Rozwój matematyki a przemiany w jej nauczaniu (część II)

Agnieszka WOJCIECHOWSKA, Wrocław

Zmiany otoczenia matematyki

Świadomość wpływu, jaki społeczne i kulturowe otoczenie oświaty oraz środowisko, w którym rozwija się matematyka, wywierają na zmiany programowe w jej nauczaniu, każe wnikliwie obserwować ewolucję tego środowiska. Jest przy tym ważna nie tylko znajomość zjawisk z przeszłości i obserwacja tych, które zachodzą obecnie, lecz także (a może nawet zwłaszcza) wybieganie myślą do przodu.

Jeśli bowiem impulsem do zmian programów nauczania jest zazwyczaj odczucie nieadekwatności treści i metod nauczania do oczekiwań społecznych czy też diagnozy potrzeb (nie interesuje nas tu jak i na jakiej podstawie dokonuje się takiej oceny), to weryfikacja takiego przedsięwzięcia dokonywana jest z wieloletnim opóźnieniem – w praktyce szkolnej, w wynikach absolwentów, w ich późniejszym życiu. Tak więc weryfikacja może mieć miejsce w innych warunkach niż te, które reformę spowodowały i towarzyszyły jej wprowadzaniu. Problemy wówczas ważne mogą się okazać mało istotne z perspektywy czasu i na odwrót – powstać mogą zjawiska, których znaczenia nie przewidziano. Naturalny jest więc postulat, by propozycjom reformy towarzyszyla refleksja nie tylko na temat bieżących zadań (celów) matematycznego kształcenia, lecz także przewidywanych zmian, przynajmniej w obszarach tak istotnych, jak kierunki rozwoju samej matematyki, potrzeby i oczekiwania społeczne w stosunku do niej, jej miejsce w kulturze, nauce i życiu społecznym, kształt systemu edukacji itp.

Dotychczas przy projektowaniu programów nauczania matematyki kierowano się (na ogół) milcząco przyjmowaną zasadą *status quo*: przyjmowano, że żadne z czynników mających wpływ na kształcenie matematyczne i na użytek czyniony z wiedzy matematycznej nie ulegną radykalnej zmianie we wchodzącej w rachu- przyszłości.

Patrz np. [39], gdzie omówione jest szerzej nieuniknione opóźnienie zmian w poglądach na nauczanie matematyki, a co za tym idzie, w treściach nauczania, w stosunku do przemian wizji matematyki w oczach samych matematyków.

Co więcej, kierowano się częstokroć mocno zdezaktualizowaną wiedzą na temat stanu rzeczy. Wydaje się to zresztą nieuniknione, jeśli wziąć pod uwagę znaną długość cyklu prac nad zasadniczymi zmianami programowymi, jak również fakt, że we wszystkich ważnych tu obszarach dydaktyka matematyki skazana jest na korzystanie z wiedzy „z drugiej ręki". Dotyczy to nawet tak bliskiej nauczaniu matematyki sprawy, jak ogólna wizja nauczanego przedmiotu. Dla przykładu – odzwierciedlony w Programie Merańskim pogląd Felixa Kleina na naturę matematyki odpowiadał raczej matematyce XIX-wiecznej niż współczesnej Programowi (1908). W tym czasie bowiem rozpoczęła się już przebudowa matematyki na bazie teorii mnogości, z coraz szerszym użyciem metody aksjomatycznej. Gdy z kolei dydaktyka przyjęła do wiadomości te zmiany w matematyce, co zapoczątkowało w latach 60. ruch „Nowej Matematyki" – nauka ta dokonała zwrotu w innym kierunku i koncepcje dydaktyczne New Math raziły swym anachronizmem.

Nauczanie matematyki nie stanowi, oczywiście, wyjątku. Podobnie jest z innymi przedmiotami szkolnymi. O ile nastawienie futurologiczne – przynajmniej w niektórych okresach – wyraźne jest w refleksji nad funkcjonowaniem systemów oświatowych czy nauczaniu „w ogóle" ([4], [6], [11], [12], [14], [19], [31]), o tyle nie znajduje ono na ogół odbicia w refleksji nad programami poszczególnych przedmiotów.

Być może wiąże się to z anachronizmem samej instytucji „przedmiotów nauczania" (por. [15], [38]), a może raczej z naturalną tendencją do przekazywania w toku nauki szkolnej jedynie wiedzy sprawdzonej i usankcjonowanej przez tradycję. Zapewne trudne jest przełożenie ogólnych dywagacji na język konkretnych haseł programowych i wskazówek metodycznych. Dodatkową trudność sprawia brak odpowiednich opracowań prognostycznych.

Myślenie o zmianie programu nauczania matematyki jako o procesie społecznym oraz dbałość o jego skuteczność każą przykładać większą wagę do przyszłych zmian zarówno w samej matematyce, jak i w jej socjo-kulturowym otoczeniu, zwłaszcza w okresach, gdy zmiany te następują szybko. Z taką sytuacją mamy bez wątpienia do czynienia obecnie.

Najbardziej spektakularnym, a równocześnie bliskim matematyce i jej nauczaniu zjawiskiem w zakresie współczesnych nam przemian cywilizacyjnych i kulturowych jest tzw. rewolucja mikroprocesorowa wraz z jej społecznymi i edukacyjnymi skutkami już dostrzegalnymi, jak również możliwymi jedynie do przewidzenia. Niewiarygodnie szybki postęp w tej dziedzinie (cała historia elektronicznej techniki obliczeniowej zaczyna się w latach czterdziestych, a pierwszy mikroprocesor skonstruowano w 1971 roku) spowodował, że w ciągu kilku lat elektroniczne przetwarzanie danych stało się w krajach rozwiniętych wszechobecne, zmieniając gwałtownie wiele dziedzin życia (patrz [32]).

