Stożkowe i konstrukcje Steinera z rzutowego punktu widzenia (część I)

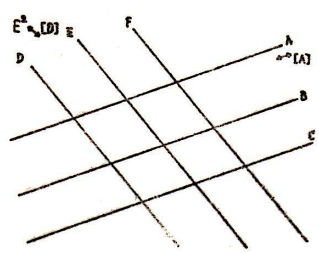
Jan FRYDA i Erwin KASPAREK, Katowice

Wstęp

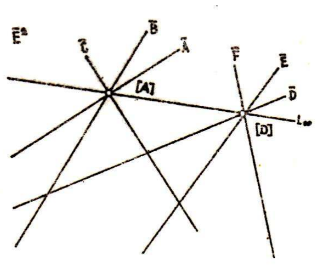
Arthur Cayley powiedział, że cała geometria – to geometria rzutowa i chociaż obecnie stwierdzenie to uznać możemy za zbyt daleko idące, to w odniesieniu do wielu klasycznych zagadnień geometrycznych nie sposob nie przyznać mu racji. Oczywiście sam Cayley również nie rozumiał tego w ten sposób, że geometria rzutowa jest jedyną geometrią, poza którą nic już nie istnieje. Istota tego zdania tkwi we wzajemnych związkach między różnymi teoriami geometrycznymi, w zależnościach między nimi. Mówiąc nieco ściślej chodzi o to, że geometria rzutowa, wg klasyfikacji Kleina, jest nadgeometrią wszystkich klasycznych geometrii i umożliwia pewne całościowe spojrzenie na własności geometryczne. Przenosi się rozważania na grunt geometrii rzutowej, a następnie rezultaty interpretuje się w konkretnej teorii. Dodatkowym argumentem przemawiającym za takim postępowaniem jest urzekająca prostota geometrii rzutowej.

Najwdzięczniejszymi obiektami dla zilustrowania takiej metody postępowania są dobrze znane stożkowe. Omawiając własności stożkowych na płaszczyźnie euklidesowej wybieramy z reguły jedną z dwóch metod. Albo wprowadzamy kolejno pojęcia i badamy określone własności, specyfikując je za każdym razem dla elipsy, hiperboli i paraboli, albo omawiamy każdą z nich oddzielnie. Każda z tych metod ma swoje wady (i oczywiście zalety), z których za największą uznać trzeba konieczność trzykrotnego powtarzania niewiele różniących się rozumowań. Łatwo można tego uniknąć przenosząc rozważania na płaszczyznę rzutową, gdzie wszystkie stożkowe (właściwe) są nierozróżnialne i gdzie nie trzeba przejmować się takim „drobiazgiem", że nie każde dwie proste się przecinają. Tak postąpimy w niniejszej pracy. Przedstawimy, oczywiście, tylko wybrane własności stożkowych i konstrukcje z nimi związane. W części pierwszej omawiamy rzutowe i afiniczne własności stożkowych, w drugiej zajmiemy się konstrukcjami Steinera, za pomocą których wyznaczymy osie, ogniska i kierownice stożkowych na płaszczyźnie euklidesowej.

Wszystkie nasze rozważania ilustrujemy licznymi rysunkami, które zrekompensować winny konieczną tutaj fragmentaryczność treści i skrótowość formy. Kompletne przedstawienie geometrii rzutowej, teorii stożkowych i konstrukcji Steinera wielokrotnie przekraczałoby ramy objętościowe niniejszej pracy (i zapewne cierpliwość Czytelnika). Zainteresowanych tematem odsyłamy do bibliografii zamieszczonej na końcu części drugiej.



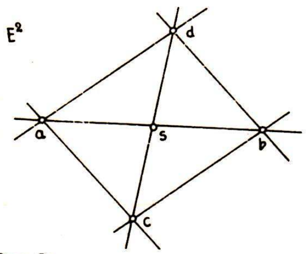
Rys. 1a



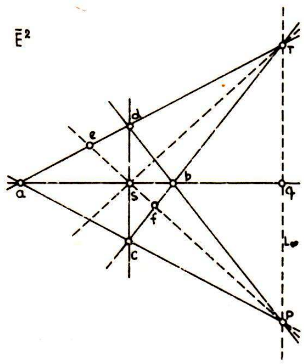
Rys. 1b

Płaszczyzna rzutowa

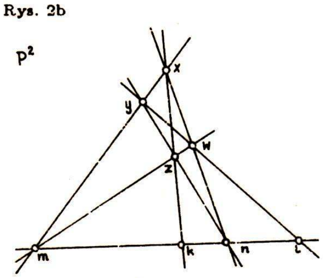
Przez dołączenie do płaszczyzny euklidesowej $\mathbf{E}^2$ horyzontu, czyli zbioru punktów niewłaściwych, w których przecinają się proste równoległe, otrzymujemy **rzutowe rozszerzenie płaszczyzny euklidesowej**, które oznaczamy tutaj symbolem $\overline{\mathbf{E}}^2$. Te nowe punkty, zwane **punktami niewłaściwymi** lub **kierunkami prostych**, tworzą prostą rzutową L_∞, którą nazywamy **prostą w nieskończoności**. Jeśli zatem dana jest prosta euklidesowa A, to przez dołączenie do niej jej kierunku $[A]$ otrzymujemy prostą rzutową $\overline{A}$. Punkt $[A]$ leży na prostych rzutowych L_∞ i $\overline{A}$ oraz na każdej takiej prostej rzutowej $\overline{B}$, że $A \parallel B$ (rys. 1a). W tak otrzymanej strukturze $\overline{\mathbf{E}}^2$, złożonej z punktów i prostych rzutowych, wyróżniona jest prosta L_∞. Przeszkodę tę usuwamy „zapominając", która prosta rzutowa została dołączona (rys. 1b). Wówczas wszystkie proste (i punkty) są już równouprawnione, czyli struktura ta jest **tranzytywna** ze względu na proste (i punkty) rzutowe. Strukturę tę nazywamy **płaszczyzną rzutową** i oznaczamy symbolem $\mathbf{P}^2$.



