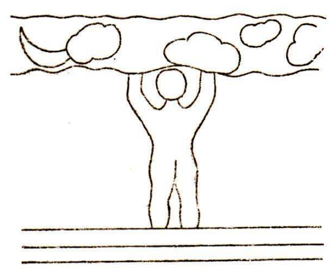
O matematyce i fizyce przed Newtonem (część I)

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Al Hazini żył i pracował na dworze sultana w Merwie w pierwszej połowie XII wieku. Wspomnianą hipotezę o grawitacji wypowiedział w głównym swoim dziele *Księdze wag mądrości* poświęconym pojęciu ciężaru, m. inn. zastosowaniu prawa Archimedesa do ustalania zawartości poszczególnych substancji w - przeważnie drogocennych - przedmiotach. Mimo, że obarczony obowiązkiem wspomnianych zastosowań, wykorzystał swoje dzieło do wyłożenia na jego wstępie ogólnych zasad fizyki. Ze swojej hipotezy o grawitacji nie wyprowadzał wszakże żadnych wniosków. Był, jak się zdaje, w swym poglądzie odosobniony. Traktat Al Haziniego został wydany po rosyjsku w serii *Nauczoje nasledstwo*, tom 6, Moskwa 1983: odpowiedni fragment jest na str. 31.

Swoje poglądy na kosmos zawarł Arystoteles głównie w traktacie *O niebie*, a częściowo w *Fizyce*. Tworzą one teorię, która się daje logicznie rekonstruować tak, by była zgodna ze współcześnie z Arystotelesem znanymi faktami. Fakty odkryte później zmusiły fizyków do odejścia od tej teorii.

Mikołaj z Oresme (1323-1382) z Uniwersytetu Paryskiego, późniejszy biskup Lisieux. Prekursor teorii heliocentrycznej i teorii pieniądza - dwu wielkich teorii Kopernika, autor traktatu *De latitudinibus formarum*, w którym wyłożył swoją teorię zmienności. W tym samym czasie teorię zmienności opracowali na inny sposób filozofowie z Merton College w Oksfordzie, znani jako Calculatores.

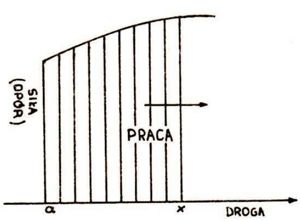


Rys. 3. Niebo Starożytnych podtrzymywane było przez Atlasa.

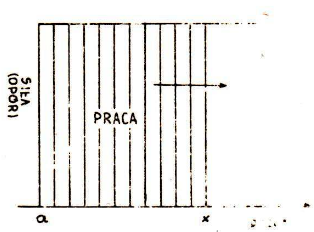
Żyjący w XII wieku na arabskim Wschodzie filozof i matematyk Al Hazini twierdził, że ciężar wzrasta w miarę oddalania się od centrum Świata. Była to, jak się zdaje pierwsza ilościowa hipoteza co do grawitacji, bo Arystoteles się na ten temat nie wypowiadał.

Ale jeśliby nawet odejść od tej skrajnej hipotezy i przyjąć, że siła przyciągania przez Ziemię jest stała, to żaden przedmiot nie mógłby się z niej wydostać: praca potrzebna dla podniesienia ciężaru o wielkość x, będąc proporcjonalna do x, wzrastałaby wtedy wraz z x nieograniczenie.

Bo pracę traktujemy jako zdolność do pokonania oporu przy przemieszczaniu ciała z jednego miejsca na drugie. Przyjmiemy więc, kierując się naturalnymi wyobrażeniami, że jeśli przemieszczamy ciało wzdłuż prostej, a opór na jaki natrafiamy w poszczególnych jej punktach wyobrazimy odcinkami prostopadłymi do tej prostej w tych punktach, tak, że długości odcinków są proporcjonalne do wielkości oporu, to praca jest proporcjonalna do pola zapełnionego przez te odcinki (rys. 1). W przypadku oporu stałego (rys. 2) tego rodzaju umowę uważamy za oczywistą.



Rys. 1



Rys. 2. Opór stały.

Tego wywodu Al Hazini zapewne nie znał, ale nie byłby on obcy Mikołajowi Oresme, filozofowi przyrody z Uniwersytetu Paryskiego, żyjącemu dwa stulecia później. Oresme, a w tym czasie nie tylko on, posługiwał się w rozumowaniach z zakresu fizyki wykresami natężeń rozmaitych wielkości, dochodząc do wniosków ilościowych w ten właśnie sposób.