Tak burzliwego rozwoju technologii nie przewidywano jeszcze w końcu lat sześćdziesiątych, być może poza wąskimi kręgami specjalistów. (Wyrazem tego braku wyczucia może być zmniejszanie w tym właśnie okresie nakładów państwowych na prace badawcze i rozwojowe w tej dziedzinie.) Co więcej, zapoczątkowane już przemiany i ich konsekwencje nie od razu zostały zauważone. Modne w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych opracowania prognostyczne, pisane z reguły przez ludzi wrażliwych na nowe zjawiska i procesy o dużym potencjalnym znaczeniu, nie przewidywały rzeczywistego, rewolucyjnego rozwoju sytuacji (np. [3], [35]). Kilka lat później powszechne stały się opinie, takie jak „przyszłe pokolenia patrząc wstecz na wiek dwudziesty uznają obecnie zachodzące zmiany za największe w kulturalnej historii ludzkości" ([8]).

Prosta ekstrapolacja obecnie widocznych tendencji każe przewidywać dalszą postępującą miniaturyzację przy równoczesnym zwiększaniu sprawności obliczeniowej i zmniejszaniu ceny sprzętu elektronicznego. Poza dalszym postępem w tym kierunku można oczekiwać istotnych zmian jakościowych. Oto opinia prof. Tohru Moto-Oka, kierującego w Japonii programem prac badawczo-rozwojowych w tej dziedzinie, o komputerze piątej generacji, wypowiedziana w wywiadzie dla tygodnika *Newsweek*: „Będzie to maszyna, która będzie czytać pisać i mówić w wielu językach, używając tych samych metod komunikowania, jakimi posługują się ludzie (...). Lecz najważniejsze jest to, że będzie ona sama uczyć się, myśleć i wytyczać drogę rozwiązania postawionego jej zadania". Jak widać, ocieramy się o *science-fiction*, ale ta fantazja staje się rzeczywistością niemal z dnia na dzień. Nie tylko wieloletni cykl prac nad programami nauczania, ale i nawet czas przygotowania tego artykułu sprawiają, że duża część przewidywań stanie się rzeczywistością, zanim przedstawione tu rozważania spotkają się z jakimkolwiek oddźwiękiem.

Nie rozpisując się tu na temat edukacyjnych implikacji toczącej się rewolucji informatycznej zasygnalizujemy tylko najbardziej bezpośrednie i nie budzące wątpliwości. Przede wszystkim zauważyć trzeba wzrost dostępu uczniów do techniki obliczeniowej. Już w roku 1980 uczniowie w połowie szkół amerykańskich mieli dostęp do mikrokomputerów na terenie szkół. Obniżka cen i postęp indywidualnej komputeryzacji może jednak uczynić zbędnymi projekty wyposażenia każdej klasy szkolnej w komputer, gdyż stają się one powszechnie domowym przedmiotem codziennego użytku.

Tak szerokie użycie komputerów stwarza konieczność masowego kształcenia informatycznego. Jasne jest, że w wysoce skomputeryzowanym świecie braki wykształcenia informatycznego na elementarnym poziomie stanowić będą silny czynnik upośledający możliwość zawodowego i społecznego awansu czy choćby w miarę sprawnego funkcjonowania jednostek i grup społecznych. Jak się wydaje, szkolnictwo odpowiada na to zapotrzebowanie z dużym opóźnieniem. Obecnie kształcenie w tej dziedzinie odbywa się głównie poza szkołą. Jednakże „alfabityzacja" stanie się niemal na pewno jednym z zasadniczych celów szkoły, a obecny dystans jest wynikiem powolnego tempa adaptacji tej instytucji do warunków otoczenia.

Wspomnijmy jeszcze krótko o dwóch ważnych oświatowych implikacjach obecnych przemian technicznych. Pierwsza – to rosnące zapotrzebowanie na uzupełnienie i zmianę (czasem całkowitą) kwalifikacji pracowników związane z koniecznością przesuwania całych grup na inne stanowiska (w wyniku np. automatyzacji niektórych prac). W tej sytuacji kształcenie ludzi dorosłych stanie się ważnym zadaniem oświaty.

Następny problem związany z informatyzacją to ogromne i rosnące zapotrzebowanie na kadrę obsługującą tę dziedzinę techniki i życia społecznego.

Poza specjalistami od różnych aspektów informatyki trzeba też przewidywać powstanie licznych grup specjalistów od jej zastosowań. Obecny system oświatowy zupełnie nie jest przystosowany do tych zadań.

Z tymi nowymi zadaniami oświaty w sposób oczywisty wiąże się wzrost zapotrzebowania na kształcenie matematyczne, jak i na wybiegające w przyszłość prace programowe w tym zakresie. Jednakże otwartym problemem pozostaje jeszcze charakter matematyki nauczanej na różnych poziomach. Częściowo będzie on narzucony przez rozważane powyżej zadania oświaty, częściowo zależeć będzie od zmian w samej matematyce (która też nie jest wolna od wpływów). Nie jest przy tym wykluczone, że przeżyje ona przemiany równie gruntowne, jak jej otoczenie, a przewidywanie tego jest jeszcze ważniejsze dla prac programowych niż przewidywania związane z rewolucją informatyczną.