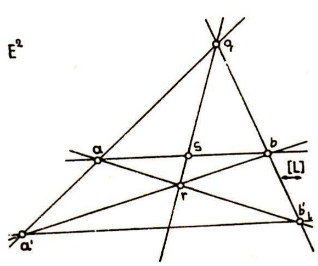
Rys. 2a



Rys. 2b



Rys. 2c



Rys. 2d

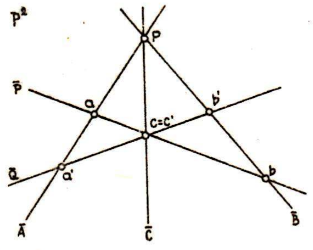
Postępując z kolei odwrotnie, to znaczy ustalając na płaszczyźnie $\mathbf{P}^2$ jakąkolwiek prostą rzutową i usuwając ją, jako prostą w nieskończoności, otrzymujemy z $\mathbf{P}^2$ płaszczyznę euklidesową. Płaszczyzna $\mathbf{P}^2$ jest wówczas jej rozszerzeniem rzutowym.

Ta wzajemnie jednoznaczna zależność sprawia, że zagadnienia dotyczące płaszczyzny euklidesowej rozważać możemy na jej rozszerzeniu rzutowym, czyli na płaszczyźnie rzutowej. Dotyczy to przede wszystkim własności afinicznych płaszczyzny euklidesowej, czyli takich, które są zachowywane przez przekształcenia afiniczne (czyli nie psujące prostych). Zilustrujemy to na przykładzie środka odcinka. Jak wiadomo, środek odcinka (a, b) znaleźć można konstruując na płaszczyźnie $\mathbf{E}^2$ jakikolwiek równoległobok $acbd$ (rys. 2a). Punkt s, w którym przecinają się przekątne ab i cd, jest środkiem odcinka (a, b). Rozważmy teraz tę konstrukcję na rzutowym rozszerzeniu $\overline{\mathbf{E}}^2$ płaszczyzny $\mathbf{E}^2$. Otrzymujemy wówczas konfigurację przedstawioną na rysunku 2b. Proste $\overline{ac}$ i $\overline{bd}$ przecinają prostą L_∞ w punkcie niewłaściwym p, a proste $\overline{ad}$ i $\overline{bc}$ – w punkcie r. Punkt q jest punktem przecięcia prostych L_∞ i $\overline{ab}$. Taka konfiguracja na płaszczyźnie rzutowej nosi nazwę czworokąta zupełnego. **Czworokąt zupełny** ma cztery wierzchołki (u nas: a, c, b, d) sześć boków ($\overline{ac}$, $\overline{bd}$, $\overline{ad}$, $\overline{bc}$, $\overline{ab}$, $\overline{cd}$), trzy punkty przekątne (p, r, s) i trzy proste przekątne ($\overline{ps}$, $\overline{pr}$, $\overline{rs}$). Czworokąty zupełne umożliwiają znajdywanie na płaszczyźnie rzutowej harmonicznych czwórek punktów. Mówimy, że czwórka (m, n, k, l) punktów leżących na jednej prostej rzutowej jest **czwórką harmoniczną** i piszemy $H(m, n, k, l)$, gdy istnieje taki czworokąt zupełny $xyzw$, że punkty m, n są jego punktami przekątnymi, a punkty k, l leżą na jego bokach (rys. 2c). Z określenia czwórek harmonicznych wynikają od razu równoważności $H(m, n, k, l) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow H(m, n, l, k) \Longleftrightarrow H(n, m, l, k) \Longleftrightarrow H(n, m, k, l)$. Dowodzi się ponadto (w oparciu o twierdzenie Desarguesa), że pary (m, n) i (k, l) w czwórce harmonicznej (m, n, k, l) można przestawiać, czyli $H(m, n, k, l) \Longleftrightarrow H(k, l, m, n)$. Ta ostatnia równoważność sprawia, że zapis $H(m, n, k, l)$ odczytujemy często mówiąc, że **pary** (m, n) i (k, l) **przedzielają się harmonicznie**.

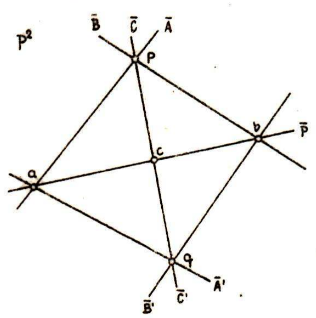
Przekształcenia zachowujące harmoniczność czwórek punktów to **przekształcenia rzutowe**. Odwzorowują one czworokąty zupełne na czworokąty zupełne. Harmoniczność jest również zachowywana przez **rzuty perspektywiczne**. W konfiguracji przedstawionej na rysunku 2b harmoniczna jest czwórka (p, s, e, f), a ponieważ możemy przestawiać pary w czwórce harmonicznej, więc również $H(e, f, p, s)$. Rzutując teraz z punktu r prostą $\overline{ps}$ na prostą $\overline{ab}$ stwierdzamy, że harmoniczna jest czwórka (a, b, q, s). Zatem, jeżeli s jest środkiem odcinka (a, b), to czwórka (a, b, q, s) jest harmoniczna, gdy q jest kierunkiem prostej ab. Prawdziwa jest również implikacja przeciwna, to znaczy, jeśli czwórka (a, b, q, s) jest harmoniczna i q jest punktem niewłaściwym, to s jest środkiem odcinka (a, b).

Widzimy teraz, że konstrukcja środka odcinka (a, b) na płaszczyźnie $\mathbf{E}^2$ może być zastąpiona przez konstrukcję czwartego punktu harmonicznego na rozszerzeniu rzutowym $\overline{\mathbf{E}}^2$. Analiza czwórek harmonicznych w czworokącie zupełnym sugeruje jeszcze inną konstrukcję środka odcinka (a, b) na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbf{E}^2$. Obierzmy w tym celu jakikolwiek punkt q na $\mathbf{E}^2$, nie leżący na prostej ab, a następnie ustalmy na prostej aq dowolny punkt a' różny od a i q. Poprowadźmy teraz przez punkt a' prostą L równoległą do prostej ab i oznaczmy przez b' punkt przecięcia prostych ab i L. Proste ab' i $a'b$ przecinają się w punkcie r, a proste ab i qr w punkcie s, który jest środkiem odcinka (a, b), bo czwórka $(a, b, [L], s)$ jest czwórką harmoniczną, a punkt $[L]$ jest punktem niewłaściwym (rys. 2d). Zauważmy, że w konstrukcji tej prowadzimy tylko jedną prostą równoległą.

