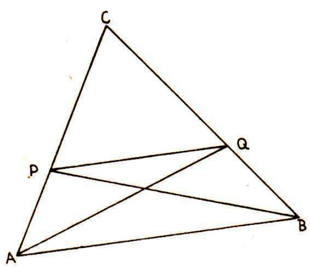
# Metodologia empiryczna a metodologia dedukcyjna

*Marek KORDOS, Warszawa*

Oto dwa zapisy ludzkiej wiedzy:

**Móżdżek barani**
Produkty: 4 móżdżki (około 500g), 1 marchewka, 1 cebula, 1 goździk, natka pietruszki, sól, pieprz, tymianek, liść laurowy, 4 łyżki soku cytrynowego.
1. Móżdżek namoczyć w zimnej wodzie, usunąć błony i żyłki.
2. Do garnka z zimną wodą włożyć liść laurowy, tymianek, natkę, marchewkę pokrojoną w talarki, cebulę z wbitym goździkiem, sól, pieprz i sok cytrynowy. Gotować 10 minut.
3. Móżdżki włożyć do wywaru i gotować 15 minut. Wyjąć, osączyć i podawać z sosem lub masłem.
(na podstawie: Barbara Buczma, Bożena Bonik, *Kuchnia francuska na co dzień i od święta*)

**Twierdzenie Talesa**
Prosta równoległa do jednego z boków trójkąta dzieli pozostałe boki na odcinki proporcjonalne.




**Dowód:** $\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APQ}}{S_{PCQ}} = \frac{S_{BQP}}{S_{QCP}} = \frac{BQ}{QC}$.
Pierwsza (i trzecia) równość wynika z faktu, że trójkąty $APQ$ i $PCQ$ ($BQP$ i $QCP$) mają te same wysokości. Druga równość bierze się stąd, że trójkąty $APQ$ i $BQP$ mają wspólną podstawę $PQ$ i równe wysokości.
(na podstawie: Euklides, *Elementy*)

Zapisy te różnią się tematyką: jeden dotyczy problematyki kulinarnej, drugi zaś matematycznej. Ale nie o tę różnicę mi tutaj chodzi. Znacznie ważniejsza jest sama konstrukcja każdego z zapisów.

Pierwszy przedstawia przepis powstały z długoletniego doświadczenia licznych kucharzy i jego skuteczność gwarantowana jest tylko/właśnie owym ogromnym doświadczeniem. Pytanie o dowód, że po jego ścisłym wykonaniu będziemy mieli na pewno sm potrawę na stole, jest w sposób oczywisty bezsensowne. Zresztą dowodu nie ma.

A co to ma wspólnego z matematyką? Czy wiedza matematyczna kiedykolwiek była w ten sposób (tj. za pomocą przepisów) notowana? Oczywiście tak. Warto przy tym odróżnić dwie, odległe historycznie, epoki w których to miało miejsce.

Pierwsza z nich to czasy odległe od nas o 4 i więcej tysięcy lat. W czasach babilońskich, chaldejskich, Starego i Średniego Egiptu tak właśnie notowano matematyczną wiedzę. Były to tylko i wyłącznie przepisy gwarantowane autorytetem sporządzających je uczonych (kapłanów, magów). Dowodów żadnych nie miały i, co ważniejsze, często mieć nie mogły. Bo jak można dowieść, że obwód koła to 6 promieni i obwód wpisanego w nie sześciokąta foremnego to też 6 promieni oraz (równocześnie), że obwód sześciokąta jest mniejszy od obwodu koła? Albo jak udowodnić, że

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{b^2}{2a}$$

i (równocześnie)

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + 2ab^2,$$

w zależności od potrzeb? A tak właśnie informowały gliniane tabliczki babilońskie.

Więcej przykładów babilońskich przepisów wraz z ich krytycznym omówieniem można znaleźć w książce Stefana Kulczyckiego *Z dziejów matematyki greckiej*. PWN, Warszawa 1973, strony 26-63. Szczególnie polecam omówienie tabliczki BM85194.

Czy to w ogóle jest wiedza? Oczywiście jest. Uzasadniają to niewątpliwe sukcesy cywilizacyjne używających takiego sposobu gromadzenia wiedzy społeczeństw. Babilończycy umieli np. skanalizować bezśluzowo całe międzyrzecze Eufratu i Tygrysu (a jaka firma podjęłaby się dziś takiego zadania?). Nie mówiąc już o zikkuratach, murach obronnych i pałacach.

Można powiedzieć, że złośliwie dobrałem przytoczone przykłady babilońskiej notacji wiedzy matematycznej. Istotnie, tak zrobiłem. Bynajmniej nie neguję istnienia przepisów całkiem dobrych. Jednak współistnienie jednych i drugich wskazuje na odmienny, od uznanego (np. sto lat temu) za naukowy, sposób uzyskiwania i gromadzenia wiedzy. Wiedza gromadzona jako utrwalone wieloletnie doświadczenie reprezentuje sposób poznawania świata zwany metodologią empiryczną. A pierwszy przykład pochodził z książki kucharskiej dlatego, że jest to dzieło reprezentujące metodologię empiryczną w najczystszy sposób spośród wydawanych dzisiaj książek.