Przemiany matematyki

Nauczanie matematyki, które przestało się kierować względem na tradycję, musi – jak już powiedzieliśmy – brać pod uwagę nie tylko stan dzisiejszy tej nauki, ale też atycypować jej przyszły rozwój. Jeśli prace programowe podporządkowane mają być, jak to było w czasie burzliwych zmian programowych połowy naszego stulecia, domniemanej wizji „matematyki współczesnej", to biorąc pod uwagę wieloletni cykl ustalania i wdrażania programu – punktem wyjścia powinny czynić nie tyle obecny stan rozwoju tej nauki, ale jej prawdopodobną ewolucję w ciągu najbliższych dziesięcioleci. Jeśli z kolei uważa się pogoń za nowoczesnością za szkodliwą iluzję (do czego się skłania autor niniejszego opracowania), też nie należy przechodzić do porządku nad rysującymi się tendencjami rozwoju matematyki. Jasne jest bowiem, że od wpisania prac programowych w jakiś silniejszy nurt zależy skuteczność działań programowych. Program bowiem będzie realizowany przez nauczycieli w znacznej mierze przygotowanych do zawodu w zmienionych przez te nowe tendencje warunkach, przy innym (być może) odczuciu standardów naukowości, innej definicji miejsca i roli natematyki w nauce, kulturze i społeczeństwie. Ta zmieniona (powtórzę, że zmiana taka jest tylko godną uwagi możliwością) rola wpływać może również na sposób odbioru proponowanego materiału (i metod) przez uczniów. Tak więc zmiany wewnątrz matematyki i w kontekście jej działania mogą mieć istotny wpływ na realizowany i przyswajany program, nawet jeśli nie będą inspirować bezpośrednio programu zamierzonego przez jego twórców. Przy spojrzeniu na dydaktykę matematyki jako na badanie możliwych wyborów w zakresie nauczania matematyki pytania o przyszły rozwój tej nauki są co najmniej równie zasadne, jak badania dotyczące jej przeszłości.

Konieczność powiązania dydaktyki matematyki z jej historią nie budzi już obecnie wątpliwości, co widoczne było np. w pracach Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Warszawie w 1983 roku.

Ponieważ przedstawione tu rozważania dotyczące przyszłości matematyki obciążone są z konieczności dużym marginesem niepewności i dowolności w doborze znaczących tendencji, muszę zastrzec, że nie pretenduję do dania wszechstronnego i „obiektywnego" obrazu przyszłości matematyki. Interesować mnie będą jedynie te kwestie, które mogą mieć w niedalekiej przyszłości wpływ na nauczanie matematyki i to przede wszystkim w zakresie zasadniczych wyborów kierunków działania, a nie szczegółowych rozwiązań.

Zdaję sobie sprawę, że nie istnieje w pełni obiektywny obraz przyszłości, a niektóre z istniejących publikacji na ten temat wyraźnie odzwierciedlają upodobania autorów. Trzeba zaznaczyć, że dla nauczania matematyki zasadnicze znaczenie mają odpowiedzi na pytania o miejsce matematyki w kulturze i poznaniu naukowym, o jej stosunek do innych dziedzin wiedzy, położenie centrum najżywotniejszej problematyki badawczej. Lista ta zgodna jest z problemami, jakie przed swoją prognozą [35] postawił J. Waszkiewicz, jednak z uwagi na znaczny radykalizm jego poglądów opieram się szerzej na innych opiniach na ten temat.

Niestety, nie ma zbyt wielu prac naświetlających rozwój matematyki w przyszłości. Jedynie dwie spośród znanych mi pozycji ([30] i [35]) już w tytule określają swoje zainteresowanie tym przedmiotem. Pewne uwagi znaleźć można w osobistych wypowiedziach wybitnych matematyków, np. S. Ulama ([34]) czy J. von Neumanna ([18]) lub w naukowej eseistyce (liczne tego typu pozycje cytowane są w [35]). Z konieczności oprę się na tych nielicznych źródłach, co jest o tyle uzasadnione, że cel niniejszego artykułu został określony raczej skromnie. Podstawę przy tym będą stanowić eseje zamieszczone w [30]. Punkt wyjścia tego zbioru jest bowiem zbieżny z naszymi celami. Jego redaktor, L.A. Steen, tak go przedstawia, pisząc o autorach poszczególnych szkiców:

„Matematycy, którzy współtworzyli tę książkę, są doświadczonymi nauczycielami i naukowcami reprezentującymi rozmaite stanowiska w społeczności matematycznej. Przemawiają tu jako osoby głęboko zaangażowane w rozwój matematyki i matematycznego kształcenia. Wszyscy oni są zainteresowani sposobem, w jaki przekazujemy naturę i wartość matematyki naszym dzieciom. Matematyka jutra będzie taka, jaka jest dzisiaj matematyczna edukacja" ([29], str. 2).

Oczywiście, ostatnie zdanie powyższego cytatu jest raczej zręcznym chwytem retorycznym, niż odzwierciedleniem faktycznego stanu rzeczy. Związek między dzisiejszym nauczaniem matematyki a matematyką jutra jest równie pokrętny jak między wczorajszym nauczaniem a dzisiejszą matematyką. Niemniej ważna jest intencja autorów tomu: identyfikacja tych problemów rozwoju matematyki, które rzutują na dzisiejsze rozwiązania dydaktyczne, i na odwrót – określenie, jaki wpływ na przyszły rozwój nauki mogą mieć dzisiejsze wybory w zakresie jej nauczania. Jest to więc niemal dokładnie problem, który postawiłam przed rozważaniami tego artykułu.