Ale wynik tego wywodu przyjęty byłby, zarówno przez Oresme'a, jak i Al Haziniego, jako w pełni naturalny.

Ziemię uważano w ich czasach za prawdziwe centrum świata. To, że wszystko ściągała na siebie, i że nic nie mogło się z niej wydostać, było samo przez się zrozumiałe. Ziemię wyobrażano sobie jako kulę, ale jeszcze częściej jako płaski krąg z wiszącym nad nim ciężkim niebem. Fizyka nie zajmowała się innym światem niż podksiężycowym.

Odczuwamy nostalgię za tym, wywodzącym się od Arystotelesa systemem świata, tym bardziej, że dopasowane są doń nasze wyobrażenia o większości aspektów naszego bytu.

*

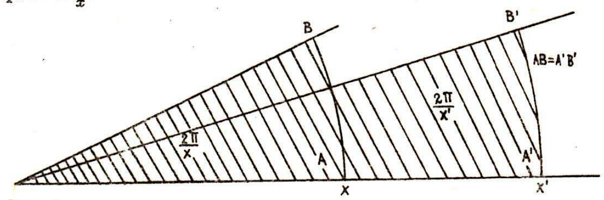
Śladem Duhema, Crombiego, Clagetta i wielu innych historyków nauki, którzy zrewidowali skutecznie pogląd na średniowiecze, jako na okres dla nauki pusty. Zwięźle i przekonywająco pisze na ten temat H. Butterfield w książce *Rodowód współczesnej nauki. 1300-1800*, wyd. polskie, PWN, Warszawa 1963.

Celem tych wywodów, idących zresztą dobrze utartym szlakiem, będzie wykazanie, że nie istniało żadne skokowe przejście od systemu Arystotelesa do tego, który obowiązuje nas dzisiaj. Ale zgodzimy się, że pogląd na grawitację musiał być zasadniczo inny niż pogląd Al Haziniego już wtedy, kiedy zdecydowano się na system heliocentryczny. W tym systemie planety, a także Księżyc, traktowane są równorzędnie. Każda wytwarza swoje pole przyciągania.

Dobroduszna satyra na prowincjonalnego pasjonata nauki, który m. inn. przedstawia swój dowód niezamieszkałości Księżyca, argumentując to tym, że nie obserwuje się spadania zeń żadnych przedmiotów. Powieść Jerzego Żuławskiego – bezwzględnie najlepsza, obok książek Verne'go – powieść z zakresu fantazji naukowej. Widoczna z Ziemi strona Księżyca jest odarta przez Ziemię z atmosfery, co jest punktem wyjścia zarówno dla ogólnej refleksji, jak i dramatycznej akcji.

Jeśliby to przyciąganie nie malało wraz z odległością, większe planety ogołacałyby mniejsze z wszelkich przedmiotów. Ogołacałyby je także z atmosfery. Jakieś reminiscencje tych obaw widzimy w obrazie Księżyca u Żuławskiego w jego *Na srebrnym globie*, a w żartobliwej formie u Czechowa w *Liście do uczonego sąsiada*.

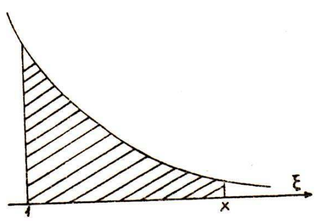
Nie wiemy, czy do tego rodzaju argumentów sięgali uczeni. Nie wiemy, z jakich przesłanek wychodził Kepler przyjmując, że przyciąganie maleje w miarę oddalania się od centrum. Wiemy natomiast czym argumentował ilościowy aspekt prawa, według którego przyciąganie (planety przez Słońce) maleje według prawa $\frac{1}{x}$.



Rys. 4

Otóż, linie pola przyciągania wychodząc z centrum rozrzedzają się w płaszczyźnie ekliptyki w miarę oddalania się od tego centrum, a ich „ilość" – jeśli użyć rzekomo zrozumiałego ogólnie zwrotu – padająca na łuk o danej długości (rys. 4) i leżący na orbicie o promieniu x maleje właśnie według tego prawa, bo według tego prawa maleje kąt, pod którym widać łuk.

