Granica pewnego ciągu

Marcin E. KUCZMA, Warszawa

Prowadząc zajęcia (szkolne, uniwersyteckie) z elementarnej analizy matematycznej często przerabiam – przy pierwszym zetknięciu z potęgowym rozwinięciem funkcji wykładniczej – takie zadanie:

Niech x będzie ustaloną liczbą dodatnią. Który wyraz szeregu

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots \tag{1}$$

jest największy?

Zadanie jest łatwiutkie; składniki $x^k/k!$ rosną dla $k \leq [x]$, a następnie maleją. Tak więc największy jest wyraz o numerze $[x]$; jedynie gdy x jest liczbą naturalną, maksimum jest realizowane przez dwa wyrazy: o numerach x i $x-1$.

Znacznie ciekawsze jest następne pytanie:

Przerwijmy sumowanie szeregu (1) „w momencie przesilenia". Stosunek otrzymanej w ten sposób sumy częściowej do pełnej sumy szeregu (1) jest liczbą z przedziału $(0;1)$. Co można powiedzieć o zachowaniu tej wartości, gdy x dąży do nieskończoności?

Skoro problem stawiamy w formie granicznej, wystarczy ograniczyć uwagę do naturalnych wartości x. Piszmy więc n zamiast x; jest obojętne, czy sumowanie przerwiemy na wyrazie o numerze n, czy $n-1$, bowiem pojedynczy składnik $n^n/n!$ jest – w porównaniu z całą sumą, równą e^n – wielkością pomijalną (uzasadnienie niżej, po wzorze (5)). Tak dochodzimy do właściwego zadania:

Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = \mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}; \tag{2}$$

jeśli istnieje – znaleźć jej wartość.

Zadanie ma walor dydaktyczny: dopuszcza różne sposoby podejścia. Warto do niego kilkakrotnie powracać w ciągu, powiedzmy, dwóch lat zajęć z jedną grupą studencką, używając coraz bardziej zaawansowanych metod. Im mocniejszy aparat, tym krótsze rozwiązanie – to jasne. Pierwsze (lub raczej: zerowe) podejście może być eksperymentalne, z użyciem mikrokomputera. Wynik: 1/2. (Zbieżność ciągu (2) jest jednak dość powolna, wyraźna stabilizacja następuje dopiero dla dużych wartości n; przezwyciężenie trudności związanych ze wzrostem błędu obliczeń wymaga pewnej wprawy przy układaniu programu.) Niemniej, wynik 1/2 jest prawidłowy: w przybliżeniu połowa sumy (1) jest (dla dużych n) zawarta w części „wznoszącej". Oczywiście eksperyment – to jeszcze nie dowód.

Przedstawimy niżej cztery dowody równości

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Pierwszy z nich, całkiem elementarny, nie wybiega poza standardowy kurs „pierwszej analizy"; najmocniejsze z użytych w nim twierdzeń to wzór Stirlinga (por. [2], rozdział XI, § 7; 406):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}\alpha_n, \qquad \text{gdzie} \quad 1 < \alpha_n < \frac{12n}{12n-1}; \tag{4}$$

naprawdę będzie tu potrzebna tylko nierówność $\alpha_n > 1$, czyli dolne oszacowanie dla $n!$:

$$n! > \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}. \tag{5}$$

(Z tego oszacowania wynika, między innymi, uczyniona wcześniej uwaga, że składnik $n^n/n!$ jest wielkością pomijalną w porównaniu z e^n; rzeczywiście, na mocy (5) $\mathrm{e}^{-n}n^n/n! < (2\pi n)^{-1/2} \to 0$ przy $n \to \infty$.)

W drugim dowodzie będziemy korzystać z całkowej postaci reszty we wzorze Taylora oraz także z wzoru Stirlinga, a dokładniej, z tego, że ciąg (α_n) we wzorze (4) dąży do jedności, czyli zachodzi równość asymptotyczna

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \qquad \text{przy} \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

(Tu i dalej napis: $u_n \approx v_n$, stosowany dla ciągów o wyrazach dodatnich, oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} u_n/v_n = 1$.)