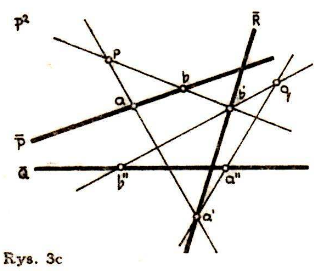
Omawiając własności czwórek harmonicznych posłużyliśmy się rzutem perspektywicznym. Przyjrzyjmy się teraz bliżej temu przekształceniu. Ustalmy na płaszczyźnie rzutowej $\mathbf{P}^2$ dowolne różne proste $\overline{P}$, $\overline{Q}$ i dowolny punkt p nie leżący na żadnej z nich.



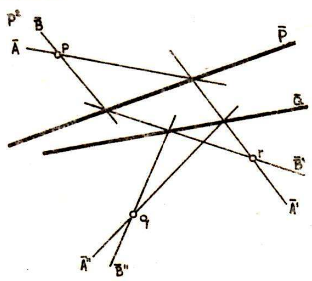
Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3c



Rys. 3d

Rzutem perspektywicznym prostej $\overline{P}$ na prostą $\overline{Q}$ **o środku** p nazywamy odwzorowanie, które każdemu punktowi a prostej $\overline{P}$ przyporządkowuje taki punkt a' na prostej $\overline{Q}$, że prosta $\overline{aa'}$ przechodzi przez punkt p (**należy do pęku** p^*) (rys. 3a). Z powyższego określenia widać, że rzut perspektywiczny jest jednoznacznie określony przez zadanie prostych $\overline{P}$, $\overline{Q}$ i środka perspektywy p. Zauważmy, że rzut perspektywiczny otrzymać można jako złożenie dwóch odwzorowań. Możemy bowiem najpierw zrzutować prostą $\overline{P}$ na pęk p^*, przyporządkowując każdemu punktowi a prostej $\overline{P}$ prostą $\overline{pa}$, a następnie zrzutować pęk p^* na prostą $\overline{Q}$, przyporządkowując prostej $\overline{A} = \overline{pa}$ punkt a' będący punktem przecięcia prostych $\overline{A}$ i $\overline{Q}$, czyli $a' = \overline{AQ}$. Ustalmy teraz dowolne różne punkty p, q i prostą rzutową $\overline{P}$ nie przechodzącą przez żaden z nich (rys. 3b). Rzutując pęk p^* na prostą $\overline{P}$, a następnie prostą $\overline{P}$ na pęk q^*, otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie prostych z pęku q^* prostym z pęku p^*, które nazywamy rzutem perspektywicznym pęku p^* na pęk q^* o osi $\overline{P}$. Złożenie skończonej liczby rzutów perspektywicznych nazywamy przekształceniem rzutowym prostej na prostą, gdy składowe rzuty są rzutami prostych na proste, lub pęku na pęk, gdy są to rzuty pęków na pęki. Dowodzi się, że każde takie przekształcenie rzutowe może być otrzymane jako złożenie co najwyżej trzech rzutów perspektywicznych, a w przypadku, gdy proste są różne (lub, gdy punkty są różne) – co najwyżej dwóch (rys. 3c,d).

Wśród przekształceń rzutowych prostej rzutowej na siebie szczególną rolę odgrywają inwolucje, czyli przekształcenia nieidentycznościowe spełniające warunek $\varphi\varphi = id$. Dowolne, różne od identycznościowego, przekształcenie rzutowe prostej $\overline{A}$ na siebie może mieć co najwyżej dwa punkty stałe (czyli 0,1 lub 2). Natomiast inwolucja prostej $\overline{A}$ albo nie ma w ogóle punktów stałych, albo ma dokładnie dwa punkty stałe. W pierwszym przypadku nazywamy ją **inwolucją eliptyczną**, w drugim – **hiperboliczną**.

Teraz, analogicznie jak poprzednio, powinniśmy powtórzyć powyższe rozważania dla przekształcenia rzutowego pęku na siebie. Nie jest to jednak konieczne, bo na płaszczyźnie rzutowej obowiązuje **zasada dualności**, w myśl której pojęcia i własności prawdziwe dla punktów są również prawdziwe dla prostych i na odwrót. Oczywiście wpierw trzeba te pojęcia i własności „przetłumaczyć", zastępując punkty prostymi, proste punktami, zbiory punktów prostej – pękami itd. Uwzględniając tę zasadę dalsze nasze rozważania prowadzić będziemy już jednotorowo, nie powtarzając odpowiednich sformułowań dla sytuacji dualnych.

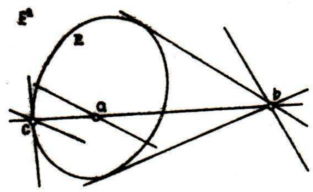
Wspomnieliśmy poprzednio, że harmoniczność czwórek punktów jest zachowywana przez rzut perspektywiczny. Ponieważ przekształcenia rzutowe prostych rzutowych są złożeniami rzutów perspektywicznych, więc również zachowują harmoniczność.

W dotychczasowych naszych rozważaniach wystąpiła już większość używanych tu przez nas oznaczeń. W szczególności prostą euklidesową przechodzącą przez różne punkty a, b oznaczamy krótko ab, a odpowiednią prostą rzutową – $\overline{ab}$. Ponieważ na płaszczyźnie rzutowej każde dwie różne proste przecinają się, więc punkt wspólny prostych $\overline{A}$, $\overline{B}$ oznaczamy analogicznie symbolem $\overline{AB}$. Symbolika taka pozwala na znaczne skrócenie zapisów, na przykład $\overline{a\overline{AB}}$ to prosta rzutowa przechodząca przez punkt a i punkt przecięcia prostych $\overline{A}$, $\overline{B}$, a $\overline{\overline{ab}A}$ to punkt przecięcia prostej A i prostej przechodzącej przez punkty a, b.

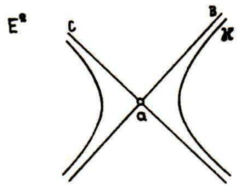
Stożkowe

Stożkowa to przekrój stożka obrotowego dowolną płaszczyzną. Ponieważ nie będziemy tutaj rozważać przypadków zdegenerowanych, więc przez stożkową rozumieć będziemy tylko przekrój stożka płaszczyzną nie zawierającą jego wierzchołka, czyli elipsę, hiperbolę i parabolę.