*

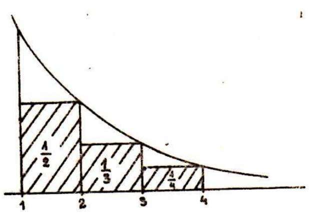


Rys. 5. Pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi}$.

Ale – co wszakże Keplera w jego czasach nie musiało jeszcze obchodzić – przyciąganie według prawa $\frac{1}{x}$ również wystarczałoby dla uwięzienia wszystkiego na powierzchni planety. Jest tak dlatego, że pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi}$ liczone np. od $\xi = 1$ do miejsca x wzrasta wraz z x nieograniczenie. Pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi}$ mieści się bowiem (poczynając od $\xi = 1$) ciąg nieskończony prostokątów (patrz rys. 6) o polach

(1) $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$

których suma jest nieskończona.



Rys. 6

Dla dowodu tego ostatniego wystarczy zauważyć, że po wyrazie $\frac{1}{2}$ następują dwa wyrazy $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ o sumie większej niż $\frac{1}{2}$, a po nich cztery wyrazy $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{8}$ również o sumie większej niż $\frac{1}{2}$, i tego rodzaju rozłączne grupy wyrazów ciągu (1) o sumach większych od $\frac{1}{2}$ powtarzają się w nieskończoność. Stąd suma wyrazów ciągu (1) jest nieskończona. Jest to stwierdzenie paradoksalne, bo wyrazy ciągu (1) maleją do zera. Odkrył je – i tak mniej więcej je dowodził – wspomniany już Mikołaj z Oresme.

*

O wzroście pola pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi}$ – liczonego od 1 do x – można wszakże coś dopowiedzieć. Wprawdzie wzrasta ono wraz z x do nieskończoności, ale dużo wolniej niż x: intensywność tego wzrostu maleje. Dokładniej: maleje według prawa $\frac{1}{x}$. Bo takie jest tempo wzrostu pola w miejscu x, jeśli tempo wzrostu wielkości ξ uznać za jednostajne. Według tego prawa zwęża się strumień pola, co jest poprzednim zdaniem tylko powiedzianym inaczej. Argumentujemy odwołując się do wyobrażeń: później – kiedy umówimy się jak rozumieć tempo wzrostu – podamy argumentację bardziej formalną.

Stwierdził to w roku 1648 – a więc jeszcze przed Newtonem – Gregorius a St. Vincentio, flamandczyk.

Mimo nieostrej argumentacji samo stwierdzenie jest oczywiste. Natomiast wcale nieoczywistym jest stwierdzenie, znane matematykom już w pierwszej połowie XVII wieku, według którego dla uzyskania wzrostów pola pod $\frac{1}{\xi}$, liczonego od 1 do x, o ustaloną wielkość, przyrosty wielkości x trzeba zwielokrotniać; inaczej: wzrosty pola w tempie postępu arytmetycznego uzyska się, jeśli x będzie zwiększane w tempie postępu geometrycznego.

John Napier v. Neper (1550-1617) – odkrywca logarytmów – tym tytułem obdarzyła go potomność. Rekonstrukcję teorii Nepera można znaleźć u J. F. Scotta w *A history of mathematics*, London 1975, str. 127-137.

Oto argumentacja.
Rozważmy wielkość $l(x)$ wzrastającą w opisany wyżej sposób, to jest tak, że

(2) jeśli $a : a' = b : b'$, to $l(a) - l(a') = l(b) - l(b')$.

Funkcje o tej własności pojawiły się w rozważaniach Johna Nepera żyjącego w końcu XVI wieku. Nazwał on je logarytmami.

Logarytm (inaczej: funkcja logarytmiczna) – czy też logarytmowanie – miały w zamyśle Nepera sprowadzać trudne w wykonaniu operacje mnożenia i dzielenia do łatwiejszych operacji: dodawania i odejmowania. Każda funkcja spełniająca warunek (2) mogła służyć temu celowi.