W trzecim dowodzie będą nam dodatkowo potrzebne najprostsze własności funkcji gamma oraz twierdzenie Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

Czwarte podejście jest probabilistyczne: wzór (3) okaże się prostym wnioskiem z Centralnego Twierdzenia Granicznego (zresztą całe rozpatrywane tu zagadnienie jest „probabilistyczne": niesie w sobie po prostu pewien element informacji o rozkładzie Poissona).

Pojęcia i fakty użyte w pierwszych dwóch dowodach można znaleźć w każdym podręczniku analizy (wymieńmy dla przykładu książki [2] i [3]); zastosowane w trzecim dowodzie twierdzenie o przejściu granicznym znajdziemy w dowolnym podręczniku zawierającym wykład całki Lebesgue'a (np. [4]). Jako odsyłacz dla probabilistycznej metody czwartego dowodu może służyć książka W. Fellera [1].

Dowód pierwszy. W szeregu

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \frac{n^4}{4!} + \ldots$$

wyodrębnimy dwa bloki po n składników oraz „ogon":

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}, \quad B_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n^k}{k!}, \quad C_n = \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{n^k}{k!}.$$

Oczywiście

(7) $$A_n + B_n + C_n = e^n.$$

Pokażemy, że w porównaniu z ciągiem (e^n) wielkości A_n i B_n są w przybliżeniu równe, natomiast „ogon" C_n jest wielkością pomijalną. Stąd łatwo wyniknie dowodzona teza (3).

Przekształcamy sumy definiujące B_n i A_n stosując (odpowiednio) podstawienie: $k = n + j$ oraz $k = n - j - 1$:

(8) $$B_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^{n+j}}{(n+j)!} = \frac{n^n}{n!} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^{n+j}}{(n+j)!} = \\ = \frac{n^n}{n!}\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^j}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+j)}\right);$$

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^{n-j-1}}{(n-j-1)!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^{n-j-1}}{(n-j-1)!} = \\ = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j)}{n^j}\right);$$

a ponieważ

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!},$$

dostajemy

(9) $$A_n = \frac{n^n}{n!}\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j)}{n^j}\right).$$

W otrzymanych równościach (8) i (9) oznaczmy wskaźnik sumowania znów przez k i odejmijmy te równości stronami:

(10) $$B_n - A_n = \frac{n^n}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} F(n,k),$$

gdzie

$$F(n,k) = \frac{n^k}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)} - \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{n^k},$$

a po sprowadzeniu do wspólnego mianownika:

(11) $$F(n,k) = \frac{n^{2k} - (n^2-1)\cdot\ldots\cdot(n^2-k^2)}{n^k(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)} \quad \text{dla} \quad k = 1,\ldots,n-1.$$

Weźmy pod uwagę wielomian k-tego stopnia

$$P(t) = \prod_{j=1}^{k}(n^2 - j^2 t).$$

Ma on k pierwiastków rzeczywistych $t_1, \ldots, t_k$, gdzie $t_j = n^2/j^2$. Najmniejszym z nich jest liczba $t_k = n^2/k^2 > 1$. Ponieważ $\lim_{t \to -\infty} P(t) = \infty$, wielomian $P(t)$ jest funkcją wypukłą w przedziale $(-\infty; t_k)$. Jeśli więc $L(t)$ jest funkcją liniową taką, że $L(0) = P(0)$, $L'(0) = P'(0)$, to dla $t \in (-\infty; 0) \cup (0; t_k)$ zachodzi nierówność

$$P(t) > L(t). \tag{12}$$

(Wykresem funkcji L jest prosta styczna do wykresu P w punkcie $(0, P(0))$; nierówność (12) orzeka, że w przedziale $(-\infty; t_k)$ wykres P leży powyżej wykresu L, z wyjątkiem samego punktu styczności; to zaś jest konsekwencją wypukłości P w tym przedziale.)