Jaki obraz matematyki wyłania się z całej książki [30]? Głównym problemem, omawianym w niemal wszystkich artykułach, jest stosunek matematyki czystej i stosowanej – zarówno jako dziedzin wiedzy, jak i przedmiotów nauczania na różnych poziomach. Za symptomatyczne można uznać, że sama linia napięcia w przyszłym rozwoju matematyki została wyróżniona jako zasadnicza w pracy [35], na podstawie ogólniejszych przesłanek. Nie wchodząc głębiej w rozważania terminologiczne i klasyfikacyjne, postawmy sprawę na gruncie sporu nie tyle o istotę matematyki (por. [2], str. 54-75), ile o realizowane przez nią wartości. To spojrzenie jest bowiem bliższe problemów, przed jakimi stoi nauczanie (nie tylko, i nie przede wszystkim matematyki). Otóż istota sporu, w grubym uproszczeniu, daje się ująć jako dylemat: czy matematyka jest raczej dziedziną wiedzy o pewnych specyficznych obiektach lub strukturach (której wyniki mogą być praktycznie użyteczne, ale nie to stanowi o ich wartości), czy też matematyka jest przede wszystkim zbiorem intelektualnych narzędzi rozwiązywania problemów realnych (z których pewne mogą mieć same dużą wartość poznawczą, być interesujące itd. – ale znowu nie to przesądza o ich wartości). Jak to ujmuje J.P. King, „czysta matematyka jest to matematyka dla samej matematyki, w przeciwieństwie do matematyki stosowanej, która jest matematyką dla czegoś innego" ([13], str. 30). W omawianym zbiorze zwolennicy „czystości" matematyki (jako istotnej i w związku z tym godnej nauczania cechy), uważają, że nauka ta „ujawnia skomplikowaną strukturę logiczną uniwersum" (Halmos[9]), „posiada wartość estetyczną tak jasno określoną jak muzyka czy poezja" (King[13]) lub „intelektualną harmonię tak subtelną i jasną jak tony muzyki" (Poston[21]). Matematyka dla tych autorów różni się od matematyki stosowanej tak „jak poemat od prawniczej prozy" ([29], str. 2). Rzecznicy matematyki stosowanej w zasadzie nie negują takiego rozróżnienia, choć inaczej rozkładają emocjonalne akcenty. Zwracają za to uwagę na źródła społecznej siły i atrakcyjności matematyki, jak też na wagę związku z zastosowaniami dla rozwoju samej matematyki, nawet „najczystszych jej działów ([16], [26], [33]). Jak to obrazowo ujmuje Halmos, „portret Picassa jest przez wielu uważany za piękny, policyjna zaś fotografia poszukiwanego kryminalisty może być użyteczna, ale zapewne Picasso nie oddaje wiernie podobieństwa, a fotografia policyjna nie dostarcza artystycznych wzruszeń. Czy jest zupełnie niesłuszne nazwać portret niedobrą kopią natury, a zdjęcie – niedobrą sztuką?". Ta analogia uzasadnia opinię Halmosa uwidocznioną już w tytule szkicu: „Matematyka stosowana jest złą matematyką" ([9], str. 20). Tak ostre postawienie sprawy nie jest zbyt częste. Wydaje się, że podkreślanie jedności matematyki jest częstsze. P. Hilton pisze wręcz, że „rozróżnienie między matematyką czystą a stosowaną jest przypadkowe" ([10], str. 159) i uważa, że należy odrzucić „herezje" mówiące o sztywnym ich oddzieleniu zarówno w działalności twórczej, jak i, zwłaszcza, w kształceniu adeptów. Jednakże fakt niemożności przeprowadzenia sztywnych granic nie może tu stanowić decydującego argumentu. Inaczej widzący sprawę Halmos też jest zdania, że „czysta matematyka może być użyteczna w praktyce, a matematyka stosowana może być artystycznie elegancka", jednakże za pomocą trafnej analogii ukazuje istotę problemu: „w pewnym sensie czerwony i pomarańczowy to to samo – po prostu fale, których długości trochę się różnią – i jest niemożliwe wskazać palcem to miejsce w spektrum, gdzie kończy się czerwony, a zaczyna pomarańczowy – ale mimo to pewne jest, że czerwony i pomarańczowy są jednak różne i zadanie rozróżnienia ich prawie nigdy nie jest trudne". Zdaniem Halmosa „podstawowe różnice w motywacji, podejściu, stosowanych technikach i satysfakcji z rezultatów są prawdopodobnie związane z powierzchownymi, ale zwracającymi uwagę różnicami w przedstawianiu. Czysta i stosowana matematyka mają różne tradycje dotyczące jasności, elegancji i prawdopodobnie także rygorów logicznych i te różnice stale utrudniają porozumienie" ([9], str. 14). Z kolei J. Waszkiewicz, po rozpatrzeniu pewnych społecznych różnic konkluduje: "Wyodrębniona grupa społeczna, swoiste instytucje, własna metodologia i, co ważniejsze, samoświadomość metodologiczna, specyficzny etos... Czyżby więc matematyka stosowana była nauką (czy rodziną nauk) całkowicie już odrębną od matematyki czystej?" ([36], str. 100).