Podstawmy w (2) $b' = 1$. Mamy wtedy $b = a : a'$, a w rezultacie

$$l(a) - l(a') = l(\frac{a}{a'}) - l(1).$$

Byłaby to własność znanego nam logarytmu, jeśliby $l(1) = 0$. Przyjmijmy to założenie. Ograniczamy przez to zakres rozważanych przez nas funkcji logarytmicznych; nie jest to wszakże ograniczenie istotne, bo wszystkie rozważane uprzednio funkcje logarytmiczne uzyskamy z tych specjalnych przez dodawanie stałych. Przy wspomnianym założeniu mamy

(3) $$l(a) - l(a') = l(\tfrac{a}{a'}).$$

Tempo wzrostu funkcji l w punkcie x otrzymamy – takie nadajemy temu pojęciu rozumienie – jeśli z ilorazem

(4) $$\tfrac{l(x+h)-l(x)}{h}$$

przejdziemy do granicy przy $h \to 0$. Korzystając między innymi ze wzoru (3) dostajemy

$$\frac{l(x+h) - l(x)}{h} = \frac{l(\frac{x+h}{h})}{h} = \frac{l(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

co sprowadza, gdy przyjmiemy $\alpha = \frac{h}{x}$, nasze zadanie do pytania o granicę wyrażenia

(5) $$\tfrac{l(1+\alpha)}{\alpha}$$

przy $\alpha \to 0$. Wobec $l(1) = 0$, wyrażenie to jest równe wyrażeniu

$$\frac{l(1+\alpha) - l(1)}{\alpha}.$$

Widzimy więc, że granica wyrażenia (5) to nic innego niż tempo wzrostu funkcji l w punkcie $x = 1$. Oznaczmy je przez k. Tempo wzrostu funkcji l w punkcie x wyrazi się więc wzorem $k \cdot \frac{1}{x}$. Wyrazi się wzorem

$$\frac{1}{x},$$

jeśli przyjmiemy $k = 1$, co może być uważane za równoznaczne z przyjęciem tempa wzrostu w punkcie $x = 1$ za jednostkowe.

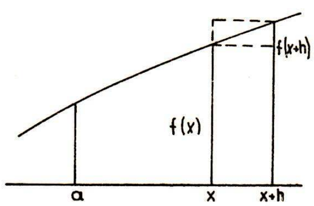
Teraz przypomnijmy, że to samo tempo wzrostu, to jest $\frac{1}{x}$, ma rozważana przedtem funkcja wyrażająca pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi}$ liczone od 1 do x.

Przyjęliśmy to wtedy bez dowodu, ale skoro umówiliśmy się rozumieć tempo wzrostu funkcji jako granicę ilorazu przyrostu funkcji przez przyrost zmiennej, to dowód staje się obowiązujący.

Scholastycy wieku XIV – Oresme i Calculatores z Oksfordu – którym zawdzięczamy zapoczątkowanie i nadanie kształtu nauce o zmienności – nie określali tempa zmiany, posługując się tym pojęciem jako pierwotnym. Przeszło dwa stulecia minęło, zanim zdecydowano się na określenie tempa wzrostu jako granicy wspomnianego już ilorazu. Trudnością było pojęcie granicy – nawet rozumiane intuicyjnie. Ale wcześniejszą barierą była możliwość utworzenia ilorazu dwu wielkości niekoniecznie „tego samego rodzaju". To tylko my dzielimy drogę przez czas nic przy tym nie myśląc. Według Newtona należy w każdym rozważanym rodzaju wielkości wybrać wielkość uznaną za jednostkową i każdą wielkość rozważanego rodzaju zastąpić proporcją do tej wielkości jednostkowej. Proporcje są już wielkościami pozbawionymi mian i nie ma przeszkód w posługiwaniu się nimi jak liczbami.

W *Arithmetica universalis* Newtona pogląd na liczbę wyłożony jest zaraz na wstępie tego dającego się jeszcze dzisiaj swobodnie czytać dzieła zawierającego poza tym 60 zadań arytmetycznych i geometrycznych – słynnych „zadań Newtona"; można tam znaleźć również – trudny do znalezienia w obecnych podręcznikach – sposób na wyciąganie pierwiastka kwadratowego.

Przedstawiona przez Euklidesa w księdze V *Elementów*. Proporcje Eudoksosa są usytuowane wśród ułamków liczb całkowitych tak samo, jak usytuowane są wśród nich liczby rzeczywiste Dedekinda. Dlatego nie ma żadnych przeszkód, by przyjąć, że są liczbami rzeczywistymi Dedekinda. Natomiast co do zbioru wszystkich proporcji Eudoksos i Euklides się nie wypowiadali; znając ich niechęć do wprowadzania niekontrolowanych wyobrażeniami bytów, należy przyjąć, że nie wszystkim liczbom rzeczywistym skłonni byliby przyznać status proporcji wielkości geometrycznych.