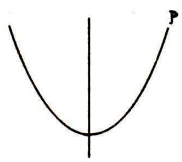
Zauważmy, że każda elipsa jednoznacznie wyznacza swoje wnętrze i zewnętrze. Istotnie, punkt a jest **punktem wewnętrznym** elipsy $\mathcal{E}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta z pęku a^* jest sieczną (tj. przecina $\mathcal{E}$ w dwóch punktach).



Rys. 4a



Rys. 4b

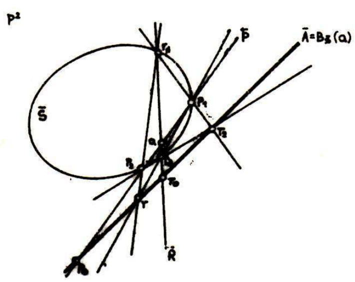


Rys. 4c

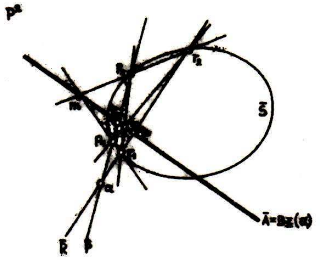
Jeśli natomiast punkt b jest **punktem zewnętrznym**, to pęk b^* zawiera proste sieczne, zewnętrzne (tj. rozłączne z $\mathcal{E}$) i dokładnie dwie proste styczne do $\mathcal{E}$ (tj. mające dokładnie jeden punkt wspólny z $\mathcal{E}$). Z kolei, jeśli punkt c leży na $\mathcal{E}$, to pęk c^* zawiera dokładnie jedną prostą styczną do $\mathcal{E}$ w punkcie c, a pozostałe proste w pęku c^* są siecznymi (rys. 4a). Powyższe własności nie ulegają zmianie, gdy każdą prostą A uzupełnimy jej kierunkiem $[A]$, czyli gdy płaszczyznę $\mathbf{E}^2$ rozszerzymy do $\overline{\mathbf{E}}^2$. Ponadto prosta w nieskończoności L_∞ jest prostą zewnętrzną, bo każdy pęk $[A]^*$ zawiera zarówno proste zewnętrzne, jak i sieczne.

Rozpatrzmy teraz dowolną hiperbolę $\mathcal{H}$ (rys. 4b). Punkt a będący punktem przecięcia jej asymptot, w myśl powyższego kryterium jest punktem zewnętrznym, zatem pęk a^* powinien zawierać dwie proste styczne do rozszerzenia rzutowego $\overline{\mathcal{H}}$ hiperboli $\mathcal{H}$. Prostymi tymi są jej asymptoty B, C. Rozszerzając zatem płaszczyznę $\mathbf{E}^2$ rozszerzyć musimy również hiperbolę $\mathcal{H}$ kierunkami jej asymptot. Analogicznie postępujemy w odniesieniu do dowolnej paraboli $\mathcal{P}$ (rys. 4c), uzupełniając ją kierunkiem jej osi. Prostą rzutową styczną w tym punkcie do tak rozszerzonej paraboli jest wówczas prosta w nieskończoności.

Powyższe rozważania wykazują, że na płaszczyźnie rzutowej $\mathbf{P}^2$ stożkowe są nierozróżnialne, a to czy dana stożkowa rzutowa $\overline{S}$ jest elipsą, hiperbolą czy parabolą zależy wyłącznie od tego, jak względem $\overline{S}$ położona jest prosta rzutowa, którą usuwamy z $\mathbf{P}^2$ przechodząc do $\mathbf{E}^2$. Upraszcza to znacznie badanie afinicznych własności stożkowej, gdyż wystarczy zbadać odpowiednie własności stożkowej na płaszczyźnie rzutowej, a następnie zinterpretować je dla elipsy, hiperboli i paraboli. Co więcej, takie przeniesienie rozważań z płaszczyzny euklidesowej na jej rzutowe rozszerzenie pozwala również na badanie własności niezmienniczych ze względu na podobieństwa płaszczyzny euklidesowej. Ilustrację tej metody stanowią dalsze nasze rozważania.

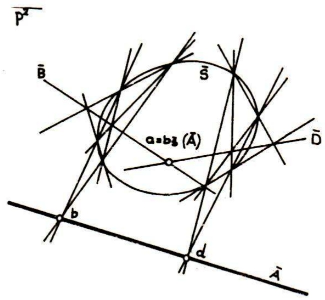


Rys. 5a

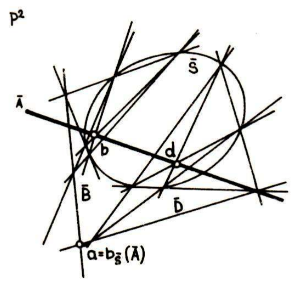


Rys. 5b

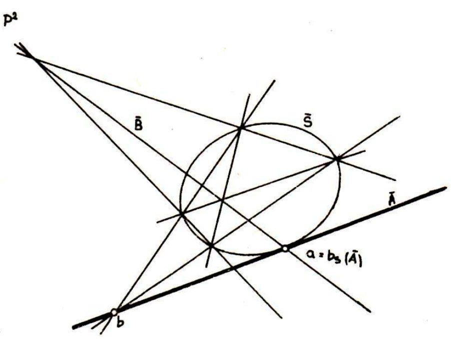
Ustalmy na płaszczyźnie rzutowej $\mathbf{P}^2$ dowolną stożkową $\overline{S}$ i dowolny, nie leżący na niej, punkt a. Na każdej prostej siecznej $\overline{P}$ z pęku a^*, która przecina $\overline{S}$ w punktach p_1, p_2, leży dokładnie jeden taki punkt p_0, że pary (p_1, p_2), (a, p_0) przedzielają się harmonicznie. Dowodzi się, że wszystkie takie czwarte punkty harmoniczne leżą na jednej prostej rzutowej $\overline{A}$, którą nazywamy **biegunową** punktu a i oznaczamy symbolem $\mathrm{B}_{\overline{S}}(a)$. Biegunową $\mathrm{B}_{\overline{S}}(a)$ punktu a, nie leżącego na $\overline{S}$, skonstruować możemy w oparciu o własności czworokąta zupełnego (rys. 5a,b). Prowadzimy w tym celu dwie różne proste sieczne $\overline{P}$, $\overline{R}$ z pęku a^* i wyznaczamy ich punkty przecięcia p_1, p_2, r_1, r_2 ze stożkową $\overline{S}$. Punkt a jest punktem przekątnym czworokąta zupełnego $p_1p_2r_1r_2$, a punkty $m = \overline{p_1r_1}\,\overline{p_2r_2}$, $n = \overline{p_1r_2}\,\overline{p_2r_1}$ są pozostałymi dwoma jego punktami przekątnymi. Zatem prosta $\overline{A} = \overline{mn}$ jest biegunową punktu a, bo czwórki (a, p_0, p_1, p_2), (a, r_0, r_1, r_2) są harmoniczne. Biegunowa punktu wewnętrznego (rys. 5a) jest prostą zewnętrzną, a biegunowa punktu zewnętrznego (rys. 5b) – prostą sieczną. Przyporządkowując ponadto każdemu punktowi c stożkowej $\overline{S}$ prostą $\overline{C}$ styczną do $\overline{S}$ w punkcie c, jako jego biegunową $\mathrm{B}_{\overline{S}}(c)$, otrzymujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami i prostymi płaszczyzny $\mathbf{P}^2$, bo każda prosta $\overline{B}$ jest biegunową jakiegoś punktu b, który nazywamy **biegunem** prostej $\overline{B}$ i oznaczamy symbolem $\mathrm{b}_{\overline{S}}(\overline{B})$. Odpowiedniość tę nazywamy **korelacją biegunową** wyznaczoną przez stożkową $\overline{S}$.