J. Waszkiewicz w [35] wychodzi od analizy najogólniejszych przemian cywilizacyjnych i zmian w obrębie nauki. Mimo, iż nie uwzględnił on szerzej rewolucji mikroprocesorowej, przewidywania jego idą w zgodnym z jej następstwami kierunku i potwierdzane są przez późniejsze publikacje.

Więcej informacji na temat różnych koncepcji oddzielenia matematyki czystej od stosowanej znaleźć można w [36].

Jest to wyraźne stosowanie stanowiska zajętego przez tego autora w pracy [35].

Problem oczywiście nie jest nowy. Być może jest on równie stary jak historia matematyki. Jednakże warto zwrócić uwagę na to, że w ostatnich czasach ma on tendencję do zaostrzania się, przynajmniej w dyskusjach związanych z nauczaniem matematyki. Żeby tę tendencję uchwycić, wystarczy porównać dwa obrazy matematyki dane przez tego samego autora. W przedmowie do zbioru [27] L.A. Steen pisze: „Świat matematyki można sobie wyobrazić jako układ koncentrycznych warstw otaczających jądro matematyki czystej. To jądro jest wciąż rozżarzone do czerwoności bogactwem nowych idei, nowych struktur i nowych teorii. Idee z jądra przenikają ciągle poprzez zewnętrzne warstwy nauk matematycznych, zapewniając stały dopływ paliwa intelektualnego niektórym spośród niewiarygodnie zawiłych problemów z bliższych zastosowaniom dziedzin. I na odwrót, problemy pojawiające się w warstwach zewnętrznych – w rozmytej powierzchni styku, gdzie matematyka czysta łączy się z naukami stosowanymi – zaopatrują centralne jądro w nowe struktury, nowe metody i nowe pojęcia" ([28], str. 19). Modyfikacja tego samego obrazu, o niespełne 3 lata młodsza, jest o wiele bardziej dynamiczna: „Obraz matematyki (...) przypomina początek eksplozji przedstawiony w zwolnionym tempie. Potężne siły, wyzwolone przez czysto intelektualną energię jądra matematyki, pchają idee matematyczne we wszystkich kierunkach. Przechodząc przez przyległe dziedziny nauki, fale nowych idei są wzmacniane i przekształcane dostosowując się do nowych przedmiotów badań i nowych metod badawczych. Zanim te nowe siły staną się fragmentem nauki, są ruchliwą, rozedrganą, burzliwą częścią matematyki stosowanej. Energia jądra matematyki jest stale tak samo wielka (pomimo iż ostatnio mniej ludzi penetruje te regiony)" ([30], str. 6).

Tak więc, o ile tom [27] był manifestacją jedności matematyki, o tyle [30] stał się wyrazem pewnych rozpadowych tendencji w jej wnętrzu. Oczywiście mógł zadecydować przypadek – inny zestaw autorów, nieco inny klucz doboru artykułów itp. Jednakże ważne dla nas wydaje się co innego: siły rozpadowe, o których cały czas jest mowa, zidentyfikowane zostały i dobitnie wyrażone właśnie w dyskusji o nauczaniu matematyki.

Dla uzupełnienia przedstawionego obrazu poruszę jeszcze dwie kwestie. Pierwsza – to różne obszary matematyki stosowanej (a może nawet różne jej rodzaje) – klasyczne jej dziedziny i te, które rozwinęły się w ostatnich dziesięcioleciach. Drugim problemem jest wpływ rewolucji informatycznej na omawiane procesy.

Tradycyjnie mówiąc o zastosowaniach matematyki czy też o matematyce stosowanej ma się na myśli pogranicze matematyki i innych nauk przyrodniczych (włączając w to technikę). Takie, sięgające Galileusza (jeśli nie Archimedesa) spojrzenie sprzyja pomniejszaniu procesów i zjawisk zachodzących na innych obszarach stosowania matematyki. Zastosowania w tym ujęciu to przede wszystkim pewne aplikacje analizy i probabilistyki. W imię uczynienia matematyki szkolnej bardziej stosowalną (w wyżej wymienionym sensie) programy szkolne wzbogacono w ostatnich dziesięcioleciach o elementy rachunku różniczkowego i całkowego oraz elementarny kurs rachunku prawdopodobieństwa. Te działy stanowią również ciągle centrum kształcenia w zakresie zastosowań na uniwersytetach (nie tylko w Polsce – jeśli chodzi o szkolnictwo amerykańskie por. [33], str. 40-41). Tymczasem sytuacja w ostatnich dziesięcioleciach zmieniła się radykalnie, na co decydujący wpływ miało rozpowszechnienie elektronicznej techniki obliczeniowej. Przy tym, co szczególnie ważne, nowe, burzliwie rozwijające się aplikacyjne działy matematyki przynoszą nie tylko nowe problemy, sposoby, podejścia, teorie. Towarzyszy im bardziej zasadnicza zmiana o wręcz światopoglądowym charakterze. Pisząc o książce G. Polyi [20], J. Łoś zauważa, że przedstawiony w niej świat, „choć bardzo skomplikowany, jest dobrze skonstruowanym tworem dostępnym prostym badaniom nie wymagającym niczego, co by on sam nie narzucił. Matematyka co najwyżej służy opisowi tego świata, a opis jest pożyteczny, gdyż dotyczy zjawisk powtarzających się z wielką regularnością. Nie sądzę, aby współczesną naukę i rolę, jaką matematyka w niej pełni, można było zamknąć w tak idyllicznym obrazie". Po tej opinii następuje konkluzja o „nieco XIX-wiecznym" charakterze materiału danego w książce Polyi ([16], str. 127)