Rys. 7

Teoria proporcji była wypracowana jeszcze w Starożytności przez Eudoksosa, ale matematyka nowożytna dopiero w wieku XVII była zdolna do adaptowania jej dla swoich celów.

Wróćmy do zapowiedzianego twierdzenia:
Tempo wzrostu pola pod wykresem funkcji f – liczone od ustalonego punktu a – jest w punkcie x równe wartości $f(x)$ funkcji f w tym punkcie.
Jest to twierdzenie Barrowa – bezpośredniego poprzednika Newtona.

Dowód: Tempo wzrostu pola (w stosunku do tempa wzrostu samej zmiennej x) jest wartością graniczną, przy $h \to 0$, ilorazu

$$P(x, x+h) : h,$$

gdzie $P(x, x+h)$ jest przyrostem pola pod wykresem funkcji przy przejściu od x do $x+h$. Załóżmy, co robił Barrow, że f rośnie i że jest ciągła. Mamy najpierw

$$h \cdot f(x) \leq P(x, x+h) \leq h \cdot f(x+h),$$

skąd wynika, że

$$f(x) \leq \frac{P(x, x+h)}{h} \leq f(x+h),$$

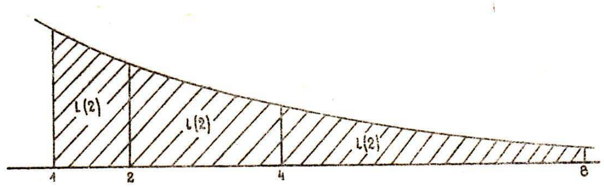
co czyni konkluzję oczywistą, bo różnica między $f(x+h)$ i $f(x)$ zanika wraz z h (to właśnie znaczy ciągłość) i przez to wartością graniczną ilorazu jest $f(x)$.

Skoro więc – jak dowiedliśmy – pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ i funkcja logarytmiczna $l(x)$ mają to samo tempo wzrostu, to powinny być równe, jeśli zaniedbać różnicę o składnik stały, który na tempo wzrostu nie ma wpływu.

Ta konkluzja wynika z ogólnej zasady, którą posługiwali się już Oresme i Calculatores, a która głosiła, że tempo wzrostu determinuje przyrost samej wielkości, a więc i samą wielkość, jeśli stan początkowy tej wielkości jest znany. Zasadę tę przyjął Newton jako podstawę dla swego rachunku fluksji i fluent: fluentę – strumień wielkości – można odtworzyć znając fluksję – natężenie strumienia. Teraz mówimy, że z pochodnej można odtworzyć funkcję i nazywamy to zasadniczym twierdzeniem analizy matematycznej.

To, że teraz nazywamy tę zasadę twierdzeniem, wynika z innego usytuowania jej, niż w czasach Newtona, w obrębie samej matematyki, której układ twierdzeń został diametralnie odwrócony z upływem kilku stuleci.

Wróćmy do wniosku: pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ wzrasta w tym samym tempie co logarytm Nepera. Znaczy to, między innymi, że wzrasta wolno: jeśli np. będziemy podwajać x, to $l(x)$ będzie się zwiększać o pewną – zawsze tę samą wielkość. O jaką? Zwiększmy we wzorze (3) wielkość a dwukrotnie; przyjmując $a = 2a'$ dostaniemy $l(a) - l(a') = l(2)$. Wartość logarytmu zwiększyła się o $l(2)$.



Rys. 8. Wzrosty pola o $l(2)$ uzyskuje się podwajając x.

Zwróćmy uwagę na to, że w określeniu logarytmu przez Nepera nie ma mowy o tzw. zasadzie logarytmu, i że logarytm nie jest wykładnikiem potęgi (o niczym takim, jak potęga, się nie wspomina). Logarytm wyznaczony jest przez prawo określające jego tempo wzrostu oraz przez swoją wartość i wartość tempa wzrostu w jednym punkcie (idąc za zwyczajem posłużyliśmy się punktem 1).Jeszcze bardziej zastanawiające jest to, że tego rodzaju scholastyczne podejście do logarytmów nie było żadną przeszkodą dla rozwinięcia rachunku, chociaż zrobił to dopiero Briggs, następca Nepera.

Chociaż oddala to nas od zasadniczego tematu poświęćmy małą dygresję związkowi logarytmu z potęgą.