Wzór wyrażający funkcję L otrzymamy wymnażając czynniki wielomianu P i odrzucając składniki stopnia wyższego od 1:

$$L(t) = (n^2)^k - (n^2)^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{k} j^2 \right) t.$$

Nierówność (12) zachodzi w szczególności dla $t = 1$. Mamy więc

$$\prod_{j=1}^{k} (n^2 - j^2) > n^{2k} - n^{2k-2} \sum_{j=1}^{k} j^2.$$

To pozwala oszacować z góry wyrażenie (11):

$$F(n,k) < \frac{n^{2k-2} \sum_{j=1}^{k} j^2}{n^k (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)} = \frac{n^{k-2} \cdot \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)}{(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)} < \tag{13}$$

$$< \frac{n^{k-2} k^3}{(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)}.$$

Zajmiemy się teraz mianownikiem otrzymanego ułamka. Przyjmijmy, że $k \geq 2$. Gdy wykonamy mnożenie $(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)$, pogrupujemy składniki według potęg n i odrzucimy wszystkie składniki, w których n występuje w potędze różnej od $k-2$, dostaniemy nierówność

$$(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k) > \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} ij \cdot n^{k-2}.$$

Z kolei sumę iloczynów ij możemy przedstawić w postaci

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} ij = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{j=1}^{k} j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} j^2 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} k(k+1) \right)^2 - \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \right) =$$

$$= \frac{1}{24} k(k+1)(3k^2 - k - 2) \geq \frac{1}{8} k^4.$$

Zatem
$$(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k) > \frac{1}{8} k^4 n^{k-2};$$

obliczenie było prowadzone przy założeniu, że $k \geq 2$; ale ostatnia nierówność zachodzi także i dla $k = 1$.

Kontynuując szacowanie (13) otrzymujemy stąd nierówność

$$F(n,k) < \frac{8}{k}.$$

Z drugiej strony, z wzoru (11) widać, że $F(n,k) > 0$. Dostajemy więc następujące oszacowanie różnicy (10):

$$0 < B_n - A_n < 8 \frac{n^n}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < 8 \frac{n^n}{n!} \left(1 + \int_1^n \frac{dt}{t} \right) = 8 \frac{n^n}{n!} (1 + \ln n).$$

Korzystamy teraz z wzoru Stirlinga, a raczej z nierówności (5); otrzymujemy:

$$0 < (B_n - A_n) e^{-n} < \frac{8n^n e^{-n}}{n!} (1 + \ln n) < \frac{8(1 + \ln n)}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \to \infty} (B_n - A_n) e^{-n} = 0. \tag{14}$$

Zauważmy wreszcie, że

$$C_n = \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{2n+j}}{(2n+j)!} = \frac{n^{2n}}{(2n)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^{2n+j}}{(2n+j)!} =$$
$$= \frac{n^{2n}}{(2n)!} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^j}{(2n+1)\cdot \ldots \cdot (2n+j)} \right) <$$
$$< \frac{n^{2n}}{(2n)!} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^j}{(2n)^j} \right) = \frac{n^{2n}}{(2n)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{2n^{2n}}{(2n)!}.$$

Korzystając ponownie z nierówności (5) mamy

$$C_n e^{-n} < \frac{2n^{2n}e^{-n}}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{e}{4}\right)^n,$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty} C_n e^{-n} = 0$.

Wobec tego, zgodnie z (7),

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n)e^{-n} = \lim_{n\to\infty} (1 - C_n e^{-n}) = 1. \tag{15}$$

Relacje graniczne (14) i (15) prowadzą do końcowej konkluzji:

$$\lim_{n\to\infty} A_n e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left((A_n + B_n)e^{-n} - (B_n - A_n)e^{-n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Wynika stąd natychmiast dowodzona teza (3), bowiem ciągi (a_n) i $(A_n e^{-n})$ różnią się o składnik $e^{-n}n^n/n!$, który, jak pamiętamy, zgodnie z nierównością (5) jest mniejszy od $1/\sqrt{2\pi n}$, a więc dąży do zera:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(A_n + \frac{n^n}{n!} \right) e^{-n} = \lim_{n\to\infty} A_n e^{-n} = \frac{1}{2}.$$

Dowód drugi. Jeśli f jest funkcją określoną na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ i mającą pochodne wszystkich rzędów, to dla każdej liczby naturalnej n wartość funkcji f w dowolnym punkcie $x \in \mathbf{R}$ wyraża się wzorem Taylora (Maclaurina):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k + r_n(x),$$

przy czym ostatni składnik (reszta) może być przedstawiony w postaci całkowej (por. [2], rozdział IX, §4; 318):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\, ds.$$