Kiedyś sądzono, że podczas tzw. Wieków Ciemnych oddzielających czasy cywilizacji Achajów od tego, co znamy jako historyczną Starożytną Grecję, nastąpił najazd Dorów i zajęcie przez nich wszystkich ziem greckich. Dziś historycy twierdzą, że żadnego najazdu nie było, co nie przeszkadza im nie kwestionować faktu, że po Wiekach Ciemnych cywilizacja dorycka dominowała w całej Grecji.

Metodologia dedukcyjna, ta, z którą wiąże się w naszej cywilizacji pojęcie nauki, zyskała sobie obywatelstwo i zaczęła się upowszechniać w kręgu kultury greckiej wraz z dominacją w niej cywilizacji doryckiej. Wiąże się ją (już wtedy ludzie lubili wiązać idee z konkretnymi, uosabiającymi je postaciami) z osobą Talesa.

Główne założenia metodologii dedukcyjnej są (w skrócie) takie:
- Nie interesuje nas ogrom nagromadzonej wiedzy. Nas interesuje tylko wiedza pewna.
- Wiedza pewna musi być częściowa. A to dlatego, że w przeciwnym razie musiałaby być co najmniej tak skomplikowana, jak Wszechświat w każdym ze swych aspektów, a przez to nie do ogarnięcia.
- Wiedza pewna daje się zatomizować. Atomy wiedzy pewnej to twierdzenia.
- Twierdzenie musi dotyczyć abstraktów. Nie ma twierdzeń dotyczących wszystkich desygnatów realnego pojęcia – nawet twierdzenie, że pies ma cztery nogi nie jest pewne, gdy przez „pies" rozumiemy dowolne zwierzę tego gatunku, a nie abstrakt biologiczny.
- Twierdzenie musi być wyrażone formalnie, a więc każdy z użytych terminów musi mieć z góry założone dokładnie jedno znaczenie. Np. zdanie „prosta ma tyle samo punktów, co odcinek" jest twierdzeniem tylko przy pewnym szczególnym znaczeniu zwrotu „tyle samo".
- Twierdzenie musi być zdaniem warunkowym (np. „woda płynie z góry na dół" – patrz fontanna). Jeśli jawnie wypiszemy te warunki, to nazywamy je założeniami. Możemy też ustalić zestaw warunków leżących u podstaw całej grupy twierdzeń – wtedy mówimy o aksjomatyce.
- Z posiadanego zasobu twierdzeń można uzyskiwać dalsze stosując dowód – myślowy odpowiednik związku przyczynowo-skutkowego.

Te właśnie, przytoczone wyżej, zasady gromadzenia wiedzy składają się na metodologię dedukcyjną. (Drugi z podanych na początku zapisów wiedzy został sporządzony niewątpliwie w myśl zasad tej metodologii.) A gromadzona za pomocą metodologii dedukcyjnej wiedza tworzy naukę. Tak przynajmniej sądzono od czasów Pitagorasa do końca XIX wieku.

Właśnie. Bo miałem przecież dać przykład innego, od mieszczącego się w głębokiej Starożytności, przypadku posługiwania się przepisami, jako środkiem notowania wiedzy.

O przykład nieistotny jest łatwo. Np. równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma rozwiązania

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

To, oczywiście, przepis. Tyle, że jest to zapis twierdzenia bez podania dowodu, choć dowód taki istnieje i nie jest skomplikowany.

Na przełomie XIX i XX wieku zaczęły się w naukach ścisłych (tj. stosujących konsekwentnie metodologię dedukcyjną) i inne przepisy. W fizyce najbardziej wyraźnym przykładem jest praca Plancka o wyjaśnieniu serii Balmera w widmie wodoru. Mówi ona, że wszelka energia jest przekazywana w porcjach (zwanych kwantami). A to dlatego, że taki przepis na opisywanie zjawisk energetycznych daje dobrą zgodność z doświadczeniem i pozwala uzyskać rezultaty nieosiągalne innym sposobem. Po ćwierćwieczu powstaje niesłychanej przydatności równanie Schrödingera, znów będące przepisem na przewidywanie efektów kwantowych. I choć sam Planck już wtedy protestuje przeciwko teoriom kwantowym (wie bowiem, że jest to rzecz „z innej opery", niż dotychczasowa fizyka), teorie te zwyciężają w tym sensie, że są powszechnie akceptowane i używane. Metodologia empiryczna powraca.

W matematyce rzecz biegnie wolniej, ale też biegnie. Powstałe mniej więcej równocześnie teorie funkcji obliczalnych, algorytmów i automatów (maszyna Turinga) wprowadzają do matematyki posługiwanie się przepisami jako metodę. Zresztą teorie te okazują się w pełni równoważne (dalej będę o takich przepisach pisał – algorytmy). Są to ciągle jednak przepisy poparte dowodami i z metodologii dedukcyjnej „nie wystają".