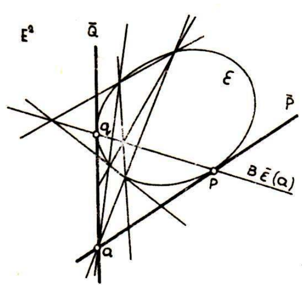
Rys. 5c



Rys. 5d



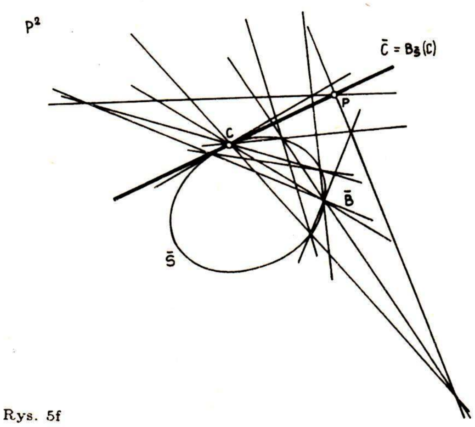
Rys. 5e



Rys. 5g

Korelacja biegunowa jest inwolucją, to znaczy dla dowolnej prostej rzutowej $\overline{A}$ i dowolnego punktu a zachodzi $\overline{A} = \mathrm{B}_{\overline{S}}(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \mathrm{b}_{\overline{S}}(\overline{A})$. Ponadto biegunowe punktów leżących na jednej prostej $\overline{A}$ należą do jednego pęku a^* i $a = \mathrm{b}_{\overline{S}}(\overline{A})$, a bieguny prostych należących do jednego pęku b^* leżą na jednej prostej $\overline{B}$ i $\overline{B} = \mathrm{B}_{\overline{S}}(b)$. Powyższe własności korelacji biegunowej umożliwiają konstrukcję bieguna dowolnej prostej rzutowej (rys. 5c,d,e) oraz biegunowej punktu c leżącego na stożkowej $\overline{S}$ (rys. 5f).

Dla skonstruowania bieguna $\mathrm{b}_{\overline{S}}(\overline{A})$ prostej $\overline{A}$ wystarczy bowiem znaleźć, w oparciu o poprzednio podaną konstrukcję, biegunowe $\mathrm{B}_{\overline{S}}(b)$, $\mathrm{B}_{\overline{S}}(d)$ dwóch różnych punktów b, d leżących na $\overline{A}$ i nie leżących na $\overline{S}$. Punkt $a = \overline{BD}$ jest wówczas biegunem prostej $\overline{A}$.



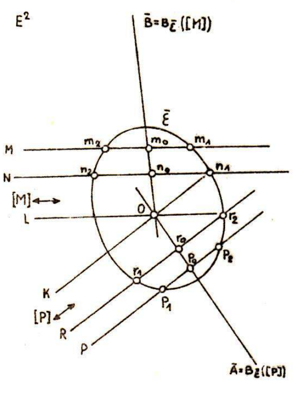
Rys. 5f

Jeżeli $\overline{A}$ jest prostą styczną do $\overline{S}$, to do znalezienia punktu styczności wystarczy wyznaczenie biegunowej $\mathrm{B}_{\overline{S}}(b)$ dla jednego punktu b nie leżącego na $\overline{S}$ i leżącego na $\overline{A}$, bo $\mathrm{B}_{\overline{S}}(b)$ przecina $\overline{S}$ w punkcie styczności prostej $\overline{A}$. Z kolei biegunową $\mathrm{B}_{\overline{S}}(c)$ punktu c, leżącego na $\overline{S}$ (czyli styczną do $\overline{S}$ w punkcie c), znajdujemy konstruując biegun $\mathrm{b}_{\overline{S}}(\overline{A})$ dowolnej prostej siecznej $\overline{A}$ z pęku c^*. Prosta $\overline{C} = c\mathrm{b}_{\overline{S}}(\overline{A})$ jest wówczas biegunową punktu c.

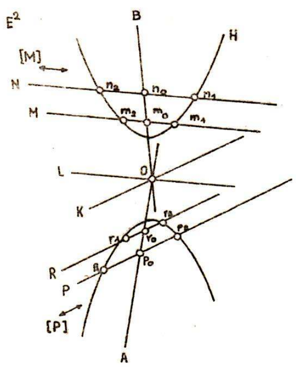
Zauważmy, że powyższe konstrukcje stanowią rozwiązanie wielu zadań konstrukcyjnych na płaszczyźnie euklidesowej. Na przykład, proste styczne do elipsy $\mathcal{E}$ przechodzące przez dany punkt zewnętrzny a skonstruować możemy (za pomocą samej linijki!) znajdując (rys. 5g) punkty przecięcia p, q biegunowej $\overline{A} = \mathrm{B}_{\overline{S}}(a)$ punktu a ze stożkową $\mathcal{E}$, bo proste $P = ap$, $Q = aq$ są styczne do $\mathcal{E}$.