W.F. Lucas tak charakteryzuje zmiany w matematyce ostatnich dziesięcioleci: „Można twierdzić, że jednym z najbardziej rewolucyjnych zjawisk w matematyce dzisiejszej jest wzrost liczby nowych dyscyplin, które mogą służyć jako źródło nowych intuicji i twórczości w naukach matematycznych. Z drugiej strony, wiele dziedzin zostało dokładnie zbadanych z matematycznego punktu widzenia po raz pierwszy za naszych czasów. Należą tu duże obszary nauk społecznych, psychologii i biologii, gdzie prowadzi się ilościowe rozważania takich pojęć jak wartości etyczne, równość, konflikty i ugody, ocenianie, użyteczność i wiele innych. Śmiało można powiedzieć, że postęp w tych kierunkach (podobnie jak w tych, gdzie zaangażowane są komputery i matematyka dyskretna) wywrze rewolucyjny wpływ na matematykę, nawet jeśli kierunki te są obecnie we wczesnych stadiach rozwoju. Jest także oczywiste, że dla potrzeb tych nowych dziedzin będą musiały powstać całkowicie odmienne teorie matematyczne: nie wystarczy wciąż operować ideami, które narodziły się z fizyki i geometrii.

Współdziałanie z tymi świeżo zmatematyzowanymi dziedzinami powinno w znaczący sposób wpłynąć na wzrost matematyki, jak również poszerzyć istotnie możliwości zatrudnienia wykształconych matematyków" ([15], str. 57-58).

Podobny obraz sytuacji przedstawiają inni autorzy (por. [35] i liczne cytowane tam opinie). Znaleźć je zresztą można w dawniejszych wypowiedziach wielkich matematyków, np. J. von Neumanna [18] czy S. Ulama [34].

Wrażeniu gwałtownych przemian, wręcz kryzysu, towarzyszy przeświadczenie, że wyłania się z niego inna „matematyka o innej tematyce i z innymi priorytetami niż dotychczas uprawiana" ([24], str. 70). W szczególności przewiduje się czy wręcz obserwuje wzrost znaczenia matematyki dyskretnej kosztem analizy (Halmos[9], Ralston[22]), w uprawianiu zastosowań i kształceniu w tym zakresie podkreśla się rolę umiejętności rozwiązywania problemów (*problem solving* w sensie Ackoffa[1]), wypracowywania metod *ad hoc* i wyszukiwania adekwatnych podejść wśród istniejących narzędzi (*mathematical clinic* J. Spaniera[26]) itp.

Obydwaj cytowani tu autorzy nieco inaczej określają zakres „matematyki dyskretnej", co jest naturalne w odniesieniu do zjawiska względnie nowego.

Do obrazu sytuacji trzeba tu dodać jeszcze jeden istotny element. Wyzwaniem dla matematyki, jako nauki, kierunku studiów i zawodu, stały się pewne nowe obszary jej zastosowań. Powodują one bowiem powstanie nowych problemów nie tylko intelektualnej, ale i społecznej natury (por. [34], [35], [36]). Najważniejszym zjawiskiem jest emancypacja nowych nauk czy kierunków wiedzy, zagrażająca rozwojowi matematyki poprzez odpływ utalentowanych studentów i badaczy, zmianę priorytetów w subsydiowaniu nauki itp. W szkolnictwie tendencje te stwarzają presję w kierunku wprowadzenia do szkół nowych przedmiotów nauczania (np. socjologii), co powoduje zmniejszanie przydziału godzin lekcyjnych na przedmioty dotąd „uprzywilejowane", do jakich niewątpliwie należy matematyka. W.F. Lucas stwierdza, że „prawdopodobnie największą szkodą dla dobra matematyki i osób ją uprawiających było, spowodowane przez elitarną postawę, jaką przyjmowali matematycy w okresie od 1950 do 1975 roku, wyłączenie z większości uniwersyteckich wydziałów matematyki wielkich nowych obszarów badań jak informatyka, badania operacyjne, kombinatoryka i matematyczne nauki społeczne. Jak często bywa w przypadkach stosowania takiej dyskryminacji, matematycy nie tyle powstrzymali nowych przybyszów czy ówczesne grupy mniejszościowe, co ogrodzili się sami na własnym terytorium" ([15], str. 61). Spowodowało to, jak podkreśla wielu autorów tomu [30], spadek zainteresowania studiami i badaniami matematycznymi, będzie też miało dalsze skutki w przyszłości. Jak zauważa A. Tucker, „Problemy matematyczne tkwiące w problemach takich, jak optymalne gospodarowanie niewystarczającymi zasobami lub usprawnienie operacji w publicznym i prywatnym sektorze gospodarki, gwarantują na przyszłość duże zapotrzebowanie na matematyków. Te problemy wymagają od rozwiązujących sprawności w prowadzeniu rygorystycznych logicznych rozumowań i doświadczenia w posługiwaniu się metodami i modelami matematyki stosowanej. Jeśli wydziały matematyczne nie podejmą się kształcenia takich „rozwiązywaczy problemów ilościowych", to zajmą się tym wydziały inżynieryjne lub organizacji i zarządzania na politechnikach" ([33], str. 43).