Przyjmując $f(x) = e^x$, $x = n$ otrzymujemy

$$e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^n (n-s)^n e^s\, ds,$$

skąd wynika całkowe przedstawienie wyrazów rozważanego w zadaniu ciągu (2):

$$1 - a_n = \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^n (n-s)^n e^s\, ds. \tag{16}$$

(W ten sposób badanie pewnej sumy zastępujemy badaniem pewnej całki; tego typu zamiana z reguły jest korzystna.)

Przez podstawienie $s = nt$ sprowadzamy całkę (16) do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$:

$$1 - a_n = \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^1 (n - nt)^n e^{nt} n\, dt = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\, dt.$$

Na mocy wzoru Stirlinga (6) współczynnik przed całką równa się asymtpotycznie $\sqrt{n/2\pi}$. Mamy więc przy $n \to \infty$ równość asymptotyczną

$$1 - a_n \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_0^1 g(t)^n\, dt, \tag{17}$$

gdzie

$$g(t) = (1-t)e^t.$$

Idea dalszego postępowania jest taka: rozwinięcie potęgowe funkcji g wokół zera rozpoczyna się wyrazami $1-(t^2/2)+\ldots$, czyli tak samo, jak $\cos t$. Dla granicznego zachowania ciągu całek $\int g(t)^n\,dt$ po przedziale $\langle 0;1\rangle$ znaczące są jedynie wartości funkcji g blisko zera. Można więc oczekiwać, że ciąg tych całek będzie w swym zachowaniu asymptotycznym zbliżony do ciągu całek funkcji $(\cos t)^n$ po przedziale $\langle 0;1\rangle$, czy wręcz po przedziale $\langle 0;\pi/2\rangle$. Asymptotyka tego ciągu jest zaś dobrze znana: zachodzi równość

$$c_n=\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt\approx\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\quad\text{przy}\quad n\to\infty. \tag{18}$$

(Ponieważ fakt ten nie zawsze jest w podręcznikach wyraźnie wyeksponowany, podajemy dalej w Uwadze szkicowe uzasadnienie równości (18).)

Zajmiemy się teraz funkcją

$$h(t)=\frac{(1-t)e^t}{\cos t}=\frac{g(t)}{\cos t}.$$

Wykażemy, że

(19) funkcja h jest malejąca w przedziale $\langle 0;\pi/2\rangle$,

(20) $h(t)>e^{-2t^3}$ dla $t\in\left(0;\frac{3}{4}\right)$,

(21) $h(t)<1$ dla $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcja $\varphi(t)\cos t-(1-t)e^t$ ma dla $t>0$ pochodną $\varphi'(t)=te^t-\sin t>0$. Zatem funkcja $1-h(t)=\varphi(t)/\cos t$ jest rosnąca w $\langle 0;\pi/2)$ (licznik rośnie, mianownik maleje). Stąd wynikają własności (19) oraz (21), bo $h(0)=1$.

Dla dowodu (20) sauważmy, że z potęgowych rozwinięć funkcji e^t i $\cos t$ wynikają nierówności (słuszne dla $t\in(0;1)$):

$$g(t)>(1-t)\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3,$$

$$\cos t<1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3,$$

a ponieważ dla $t\in(0;3/4)$ mamy $t^2+t^3<1$, to

$$\frac{1}{h(t)}=\frac{\cos t}{g(t)}<\frac{1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3}{1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3}=1+\frac{2t^3}{2-t^2-t^3}<1+2t^3<e^{2t^3},$$

co dowodzi słuszności (20).

Będzie nam jeszcze potrzebna nierówność

$$\cos t<e^{-\frac{1}{2}t^2}\quad\text{dla}\quad t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right). \tag{22}$$

Oto uzasadnienie: niech $\psi(t)=e^{t^2/2}\cos t$. Ponieważ $\psi(0)=1$ oraz $\psi'(t)=\psi(t)(t-\operatorname{tg} t)<0$ dla $t\in(0;\pi/2)$, zatem $\psi(t)<1$, czyli zachodzi (22).