Tempo wzrostu logarytmu $l(x)$ w stosunku do tempa wzrostu zmiennej x jest równe $\frac{1}{x}$. Jeśli by teraz tempo wzrostu logarytmu uznać za wzorzec (tj. za jednostajne), to tempo wzrostu zmiennej x byłoby odwrotnością poprzedniego (iloraz się odwróci), tj. byłoby równe x, a więc równe samej zmiennej. Zastanówmy się nad funkcją $p(y)$ dającą zależność odwrotną do $l(x)$. Jej tempo wzrostu z y jest równe osiągniętej już wielkości $p(y)$, a równość (3) przechodzi w równość

(6) $$p(b - b') = \frac{p(b)}{p(b')},$$

przy czym $p(0) = 1$ z uwagi na $l(1) = 0$.

Wielkości zmieniające się według prawa (6) są znane w arytmetyce. Są to potęgi t^n, gdzie zmienną jest n, która przebiega wszakże jedynie liczby całkowite dodatnie. Wzór $t^{n-m} = \frac{t^n}{t^m}$ dla $n > m > 0$ jest twierdzeniem arytmetyki. Przez odpowiednią umowę jest rozciągnięty na dowolne liczby całkowite już bez wymagania, by $n > m$. Na mocy tejże umowy $t^0 = 1$.

Funkcję $p(y)$, odwrotną do wcześniej znanego logarytmu, można więc uznać za rozszerzenie określenia potęgi t^y na dowolne y, niekoniecznie całkowite. Osobnym problemem jest znalezienie podstawy tej potęgi. Oczywiście można to zrobić jedynie dla logarytmów zerujących się w 1. Ale to zakładaliśmy. Poczyniliśmy ponadto założenie, że rozważany przez nas logarytm ma tempo wzrostu jednostkowe dla $x = 1$. Dla tego logarytmu podstawą jest liczba

$$\mathrm{e} = 2,71819\ldots,$$

nazywana czasem na cześć odkrywcy logarytmów liczbą Nepera, chociaż Neper jej nie znał, co więcej, znać nie musiał, bo nie wiązał logarytmu z potęgą, nie zakładając jego zerowania się w 1.

*

Wróćmy jednak do Keplera i jego prawa grawitacji. Na sztuczność argumentacji Keplera zwrócił uwagę mało znany nam współcześnie Boilleaud, który uważał, że w argumentacji Keplera trzeba wziąć pod uwagę pełną przestrzeń, a nie tylko jej płaski fragment – ekliptykę. Prawo grawitacji, według niego, powinno być wyprowadzone z rozważań gęstości linii pola w stosunku do powierzchni sfer i, wobec tego, powinno podlegać wzorowi $\frac{1}{x^2}$. Newton czytał uwagi Boilleauda i mogło to mieć znaczenie dla sformułowania jego prawa grawitacji, ale dla uprawomocnienia wzoru z $\frac{1}{x^2}$ znalazł bardziej ważkie argumenty.

Sprawdzianem dla prawa grawitacji było wyprowadzenie zeń przez Newtona praw Keplera dla ruchu planet.

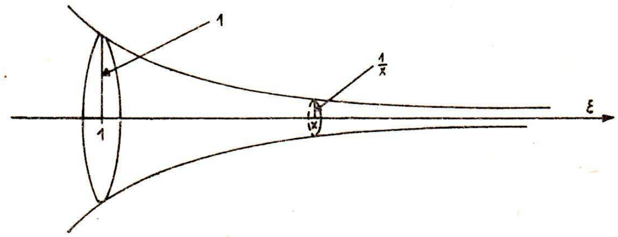
Bo argumentacja Boilleauda – poza tym, że oparta jedynie na wierze w najogólniejsze prawidłowości – mogła być uważana za antropomorficzną: trójwymiarowość, która być może jest – takiego zdania był Kant – atrybutem naszego sposobu postrzegania, została użyta jako argument uzasadniający ogólne prawo przyrody.

*

Wielkość $\frac{1}{x^2}$ maleje szybciej niż $\frac{1}{x}$, a praca wykonana przeciwko sile grawitacji zmieniającej się według tego prawa nie rośnie już nieograniczenie.

Rozumowanie matematyczne prowadzące do tej konkluzji znał Toricelli – uczeń Galileusza, ale nie grawitacja była motywacją dla jego rozumowań.