Jak widać, pogranicze, o którym jest mowa, decyduje obecnie o tym, co jest (i będzie w przyszłości) zaliczane do matematyki, określa społeczne wyobrażenie tej nauki, formułuje najsilniejsze bodaj oczekiwania pod jej adresem, wpływa na rangę (przynajmniej pod pewnymi względami) poszczególnych jej działów itd. Są to wszystko problemy nieobojętne dla nauczania matematyki (to jest właśnie myślą przewodnią zbioru [30]). O ile jednak można obecnie mówić o dydaktycznym „oswojeniu" klasycznych działów matematyki (por. [7], [20]), zwłaszcza pogranicza matematyki i fizyki ([22]), o tyle trudno powiedzieć to samo o współczesnych dziedzinach zastosowań matematyki. Brak jest nawet nie tylko względnej jednomyślności, ale wręcz wyrobionych poglądów na tę sprawę. Oczywiście, jest tu wiele możliwości. Można nie przejmować się nowymi tendencjami, choć obecnie trzeba być jednocześnie świadomym różnorodnych i daleko idących konsekwencji takiego wyboru. Można dokonać zwrotu w stronę nauczania zorientowanego komputerowo, można starać się włączać w kształcenie (na różnych poziomach) nowych dziedzin i nowych podejść, można wreszcie całkowicie skapitulować pod presją nowych tendencji (pomijam w tej chwili wykonalność takiego czy innego manewru). Wydaje się jednak, że nie można jednego – chować głowy w piasek udając, że problemy tu naszkicowane nie istnieją.

Oczywiście to „oswojenie" nie oznacza, że w praktyce dydaktycznej nie występują znaczne napięcia i trudności. Niemniej jednak wynikiem jego jest ważna modyfikacja programów nauczania dokonana w znacznej mierze pod naciskiem potrzeb fizyki i techniki – wprowadzenie do szkół elementów analizy matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa.

Problemy te zakorzenione są w najgłębszych przemianach kulturowych i cywilizacyjnych i mają wręcz światopoglądowe znaczenie, co jest niezwykle ważne, zwłaszcza dla nauczycieli.

Zresztą nawet bez wyraźnego uświadamiania sobie całej złożoności sytuacji autorzy różnych koncepcji nauczania, nawet w ramach tego samego programu – a więc osoby opracowujące rozkłady godzin i wskazówki metodyczne dla nauczycieli, autorzy podręczników i w końcu sami nauczyciele – dokonują wyborów związanych właśnie z opisanymi problemami. Pewnych, choć na niewielką skalę, przykładów takich opcji dostarcza – niestety krótka – historia alternatywnych podręczników dla klas IV i częściowo V, funkcjonujących na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych (patrz [37]). Obecnie obowiązujące programy i (jedyny) ciąg podręczników są wynikiem tylu poprawek i kompromisów, że znacznie trudniej jest odczytać przyświecającą ich autorom ideę (choć, być może, zyskały nieco na poprawności pod wpływem krytyki). Zapewne ten stan rzeczy nie utrzyma się długo i dobrze byłoby, aby następna reforma okazała się bardziej przemyślana i konsekwentna w dokonywanych wyborach.

Zmiany na pograniczu matematyki i jej zastosowań, którym (za [30]) poświęciliśmy tyle uwagi, nie wyczerpują wszystkich rewolucyjnych przemian, jakie prawdopodobnie oczekują matematykę w przewidywalnej przyszłości. Warto tu jeszcze wspomnieć o prawdopodobnych metodologicznych skutkach „wtargnięcia" komputerów w obszar matematyki „czystej", istotne użycie komputerów do dowodzenia twierdzeń matematycznych. Sprawa ta była obszernie dyskutowana w związku z dowodem przez Appela i Hakena twierdzenia o czterech barwach (por. [5], [25], [35], str. 128-131). Sformułowano przy tym wiele daleko idących przypuszczeń, których przykładem może być (wcześniejsza zresztą) opinia S. Ulama. W swojej autobiografii wyraził on przypuszczenie, że „matematyka ogromnie zmieni swój wygląd. Może się rozwinąć coś drastycznego – całkowicie odmienny punkt widzenia na metodę aksjomatyczną. Zamiast szczegółowej pracy nad specjalnymi twierdzeniami, które obecnie idą w miliony, zamiast myślenia w kategoriach operowania symbolami danymi raz na zawsze, być może matematyka będzie się coraz bardziej zajmowała problemami, żądaniami czy też programami ogólnej natury. Nie będzie w niej dodatkowego mnóstwa specjalnych przestrzeni, definicji specjalnych rozmaitości, specjalnych przekształceń tego i owego – choć kilka przetrwa: *apparent rari nantes in gurgite vasto*. Nie będzie nowych kolekcji indywidualnych twierdzeń, ale ogólne szkice czy zarysy większych teorii, szerszych przedsięwzięć, a rzeczywiste opracowanie dowodów twierdzeń pozostawione będzie studentom czy nawet maszynom. Można to porównać do impresjonistycznego malarstwa, przeciwstawionego mozolnemu, szczegółowemu malowaniu dawniejszych czasów. Scena będzie, być może, bardziej żywa i zmieniająca się, nie tylko jeśli chodzi o wybór definicji, ale i samych reguł gry, wielkiej gry, której reguły nie zmieniły się od starożytności" ([34], str. 286-287). Obraz powyższy, niezbyt precyzyjny, oddaje jednak dobrze zasięg zmian, z którymi możemy mieć do czynienia w przewidywalnej przyszłości. Rozwój elektroniki uczynił go na pewno znacznie bardziej przwdopodobnym (i możliwym do uzupełnienia), niż był przed 15 laty, gdy Ulam pisał swoje wspomnienia. W każdym razie widać, że pokolenie obecnie kształcone w szkole (a nawet na studiach wyższych) musi być w jakiejś mierze przygotowane do sprostania zmianom o epokowym charakterze.