Przystępujemy do szacowania całki ze wzoru (17). Ustalmy liczbę $\delta\in(0;3/4)$. Korzystając kolejno z własności (19), (20), z monotoniczności funkcji $\cos t$ w przedziale $(0;\pi/2)$ i z nierówności (22) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)^n\,dt&>\int_0^\delta g(t)^n\,dt=\int_0^\delta (h(t)\cos t)^n\,dt>\\&>h(\delta)^n\int_0^\delta(\cos t)^n\,dt>e^{-2n\delta^3}\int_0^\delta(\cos t)^n\,dt=\\&=e^{-2n\delta^3}\left(c_n-\int_\delta^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt\right)>\\&>e^{-2n\delta^3}\left(c_n-\frac{\pi}{2}(\cos\delta)^n\right)>\\&>e^{-2n\delta^3}\left(c_n-\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}n\delta^2}\right)\end{aligned}$$

((c_n) jest ciągiem (18)).

Z drugiej strony, nierówność (21) orzeka, że $g(t) < \cos t$, a więc

$$\int_0^1 g(t)^n\,dt < \int_0^1 (\cos t)^n\,dt < \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt = c_n\,.$$

Łącząc otrzymane nierówności i dzieląc wszystkie człony przez c_n dostajemy nierówność podwójną

$$e^{-2n\delta^3}\left(1 - \frac{\pi}{2c_n}e^{-\frac{1}{2}n\delta^2}\right) < \frac{1}{c_n}\int_0^1 g(t)^n\,dt < 1$$

słuszną dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i dla dowolnego $\delta \in (0; 3/4)$.

Ustalmy wykładnik $p > 0$ i przyjmijmy $\delta = n^{-p}$ (dla dostatecznie dużych n jest to liczba z przedziału $(0; 3/4)$). Otrzymujemy:

$$\alpha_n(1 - \beta_n) < \frac{1}{c_n}\int_0^1 g(t)^n\,dt < 1\,, \tag{23}$$

gdzie

$$\alpha_n = e^{-2n^{1-3p}}, \qquad \beta_n = \frac{\pi}{2c_n}e^{-\frac{1}{2}n^{1-2p}}$$

Jeśli więc p jest liczbą z przedziału $(1/3; 1/2)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ (bo, zgodnie z (18), $c_n \approx \text{const} \cdot n^{-1/2}$), wobec czego lewy człon nierówności podwójnej (23) dąży do 1 i w konsekwencji środkowy jej człon też dąży do 1. Mamy zatem równość asymptotyczną

$$\int_0^1 g(t)^n\,dt \approx c_n \quad \text{przy} \quad n \to \infty\,,$$

która w połączeniu z (17) i (18) daje:

$$1 - a_n \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi}}c_n \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2}\,.$$

Granicą ciągu (a_n) jest więc liczba 1/2.

Uwaga. Dla kompletności uzasadnimy krótko równość (18): wykonując całkowanie „przez części" wprowadzamy zależność rekurencyjną $c_n = \frac{n-1}{n}c_{n-2}$, a z niej przez łatwą indukcję wzór $c_{n-1}c_n = \pi/2n$. Dla ciągu $b_n = \sqrt{n}c_n$ dostajemy stąd zależności: $b_n > b_{n-2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n-1}b_n = \pi/2$. Zatem ciągi (b_{2k-1}) i (b_{2k}) są rosnące i ograniczone, więc zbieżne do granic b', b'', przy czym $b'b'' = \pi/2$. Z określenia ciągu (c_n) wynika, że $c_{n+1} < c_n$, skąd $b_{n+1} < \sqrt{(n+1)/n}\,b_n$. Przechodząc z n do nieskończoności, raz przez wartości parzyste, drugi raz – przez nieparzyste, otrzymujemy związki: $b' \le b''$ i $b'' \le b'$. Wobec tego $b' = b'' = \sqrt{\pi/2} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, co jest równoważnym zapisem równości asymptotycznej (18).