Liczyć pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi^2}$ – od $\xi = 1$ do $\xi = x$ – jest tym samym, co liczyć objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $\frac{1}{\xi}$ wokół osi ξ. Jest tak dlatego, że tempa wzrostu obu wielkości (w stosunku do tempa wzrostu zmiennej) są, z dokładnością do czynnika stałego, te same. Pierwsze jest równe $\frac{1}{x^2}$ na mocy znanego już nam twierdzenia Barrowa, a drugie jest równe $\frac{\pi}{x^2}$, bo takie jest pole koła powstałego w przekroju rozważanej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi ξ w punkcie x i to pole jest tempem wzrostu objętości przy przesuwaniu się wzdłuż osi ξ w miejscu, gdzie $\xi = x$ (można się dla dowodu powołać na twierdzenie Barrowa adaptowane dla objętości).

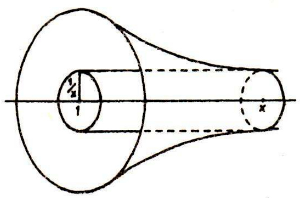


Rys. 9

Przekonać się o tym, że objętość rozważanej bryły jest skończona, jest stosunkowo łatwo. Ale trzeba na tę bryłę popatrzeć inaczej, a mianowicie przyjrzeć się, w jaki sposób jej objętość narasta wokół osi ξ na kształt słoi drzewnych mających formę powierzchni walcowych ułożonych wokół tej osi koncentrycznie (patrz rys. 10). Tego rodzaju słój o promieniu $\frac{1}{x}$ ma długość $x - 1$, rozciągając się od płaszczyzny $\xi = 1$ do płaszczyzny $\xi = x$. Powierzchnia tego słoja jest więc równa

$$2\pi \cdot \frac{1}{x} \cdot (x - 1). \tag{7}$$

Ta wielkość może być uznana za tempo, z jakim bryła byłaby zestrugiwana na tokarce zmniejszającej jednostajnie średnicę słoi. Promienie słoi zmniejszają się od 1 ku zeru, a więc zakres ich zmiany jest 1. Tempo zmiany dane wzorem (7) nie przekracza wielkości 2π, co widać, jeśli doprowadzić wyrażenie (7) do postaci $2\pi \cdot (1 - \frac{1}{x})$. Zarówno więc zakres zmiany, jak i jej tempo, są ograniczone. Zatem objętość bryły jest skończona.



Rys. 10

Tą regułą była tzw. zasada Cavalieriego, według której dwie bryły mają tę samą objętość, jeśli ich przekroje płaszczyznami równoległymi do pewnej ustalonej mają te same pola. Zasada ta może być rozumiana jako szczególny przypadek zasady Oresme'a i Calculatores, a więc i zasadniczego twierdzenia analizy matematycznej, jeśli pole przekroju traktować jako tempo narastania objętości w kierunku prostopadłym do płaszczyzn tnących. W obecnym systemie analizy matematycznej zasada Cavalieriego jest twierdzeniem. Podobnie obrócone zostały w twierdzenia rezultaty rozważań Toricellego i Keplera.

Rezultat mógł być – i był – uważany za paradoksalny, bo pole pod $\frac{1}{\xi}$ jest – jak wiemy – nieskończone. Ale i rozumowanie – przyznajmy – było dość karkołomne. Rozumowania prowadzone w tym stylu były w początkach XVII wieku dość rozpowszechnione. Mistrzem w tego rodzaju rozumowaniach był Kepler, który w ten sposób bezbłędnie obliczał objętości beczek wina rozmaitych kształtów. Za karkołomne uważał je Cavalieri, który wprawdzie też posługiwał się tą metodą obliczeń, ale trzymał się przy tym określonych reguł.

Ilość pracy potrzebna do wyniesienia ciężaru w nieskończoność jest więc – jeśli przyjąć prawo grawitacji w postaci $\frac{1}{x^2}$ – skończona. Ale przeprowadzone rozumowanie nie zdaje sprawy z tego, jak ta praca narasta z oddalaniem się od centrum przyciągania: aproksymacje, które robiliśmy, są sztuczne z punktu widzenia zadania o grawitacji.

Przeprowadzimy inny rachunek – którego wszakże przed Newtonem nikt nie robił – ale który, choć trudniejszy, jest bardziej naturalny i rzuca właściwe światło na problem.

