = 1 - x - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^8 - x^9$.

Chcielibyśmy, aby we wzorze na $V(x)$ po k-krotnym różniczkowaniu przy x^n pojawił się współczynnik n^k. Jednak różniczkowanie x^n daje nx^{n-1} i przy kolejnym różniczkowaniu otrzymujemy $(n-1)nx^{n-2}$. Żałujemy, że nie ma wzoru

v) $(x^n)^{\cdot} = nx^n$,

gdyż wtedy byłoby

vi) $(x^n)^{[r]} = n^r x^n$.

Drobiazg. Przyjmijmy

vii) $P^{\cdot}(x) = x\dfrac{d}{dx}P(x)$

zamiast zwykłego określenia pochodnej. Łatwo zobaczyć, że własności i)-iv) są prawdziwe bez konieczności nanoszenia jakichkolwiek poprawek. Ponieważ $W(1) = W^{\cdot}(1) = W^{\cdot\cdot}(1) = 0$ oraz $W^{\cdot\cdot\cdot}(1) = -90$, liczba 1 jest 3-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Ponadto

viii) $[P(x^m)]^{\cdot} = mP^{\cdot}(x^m)$,

skąd w połączeniu z iv) liczba 1 jest 3-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x^m)$.

Zatem jedynka jest $3 \cdot 1997 = 5991$-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, skąd

$$A_k = V^{[k]}(1) = 0$$

dla $k \leq 5990$, ale

$$A_{5991} = V^{[5991]}(1) \neq 0.$$

Szukaną liczbą k jest więc 5991.

Można stwierdzić, że

$$V^{[5991]}(x) = W^{\cdot\cdot\cdot}(x) \cdot 10^3 W^{\cdot\cdot\cdot}(x^{10}) \cdot 100^3 W^{\cdot\cdot\cdot}(x^{100}) \cdot \ldots \cdot 10^{3\cdot 1996} W^{\cdot\cdot\cdot}(x^{10^{1996}}) +$$
$$+ \text{ wyrazy zerujące się w 1},$$

skąd $A_{5991} = V^{[5991]}(1) = (-90)^{1997} \cdot 10^{3(1+2+3+\ldots+1996)}$.