Dowód trzeci. Początek jest taki sam, jak w dowodzie drugim: dochodzimy do przedstawienia całkowego (16), które przez zastosowanie podstawienia $s = n - t$ przybiera postać

$$1 - a_n = \frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n t^n e^{n-t}\,dt = \frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\,dt\,. \tag{24}$$

Dalej będzie nam przydatna funkcja Eulera

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

i jej najprostsze własności (por. [2], rozdział XIV, §5; 531):

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,;$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{dla } x \text{ niecałkowitych}\,.$$

Pierwszy z tych wzorów możemy przepisać jako

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!\,; \tag{25}$$

drugi zaś daje dla $x = 1/2$ równość $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, czyli

(26)
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt = \sqrt{\pi}\,.$$

Wracając do (24) i korzystając z (25) otrzymujemy:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\, dt = \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt - \frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_n^\infty t^n e^{-t}\, dt\,.$$

Stąd przez podstawienie $t = n + \sqrt{n}x$

(27)
$$a_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty (n + \sqrt{n}x)^n e^{-n-\sqrt{n}x}\sqrt{n}\, dx = \frac{e^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!}\int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x}\, dx\,.$$

Oznaczmy funkcję podcałkową przez $f_n(x)$ i weźmy pod uwagę jej logarytm:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x}\,;$$

$$\ln f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}x = x^2\left(\left(\frac{\sqrt{n}}{x}\right)^2 \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \frac{\sqrt{n}}{x}\right).$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$F(t) = t^{-2}\ln(1+t) - t^{-1} \quad \text{dla} \quad t > 0\,;$$

wyrażenie $f_n(x)$ możemy wówczas przepisać w postaci

(28)
$$f_n(x) = \exp\left(x^2 F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Wykażemy, że funkcja F jest rosnąca. Obliczamy jej pochodną:

$$F'(t) = -2t^3\ln(1+t) + \frac{t^{-2}}{1+t} + t^{-2} = t^{-3}f(t)\,,$$

gdzie
$$f(t) = \frac{2t + t^2}{1+t} - 2\ln(1+t)\,.$$

Aby uzyskać informację o znaku F', różniczkujemy funkcję f:

$$f'(t) = \frac{(2+2t)(1+t) - (2t+t^2)}{(1+t)^2} - \frac{2}{1+t} = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2 > 0\,.$$

Ponieważ $f(0) = 0$, zatem dla $t > 0$ jest $f(t) > 0$ i, co za tym idzie, $F'(t) > 0$. Znaczy to, że F jest funkcją rosnącą w przedziale $(0;\infty)$.

Wobec tego ciąg $(f_n(x))$ dany wzorem (28) jest – dla dowolnie ustalonej liczby $x > 0$ – ciągiem malejącym. Znajdziemy jego granicę. Zgodnie z regułą de l'Hospitala,

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{-1} - 1}{2t} = -\frac{1}{2}\,,$$

a stąd

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Powołamy się teraz na twierdzenie Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, w wersji następującej (por. [4], rozdział VII, §6):

Jeżeli $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots \geq 0$ jest ciągiem funkcji mierzalnych na przedziale I (ograniczonym lub nie), przy czym $\int_I f_1 < \infty$, to

(29)
$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\, dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx\,.$$

Założenia tego twierdzenia są spełnione dla rozpatrywanego tu ciągu funkcji (28) na przedziale $I = (0;\infty)$, bo

$$\int_0^\infty f_1(x)\, dx = \int_0^\infty (1+x)e^{-x}\, dx < \infty$$

Zachodzi więc równość (29), która w tym przypadku daje – po podstawieniu $x = \sqrt{2t}$ i uwzględnieniu równości (26)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x}\, dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Wracamy do równości (27). Zgodnie z wzorem Stirlinga (6) współczynnik przed znakiem całki w (27) dąży do granicy $1/\sqrt{2\pi}$. A zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Dowód czwarty. Użyjemy języka teorii prawdopodobieństwa.

Rozważmy zmienne losowe X i Y, określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej i przyjmujące wartości całkowite nieujemne.