Zacznijmy od spostrzeżenia arytmetycznego. Otóż ciąg $\frac{1}{n}$ maleje w tempie, które jest rzędu $\frac{1}{n^2}$. Dokładniej:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Naturalnym jest więc przypuszczać, że funkcja $\frac{1}{x}$ maleje w tempie $\frac{1}{x^2}$. Rzeczywiście, jeżeli rozważyć iloraz

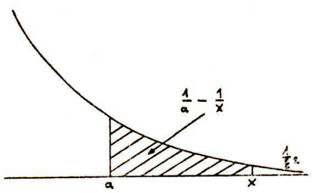
$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}}{h}$$

przyrostu funkcji $\frac{1}{\xi}$ od x do $x + h$ przez przyrost h samej zmiennej ξ, który po przekształceniu ułamków jest równy

$$\frac{1}{x \cdot (x+h)},$$

to przechodząc z h do zera dostaniemy $\frac{1}{x^2}$.

Widzimy więc, że funkcja $\frac{1}{x}$ maleje w tym samym tempie, w jakim pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi^2}$, liczone od ustalonego a do x, wzrasta. Wspomniane pole (liczone od a do x) i funkcja $-\frac{1}{x}$ (zmieniliśmy znak) są więc te same, jeśli zaniedbać różnicę o stałą. Pole pod funkcją $\frac{1}{\xi^2}$ liczone od a do x wyrazi się więc wzorem



Rys. 11

$$C - \frac{1}{x},$$

gdzie C jest pewną stałą. Ta stała daje się obliczyć, bo wyrażenie $C - \frac{1}{x}$ powinno znikać dla $x = a$ (pole jest wtedy równe 0). Mamy więc $C = \frac{1}{a}$ i wzór na pole przyjmuje postać

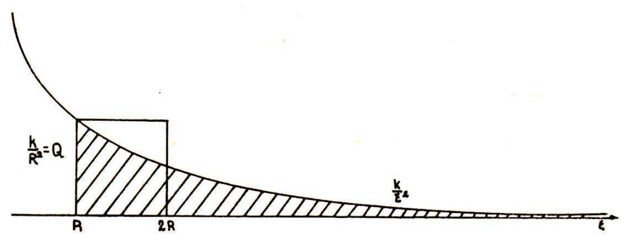
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x}.$$

Jeśli przejdziemy z x do nieskończoności, otrzymamy $\frac{1}{a}$, jako wyrażenie na pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{\xi^2}$ rozciągające się do nieskończoności od $\xi = a$.

Ziemia przyciąga ciało nie z siłą $\frac{1}{x^2}$ (jeśli znajduje się ono w odległości x od jej centrum), lecz z siłą $\frac{K}{x^2}$, gdzie K jest pewną stałą (zależną również i od rozważanego ciała). Praca, jaką wykonamy dla wyniesienia ciała z poziomu a na poziom x, będzie więc równa

$$\frac{K}{a} - \frac{K}{x},$$

a do wyniesienia ciała w nieskończoność potrzebna będzie praca $\frac{K}{a}$.



Rys. 12

Jeśli poziomem, z jakiego wynosimy ciało, jest powierzchnia Ziemi, to wspomniana praca wyrazi się wzorem

$$\frac{K}{R},$$

gdzie R jest promieniem Ziemi. Zauważmy teraz, że przyciąganie ciała, jeśli znajduje się ono na powierzchni Ziemi, jest niczym innym niż ciężarem tego ciała. Oznaczmy ten ciężar przez Q. Mamy więc

$$\frac{K}{R^2} = Q,$$

a zatem praca potrzebna do wyniesienia tego ciała w nieskończoność, którą wyrażaliśmy przedtem wzorem $\frac{K}{R}$, wyrazi się teraz bardziej zrozumiałym wzorem

$$Q \cdot R.$$

Jest to taka sama praca, jaką wykonałoby się przesuwając przedmiot z jednakową siłą Q wzdłuż drogi o długości R równej promieniowi Ziemi. To powinno wystarczyć, aby dać wyobrażenie o tej wielkości, np. przez obliczenie ilości paliwa potrzebnego do wykonania takiej pracy.

*

I na koniec uwaga ogólna o pracy: jej wielkość nie zależy wcale od tego, jak szybko przemieszczany jest przedmiot, tj. od tego ile czasu na to przemieszczenie zużyjemy. Czas nie pojawiał się w ogóle, jak dotąd, w naszych rozważaniach.