Mówimy, że proste $\overline{A}$, $\overline{B}$ są **sprzężone** (względem stożkowej $\overline{S}$), gdy prosta $\overline{A}$ przechodzi przez biegun prostej $\overline{B}$. Z własności korelacji biegunowej wynika, że sprzężenie prostych jest relacją symetryczną, bo prosta $\overline{A}$ przechodzi przez biegun prostej $\overline{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $\overline{B}$ przechodzi przez biegun prostej $\overline{A}$.

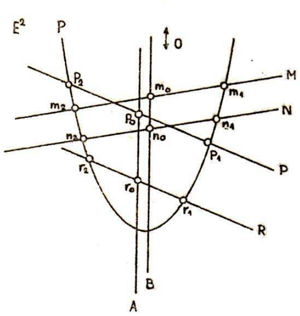
Ponadto w każdym takim pęku a^*, że a nie leży na stożkowej $\overline{S}$, sprzężenie prostych z tego pęku jest inwolucją. Inwolucja ta jest eliptyczna, gdy punkt a jest punktem wewnętrznym stożkowej $\overline{S}$, i hiperboliczna, gdy a jest punktem zewnętrznym. Prostymi stałymi inwolucji w tym drugim przypadku są proste styczne do $\overline{S}$ (**proste samosprzężone**). Analogicznie określa się sprzężenie punktów względem $\overline{S}$ i inwolucje na prostych rzutowych, nie będących stycznymi do $\overline{S}$. Sprzężenie punktów na prostej zewnętrznej jest inwolucją eliptyczną, a na prostej siecznej – hiperboliczną (punktami stałymi są punkty stożkowej $\overline{S}$).



Rys. 6a



Rys. 6b



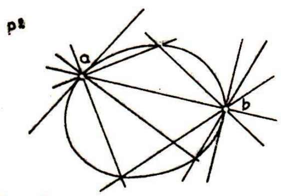
Rys. 6c

Ustalmy teraz dowolną stożkową S na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbf{E}^2$. Dołączając do $\mathbf{E}^2$ prostą w nieskończoności L_∞ otrzymujemy rozszerzenie $\overline{\mathbf{E}}^2$ płaszczyzny $\mathbf{E}^2$ i rzutowe rozszerzenie $\overline{S}$ stożkowej S. Przypominamy, że $\overline{S} = S$, gdy S jest elipsą, lub $\overline{S}$ powstaje z S przez dołączenie kierunków jej asymptot (gdy S jest hiperbolą), lub kierunku jej osi (gdy S jest parabolą). Poprowadźmy dowolną prostą sieczną P, która przecina S w punktach p_1, p_2, i wyznaczmy środek p_0 cięciwy (p_1, p_2). Zgodnie z naszymi wcześniejszymi ustaleniami czwórka $(p_1, p_2, [P], p_0)$ jest harmoniczna i punkt p_0 leży na biegunowej $\overline{A} = B_{\overline{S}}([P])$ punktu $[P]$ (względem $\overline{S}$). Oznacza to, że dla dowolnej prostej siecznej R o kierunku $[P]$ (czyli równoległej do P), przecinającej S w punktach r_1, r_2, punkt $r_0 = \overline{AR}$ jest środkiem cięciwy (r_1, r_2). Powtarzając nasze rozważania dla prostej siecznej M, która nie jest równoległa do P, stwierdzamy, że dla każdej siecznej N, równoległej do M, środki m_0, n_0 cięciw (m_1, m_2), (n_1, n_2) leżą na biegunowej $\overline{B}$ punktu $[M]$. Ponieważ proste $\overline{A}$, $\overline{B}$ są biegunowymi dwóch różnych kierunków $[P]$, $[M]$, więc punkt $o = \overline{AB}$ jest biegunem prostej L_∞. Ponadto prosta $\overline{K} = o[P]$ jest biegunową kierunku $[A]$ (czyli proste $\overline{A}$, $\overline{K}$ są sprzężone w pęku o^*, bo o jest biegunem L_∞, a $[P]$ jest biegunem $\overline{A}$. Analogicznie stwierdzamy, że proste $\overline{B}$ i $\overline{L} = o[M]$ są sprzężone w pęku o^*. Punkt o będący biegunem prostej w nieskończoności L_∞ względem $\overline{S}$, nazywamy **środkiem stożkowej** S, a proste z pęku o^* (czyli biegunowe punktów niewłaściwych) – **średnicami** S. Dwa kierunki (punkty niewłaściwe) nazywamy sprzężonymi, gdy są kierunkami średnic sprzężonych. Z rozważań naszych wynika zatem, że dla dowolnej prostej siecznej P średnica z nią sprzężona połowi wszystkie cięciwy równoległe do P.

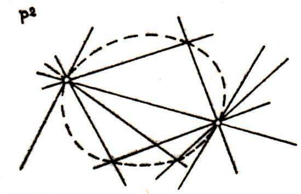
Postępując teraz zgodnie z poprzednio podaną zasadą rozpatrujemy poszczególne przypadki. Ponieważ prosta L_∞ jest prostą zewnętrzną elipsy $\mathcal{E}$, więc środek o jest punktem wewnętrznym i każda prosta z pęku o^* jest sieczną (rys. 6a), a sprzężenie średnic jest inwolucją eliptyczną. W przypadku hiperboli $\mathcal{H}$ (rys. 6b) prosta L_∞ jest sieczną stożkowej $\overline{\mathcal{H}}$, a środek o jest punktem zewnętrznym. Sprzężenie średnic hiperboli $\mathcal{H}$ jest inwolucją hiperboliczną i jeśli dwie różne średnice są sprzężone, to jedna z nich jest sieczną, a druga zewnętrzną. Zarówno w przypadku elipsy, jak i hiperboli środek jest punktem właściwym i środkiem symetrii stożkowej. Inaczej przedstawia się to dla paraboli (rys. 6c). Ponieważ prosta L_∞ jest styczna do paraboli $\overline{\mathcal{P}}$, więc środek o stożkowej $\mathcal{P}$ jest punktem niewłaściwym i wszystkie średnice są równoległe. Zatem na płaszczyźnie euklidesowej parabola nie posiada środka.