X i Y są zmiennymi o jednakowym rozkładzie, jeżeli $P(X = k) = P(Y = k)$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

Zmienne X i Y są niezależne, jeżeli równość $P(X = k, Y = l) = P(X = k) \cdot P(Y = l)$ zachodzi dla każdej pary liczb całkowitych $k, l \geq 0$.

Niech $\mu = \mathrm{E}(X)$ będzie wartością średnią zmiennej losowej X. Wariancją tej zmiennej nazywamy wielkość $\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}\big((X - \mu)^2\big)$.

Zachodzi podstawowej wagi fakt (por. [1], rozdział X, §1):

Centralne Twierdzenie Graniczne. Dany jest ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, \ldots$ (o wartościach całkowitych nieujemnych), o wspólnym rozkładzie, parami wzajemnie niezależnych. Zakładamy, że wielkości

$$\mu = \mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \ldots, \quad \sigma^2 = \mathrm{D}^2(X_1) = \mathrm{D}^2(X_2) = \ldots$$

są skończone. Dla dowolnych ustalonych wartości α, β $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty)$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right) \in (\alpha; \beta)\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{30}$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

(przyjmujemy $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$).

(Twierdzenie jest też prawdziwe dla zmiennych o dowolnych wartościach rzeczywistych, niekoniecznie całkowitych lub nieujemnych, przy odpowiednio zmodyfikowanych definicjach jednakowego rozkładu i niezależności oraz przy założeniu, że μ i σ^2 istnieją i są skończone; ta wersja nie będzie nam jednak potrzebna.)

Zastosujemy to twierdzenie do ciągu zmiennych losowych o rozkładzie Poissona.

Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ, jeżeli

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Wartość średnia i wariancja takiej zmiennej są obie równe λ (por. [1], rozdział IX, §3 i 4; zresztą sprawdzenie jest natychmiastowe).

Z wzoru dwumianowego Newtona wynika, że jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona odpowiednio z parametrami λ i η, to ich suma ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda + \eta$:

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X = k-j, Y = j) = \sum_{j=0}^{k} P(X = k-j) P(Y = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{e^{-\eta}\eta^j}{j!} = e^{-(\lambda+\eta)} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!}\binom{k}{j}\lambda^{k-j}\eta^j = \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\eta)}(\lambda+\eta)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{31}$$

Niech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 1$. Z udowodnionego przed chwilą faktu (31) wnosimy przez natychmiastową indukcję, że suma $X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = n$. Wzór (30), zastosowany do tego właśnie ciągu zmiennych losowych i do przedziału $(\alpha;\beta) = (-\infty;0)$, daje równość

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < n) = \frac{1}{2}; \tag{32}$$

korzystamy tu z tego, że $\mu = 1$, $\Phi(0) = 1/2$. Teraz pozostaje tylko zauważyć, że skoro $X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem n, to

$$P(X_1 + \ldots + X_n < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_1 + \ldots + X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-n} n^k}{k!}.$$

Tak więc otrzymany wzór (32) jest po prostu dowodzonym wzorem (3) (w określeniu (2) ciągu (a_n) sumowanie biegnie od 0 do n, nie $n-1$; ale, jak pamiętamy, pojedynczy n-ty składnik jest bez znaczenia).

Czy angażowanie tak mocnego twierdzenia do rozwiązania tak prostego zadania, jakim jest obliczenie granicy $\lim a_n$, nie jest uchybieniem przeciwko estetyce? Korzystamy tu z bardzo szczególnego przypadku Centralnego Twierdzenia Granicznego: rozważamy konkretny ciąg zmiennych losowych (o wspólnym rozkładzie Poissona) oraz konkretny przedział $(-\infty;0)$. Przy takich warunkach teza twierdzenia jest dokładnie równoważna zachodzeniu relacji granicznej (3). Odwracając punkt widzenia, możemy teraz spojrzeć na przedstawione wyżej trzy dowody tej relacji jak na elementarne uzasadnienie tezy dużego twierdzenia w tym małym, szczególnym przypadku.

Cytowana literatura

[1] Feller, W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom I, Warszawa 1980

[2] Fichtenholz, G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom II, Warszawa 1962

[3] Kuratowski, K., *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Warszawa 1964

[4] Sikorski, R., *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, Warszawa 1980