Cytowana literatura

[1] R.L. Ackoff, *The art of problem solving*, New York - Chichester - Brisbane - Toronto, 1987; tł. ros. *Iskustwo rieszenija problem*, Moskwa, 1982;

[2] K. Ajdukiewicz, *Zagadnienia i kierunki filozofii*, Warszawa, 1984(wyd. II);

[3] G.C. Cornish, *The study of the future: an introduction to the art and science of understanding and shaping tomorrow's world*, Washington, 1977;

[4] *D'education en devenir*, UNESCO, Paris, 1975;

[5] R. Duda, *O nowej roli komputerów w matematyce*, Wiadomości Matematyczne 24(1982), str. 47-55;

[6] E. Faure i in., *Uczyć się, aby być*, Warszawa, 1975;

[7] R.L. Finney, *Applications of undergraduate mathematics*, w [30], str. 197-212;

[8] T.J. Fletcher, *Ulepszanie programów nauczania matematyki w zmieniających się społeczeństwach*, Wiadomości Matematyczne 27(1986), str. 93-108;

[9] P.R. Halmos, *Applied mathematics is bad mathematics*, w [30], str. 9-20;

[10] P.J. Hilton, *Avoiding math avoidance*, w [30], str.73-80;

[11] T. Husen, *Oświata i wychowanie roku 2000*, Warszwa, 1974;

[12] I. Illich, *After deschooling, what?*, London, 1974;

[13] J.P. King, *The unexpected art of mathematics*, w [30], str. 29-38;

[14] C. Kupisiewicz, *Przemiany edukacyjne w świecie*, Warszawa, 1978;

[15] W.F. Lucas, *Growth and new intuition: can we meet the challenge?*, w [30], str. 55-69;

[16] J. Łoś, *Recenzja książki: G. Pólya, Mathematical methods in science*, Wiadomości Matematyczne 24(1982), str. 123-127;

[17] R. Łukaszewicz, W. Łukaszewski, J. Waszkiewicz, *Założenia programu „Wrocławska Szkoła Przyszłości"*, w: B. Suchodolski(red.), *Model wykształconego Polaka, materiały sesji naukowej*, Wrocław - Warszawa - Kraków - Gdańsk, 1980, str. 587-624;

[18] J. von Neumann, *The Mathematician*, w *Collected works*, Oxford - New York - Toronto, 1961;

[19] J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja*, Warszawa, 1977;

[20] G. Pólya, *Mathematical methods in science*, The mathematical Assotiation of America, New Mathematical Library 26, 1977;

[21] T. Poston, *Purity in applications*, w [30], str. 49-54;

[22] A. Ralston, *Decline of calculus – the rise of discrete mathematics*, w [30], str. 213-220;

[23] H. Rogers,jr., *Physics and mathematics*, w [30], str. 231-236;

[24] S. Rolewicz, *Refleksje o stanie matematyki polskiej*, Wiadomości Matematyczne 25(1983), str. 69-73;

[25] Z. Semadeni, *Uwagi do artykułu R. Dudy*, Wiadomości Matematyczne 24(1982), str. 56-57;

[26] J. Spanier, *Solving equations is not solving problems*, w [30], str. 21-28;

[27] L.A. Steen(red.), *Matematyka współczesna, dwanaście esejów*, Warszawa, 1983;

[28] L.A. Steen, *Matematyka dzisiaj*, w [27], str. 13-24;

[29] L.A. Steen, *Introduction*, w [30], str. 1-6;

[30] L.A. Steen(red.), *Mathematics tomorrow*, New York -Heidelberg - Berlin, 1981;

[31] J. Thomas, *Edukacyjne problemy współczesnego świata*, Warszawa, 1980;

[32] A. Toffler, *The third wave*, Toronto - New York - Sydney, 1981;

[33] A. Tucker, *Redfining the mathematics major*, w [30], str. 39-48;

[34] S. Ulam, *Adventures of a mathematician*, New York, 1976;

[35] J. Waszkiewicz, *Prognoza rozwoju matematyki do roku 2000*, w: G. Olszewski, L. Zacher(red.), *Perspektywy postępu nauki i techniki, Polska 2000* 2(1980), str. 84-104;

[36] J. Waszkiewicz, *Wzajemne związki matematyki czystej i stosowanej*, w: *Człowiek i nauka 1982/1983*, Warszawa, 1983, str. 91-104;

[37] J. Waszkiewicz, A.Wojciechowska, *O wprowadzeniu alternatywnych podręczników do klasy czwartej*, Wiadomości Matematyczne 24(1982), str. 203-216;

[38] I. Westbury, *Change and stability in the curriculum: an overview of the question*, w: H.G. Steiner(red.), *Comparative studies of mathematics curricula – change and stability*, Bielefeld, 1980;

[39] A. Wojciechowska, *Change and failure in mathematics curricula*, preprint nr65, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 1986;

[40] A. Wojciechowska, *Rozwój matematyki a przemiany w jej nauczaniu, I*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie, z.1, Siedlce, 1988.