Po drugiej wojnie światowej sytuacja się radykalnie zmienia. Komputer – podstawowy pożeracz algorytmów, świetne narzędzie do korzystania z nich – ma apetyt znacznie przewyższający możliwości produkowania algorytmów, dla których istnieją (dedukcyjne) dowody ich poprawności.

I w pewnym momencie opór przed przepisami-algorytmami nie posiadającymi dowodów załamuje się. Wchodzą do użytku tzw. procedury niezbieżne, to znaczy takie,

Wyraźnie sugeruję, że między metodologią stosowaną przez informatyków a metodologią, jakiej używali Babilończycy istnieje bliskie pokrewieństwo. Nie jest to jednak mój pomysł. Jest to od kilkunastu lat dominujące podejście historyków babilońskiej nauki.
Porównaj:
Donald E. Knuth, *Ancient Babylonian algorithms*, in: Communications of the ACM 15(1972),
Jan Waszkiewicz, *System informatyczny jako składnik kultury (studium przypadku matematyki babilońskiej*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1987.

które nie mają (i mieć nie mogą) dowodu poprawności, ale które w praktyce są użyteczne. A potem pozostaje już tylko do odnotowania fakt, że dla znacznej liczby programów (czyli opisów algorytmów) nie mamy metody sprawdzenia poprawności. Metodologia empiryczna wdarła się i tutaj.

Zwracam uwagę na te fakty i na różnicę między dwoma zasadniczymi sposobami gromadzenia wiedzy, dwiema metodologiami, dlatego, że rozpowszechnia się coraz bardziej opinia o zmianach, jakie zajdą w matematyce w związku ze stosowaniem komputerów.

Zmianę tę upatruje się w przejściu od metod ciągłościowych (jakie dominowały w matematyce XVII-XIX wieku) do metod dyskretnych (charakterystycznych dla techniki komputerowej). Wydaje mi się, że popełnia się tu przeoczenie. Przecież metod ciągłościowych używało się i używa w problemach dyskretnych (np. metoda sita w teorii liczb), a także używało się i używa metod dyskretnych w problemach ciągłościowych (np. rozwinięcie funkcji w szereg czy lemat Spernera w teorii retraktów). O kształcie matematyki nie decydują używane do jej rozwijania metody (ciągłe, dyskretne czy jeszcze inne), lecz sposób rozwijania jej problematyki, tematy jakie są obiektem badań i kryteria uznawania wyników za poprawne.

Jeśli więc coś się może zmienić, to nie na froncie ciągłe-dyskretne, lecz w kwestii metodologii. Czy mianowicie matematyka (i w ogóle nauka) utrzyma się w obrębie metodologii dedukcyjnej, czy też powróci na tron, po tysiącleciach, metodologia empiryczna. Czy przestaniemy żądać dla uznanych w nauce prawd dowodów. Przełom taki byłby o wiele głębszy od przesunięcia punktu ciężkości np. z metod ciągłościowych na dyskretne.

Co do źródła cywilizacyjnego metodologii dedukcyjnej zdania są różne. Ja np. widzę je w koczowniczym pochodzeniu Dorów – zmieniające się warunki życia zmuszały do szukania praw może uboższych, ale sprawdzających się w każdych warunkach, nawet takich, gdy doświadczenie nic podpowiedzieć nie może. Proponuje się i taki pogląd (np. wrocławscy historycy matematyki), że źródłem dedukcji jest system demokratyczny, który wymusza sprawność prowadzenia dyskusji. Zestawienie jednak tego poglądu z wnioskami, jakimi kończę artykuł jest przerażające.

A czy tak będzie? Mam pewne wątpliwości. Nie biorą się one jednak z obserwacji matematyki czy informatyki, a raczej z historii. Przełom metodologiczny, jaki odbył się w przeciągu kilkuset lat gdzieś na przełomie drugiego i pierwszego tysiąclecia przed naszą erą, odbywał się równocześnie z całościową zmianą cywilizacyjną (a skłonny byłbym sądzić nawet, że był jej wynikiem). Zmieniła się dominująca formacja gospodarczo-społeczna ze zbieracko-rolniczej na myśliwsko-pasterską (Abel pokonał Kaina, co *de facto* zaświadcza i Pismo Święte). Matryjarchat ustąpił patryjarchatowi. Powstało niewolnictwo. Itd. itp. Byłoby więc dziwne, gdyby *comeback* metodologii empirycznej mógł się odbyć jedynie za sprawą wyposażenia ludzkości w nowe, sprawniejsze narzędzie.

A gdyby nawet, to żeby nie pociągnął za sobą rewolucyjnej zmiany całości cywilizacji. Tyle, że wtedy sprawa zmiany matematyki będzie i dla samych matematyków niezmiernie mało ważna.