Podane pojęcia środka, średnic i średnic sprzężonych są pojęciami afinicznymi i ich konstrukcje są niezmiennicze ze względu na przekształcenia afiniczne, bo do ich wykonania wystarcza wyznaczanie prostych równoległych i środka odcinka. Afinicznymi nie są już oczywiście pojęcia osi, ognisk i kierownic stożkowych. Z reguły określa się je w oparciu o własności metryczne płaszczyzny euklidesowej, co determinuje ich konstrukcje. Na przykład ogniska elipsy $\mathcal{E}$ bywają określane jako takie punkty f_1, f_2, że dla dowolnego punktu p elipsy $\mathcal{E}$ suma odległości punktu p od punktów f_1, f_2 jest stała. Można jednakże postąpić inaczej i określić ogniska $\mathcal{E}$ jako takie punkty f_1, f_2, że sprzężenie prostych w każdym z pęków f_1^*, f_2^* jest ortogonalne, to znaczy każde dwie proste sprzężone w tych pękach są prostopadłe. W tym określeniu własności metryczne są zastąpione przez prostopadłość prostych, która jest niezmiennicza ze względu na podobieństwa. Powrócimy do tego w części drugiej. Tu omówimy pokrótce ważniejsze własności rzutowe i konstrukcje stożkowych.

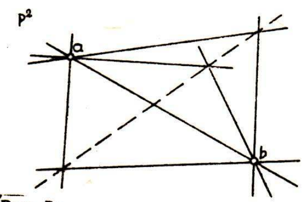
Twierdzenia Steinera i konstrukcja Newtona-Maclaurina



Rys. 7a



Rys. 7b



Rys. 7c

Jednym z najważniejszych twierdzeń dotyczących stożkowych na płaszczyźnie $\mathbf{P}^2$ jest następujące

Twierdzenie Steinera (rys. 7a). Niech a, b, będą dwoma (różnymi) punktami stożkowej $\overline{S}$. Dla każdego punktu p tej stożkowej prostej $\overline{ap}$ przyporządkowujemy $\overline{bp}$. Prostej $\overline{ab}$ z pęku a^* odpowiada prosta styczna do $\overline{S}$ w punkcie b, a prostej stycznej do $\overline{S}$ w punkcie a – prosta $\overline{ab}$. Tak określone odwzorowanie pęku a^* na pęk b^* jest przekształceniem rzutowym (i nie jest rzutem perspektywicznym).

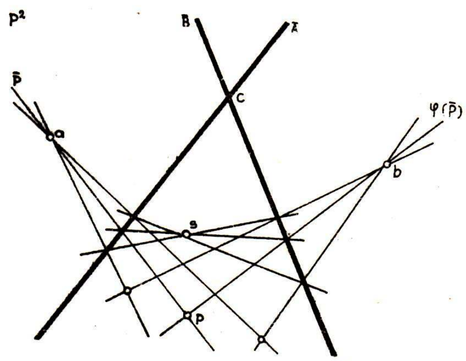
Zachodzi również

Twierdzenie Steinera odwrotne (rys. 7b). Niech a, b będą dwoma różnymi punktami płaszczyzny rzutowej $\mathbf{P}^2$. Jeżeli przekształcenie rzutowe pęku a^* na pęk b^* nie jest rzutem perspektywicznym, to zbiór punktów przecięcia odpowiadających sobie prostych jest stożkową przechodzącą przez punkty a, b.

Dodajmy w tym miejscu, że przekształcenie rzutowe φ pęku a^* na pęk b^* jest rzutem perspektywicznym wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\overline{ab}) = \overline{ab}$ (rys. 7c).

Stwierdziliśmy poprzednio, że każde przekształcenie rzutowe pęku a^* na różny od niego pęk b^* może być zrealizowane jako złożenie dwóch rzutów perspektywicznych. Ustalmy punkty a, b, s, proste $\overline{A}$, $\overline{B}$ i załóżmy, że $\overline{A} \neq \overline{B}$, punkty a, b, s nie leżą ani na $\overline{A}$, ani na $\overline{B}$ i punkty a, b, $c = \overline{AB}$ są trójkami niewspółliniowe. Przyjęte założenia gwarantują, że przekształcenie rzutowe φ pęku a^* na pęk b^*, będące złożeniem rzutów perspektywicznych pęku a^* na „pośredni" pęk s^* o osi $\overline{A}$ i pęku s^* na pęk b^* o osi $\overline{B}$, nie jest rzutem perspektywicznym. Zgodnie z odwrotnym twierdzeniem Steinera zbiór punktów $p = \overline{P}\varphi(\overline{P})$ takich, że $\overline{P}$ jest dowolną prostą z pęku a^*, jest stożkową przechodzącą przez punkty a, b (rys. 8). Otrzymaliśmy zatem steinerowską konstrukcję stożkowej opisywaną równaniem

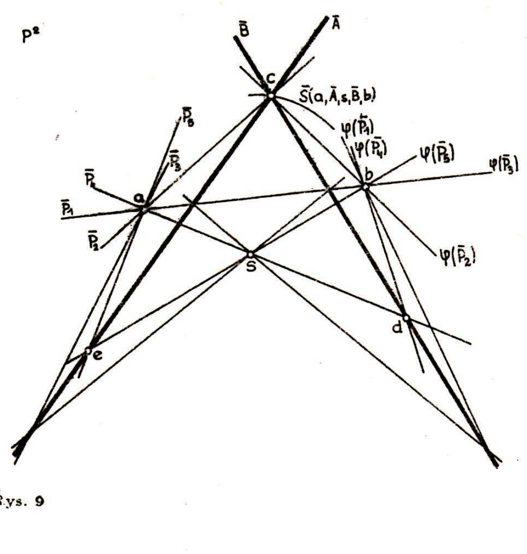
$$pa\overline{A}s\overline{B}bp = 0\,.$$



Rys. 8

Stożkową otrzymaną za pomocą powyższej konstrukcji oznaczamy tutaj symbolem $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$. W celu skonstruowania punktu p, leżącego na tej stożkowej, prowadzimy dowolną prostą $\overline{P}$ z pęku a^*, a następnie znajdujemy kolejno punkt $\overline{PA}$, prostą $\overline{\overline{PA}s}$, punkt $\overline{\overline{PA}s\overline{B}}$ i prostą $\varphi(\overline{P}) = \overline{\overline{\overline{PA}s\overline{B}}b}$ z pęku b^*. Zauważmy, że biorąc pod uwagę zmienne proste $\overline{P}$, $\overline{\overline{PA}s}$ i $\varphi(\overline{P})$ oraz stałe punkty a, s, b, i stałe proste $\overline{A}$, $\overline{B}$ otrzymujemy następujące

Twierdzenie Newtona-Maclaurina. Jeżeli trzy boki trójkąta przechodzą przez trzy stałe punkty niewspółliniowe, a dwa jego wierzchołki poruszają się po stałych prostych, to trzeci wierzchołek zakreśla stożkową.



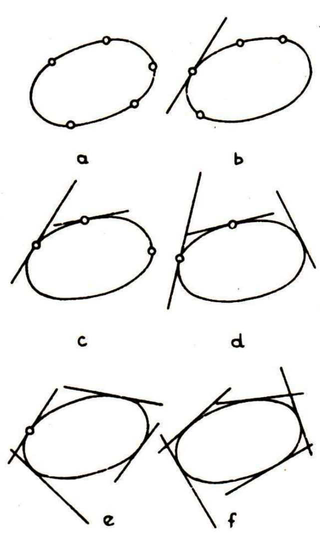
Rys. 9

Uwzględniając to twierdzenie omawianą tutaj konstrukcję nazywamy **Konstrukcją Newtona-Maclaurina**.

Przyjmując teraz kolejno (rys. 9): $\overline{P}_1 = \overline{ab}$, $\overline{P}_2 = \overline{a(\overline{AB})}$, $\overline{P}_3 = \overline{a(((\overline{ab})\overline{B})s)\overline{A})}$, $\overline{P}_4 = \overline{as}$, $\overline{P}_5 = \overline{a((\overline{bs})\overline{A})}$, stwierdzamy, że punkty b, $c = \overline{AB}$, a, $d = \overline{as}\,\overline{B}$ i $e = \overline{A}\,\overline{sb}$ leżą na stożkowej $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$, a proste $\varphi(\overline{P}_1)$ i $\overline{P}_3$ są do niej styczne w punktach b, a.

Otrzymaliśmy zatem pięć różnych punktów a, b, c, d, e stożkowej $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$, które są trójkami niewspółliniowe. Na odwrót, jeśli dane są trójkami niewspółliniowe punkty a, b, c, d, e, to przyjmując $\overline{A} = \overline{ce}$, $\overline{B} = \overline{cd}$ i $s = \overline{ad}\,\overline{be}$ znaleźć możemy stożkową $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$ przechodzącą przez te punkty. Pięć punktów trójkami niewspółliniowych, wyznacza zatem stożkową przez nie przechodzącą. Zachodzi ogólniejsze twierdzenie Braikenridge'a-Maclaurina, które orzeka, że stożkowa jest jednoznacznie wyznaczona przez (rys. 10):

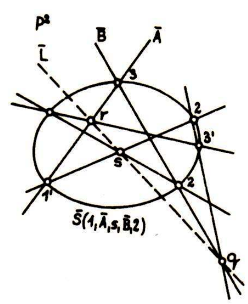
(a) pięć różnych punktów,
(b) cztery swoje punkty i styczną przechodzącą przez jeden z nich,
(c) trzy swoje punkty i dwie styczne przechodzące przez dwa z tych punktów,
(d) trzy swoje styczne i dwa swoje punkty leżące na dwóch z nich,
(e) cztery swoje styczne i punkt leżący na jednej z nich,
(f) pięć różnych swoich stycznych.



Rys. 10

Z twierdzenia tego wynika w szczególności równość $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b) = \overline{S}(b, \overline{B}, s, \overline{A}, a)$.

Ustalmy teraz dowolny punkt p stożkowej $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$, różny od punktów a, b, $c = \overline{AB}$, $d = \overline{as}\,\overline{B}$, $e = \overline{A}\,\overline{sb}$, i przyjmijmy nowe oznaczenia: $1 = a$, $2 = b$, $3 = c$, $1' = d$, $2' = e$, $3' = p$, $\overline{pa}\,\overline{A} = r$, $\overline{pb}\,\overline{B} = q$ i $\overline{sr} = \overline{L}$ (rys. 11). Zgodnie z określeniem stożkowej $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$ mamy wówczas równość $\overline{LB} = q$, czyli punkty r, s, q są współliniowe.



Rys. 11

Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem Braikenridge'a-Maclaurina, stożkowa $\overline{S}(a, \overline{A}, s, \overline{B}, b)$ nie zależy od wyboru punktów 1, 2, 3, 1', 2', 3' leżących na niej, więc wykazaliśmy

Twierdzenie Pascala. Jeżeli sześciokąt 1231'2'3' jest wpisany w stożkową, to punkty $s = \overline{12'}\,\overline{21'}$, $r = \overline{13'}\,\overline{31'}$ i $q = \overline{23'}\,\overline{32'}$ są współliniowe.

Zauważmy ponadto, że z dotychczasowych naszych rozważań wynika również

Twierdzenie Pascala odwrotne. Jeżeli żadne trzy spośród punktów 1, 2, 3, 1', 2', 3' nie są współliniowe, a punkty $s = \overline{12'}\,\overline{21'}$, $r = \overline{13'}\,\overline{31'}$, $q = \overline{23'}\,\overline{32'}$ są współliniowe, to istnieje stożkowa przechodząca przez tych sześć punktów.

Prosta $\overline{L} = \overline{(\overline{12'}\,\overline{21'})(\overline{13'}\,\overline{31'})}$, o której mowa w powyższych twierdzeniach, nosi nazwę **prostej Pascala**, a ostatnie twierdzenie, łącznie z twierdzeniem Braikenridge'a-Maclaurina, stanowi podstawę konstrukcji Pascala, w których przy ustalonych punktach 1, 2, 3, 1', 2' zmienną jest prosta Pascala $\overline{L}$. Ponieważ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy prostymi Pascala $\overline{L}$ i prostymi $\overline{P} = a(\overline{L}\,\overline{31'})$, więc steinerowska konstrukcja Newtona-Maclaurina jest jednocześnie konstrukcją Pascala i stanowi naturalny pomost pomiędzy dwoma wielkimi twierdzeniami dotyczącymi stożkowych – twierdzeniem Steinera i twierdzeniem Pascala.

Warto w tym miejscu wspomnieć, że konstrukcja Newtona-Maclaurina łatwo daje się uogólniać i służyć może do wyznaczania krzywych algebraicznych wyższych stopni. Na przykład krzywa stopnia trzeciego może być wyznaczona przez konstrukcję opisaną równaniem

$$xa\overline{A}b\overline{B}x\overline{C}c\overline{D}dx = 0\,.$$