O kilku ciągowych charakteryzacjach przestrzeni

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Poznając nowy fragment matematyki odkrywamy nieznany świat. Często nie od razu dostrzegamy jego uroki. Gdy zafascynowani jakimś pytaniem (problemem) lub twierdzeniem zatrzymamy się nad nim dłużej, możemy nie tylko poznać jego historię, ale również sami ją tworzyć odkrywając nowe zależności. Jest to obok ciekawości jeden z głównych powodów, dla którego niektórzy z nas stale dążą do poznania nowego.

W tym artykule proponuję wyprawę, której celem będzie podglądanie wszechobecnego w matematyce pojęcia – zbieżności, oraz kilku związanych z nim charakterystyk przestrzeni. Znaczący w tych badaniach jest wpływ polskiej myśli matematycznej.

1. Wprowadzenie

Nawet w intuicyjnym rozumieniu, słowo *zbieżność* nabiera znaczenia dopiero wtedy, gdy w danej sytuacji wiemy jak rozumieć określenia *blisko*, *daleko*.

W matematyce możemy do tego celu wykorzystać rodzinę wyróżnionych podzbiorów danej przestrzeni, tzw. topologię lub mniej skomplikowane narzędzie jakim jest *metryka* – funkcja, która określa, jak w danym zbiorze mierzymy odległość jego elementów. Pewnym mankamentem jest tutaj dość oczywisty fakt: zbieżność zależy od naszego wyboru topologii bądź metryki. To zagadnienie jednak pominiemy. Dla wygody będziemy przyjmować, że w rozważanych przestrzeniach mamy zadane topologie bądź metryki naturalne, np. w przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ odległość mierzymy wzorem $d(x,y) = |x-y|$.

Mamy więc dany zbiór E i określoną w nim metrykę d. Mówimy, że ciąg punktów $\{x_n\} \subset E$ jest zbieżny do elementu $g \in E$ (ma granicę g), gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n>p}\ d(x_n, g) < \varepsilon$$

(w miarę wzrostu numerów, wyrazy ciągu $\{x_n\}$ coraz bardziej zbliżają się do elementu g). Ta definicja jest nam znana ze szkoły.

2. Przestrzenie Banacha

Dalsze rozważania będziemy prowadzić w przestrzeniach, które w analizie funkcjonalnej zajmują wyróżnioną pozycję. Nabrały one ogromnego znaczenia dzięki wynikom uzyskanym przez matematyków tworzących w okresie międzywojennym tzw. lwowską szkołę matematyczą. Byli to obok Banacha – Steinhaus, Mazur, Schauder, Ulam, Kac, Orlicz, Kaczmarz, Auerbach. W tych przestrzeniach szczególnie ważną rolę przypisano zbieżności. Są to przestrzenie liniowe unormowane i zupełne – nazywamy je *przestrzeniami Banacha.*

Liniowość przestrzeni gwarantuje, że wykonalne są w niej operacje dodawania jej elementów i mnożenia ich przez liczby (rzeczywiste lub zespolone).

Zupełność przestrzeni oznacza, że każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni ma w niej granicę (obrazowo: każdy ciąg zbiegający w tej przestrzeni osiąga w niej granicę). Przestrzenie te szczęśliwie

1) obejmują bogatą klasę szczególnych przypadków, które często pojawiają się w praktyce matematycznej,
2) są naturalnym środowiskiem rachunku różniczkowego, który stanowi podstawę klasycznej analizy,
3) pojawiają się ilekroć chcemy rozszyfrować (np. z punktu widzenia fizyki) strukturę rzeczywistego świata.

3. Zbieżność w sensie Cesàro

Podane wyżej (szkolne) określenie, kiedy uznajemy, że dany ciąg jest zbieżny nie wszystkich zadowala i nie w każdej sytuacji jest najlepsze. Możemy się na przykład umówić, że:

Definicja 1. Ciąg $\{x_n\}$ jest $(C,1)$-*zbieżny* do elementu g, gdy nowy ciąg średnich arytmetycznych $\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\}$ jest zbieżny w zwykłym znaczeniu do elementu g.

Jest to tzw. *zbieżność sensie Cesàro* (jedna z prostszych metod macierzowych w teorii limesowalności).

Nietrudno zauważyć że ciąg liczbowy $\{x_n\}$, który jest zbieżny w zwykłym sensie do liczby g, również jest zbieżny w sensie Cesàro do liczby g [12]. Łatwo również wskazać ciągi liczbowe, które w zwykłym sensie nie są zbieżne, natomiast są zbieżne w sensie Cesàro.

Przykład 1. Ciąg $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ nie jest zbieżny w zwykłym sensie, natomiast jest on $(C,1)$-zbieżny do 0. Ogólniej, ciąg okresowy $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ o okresie $p \in \mathbb{N}$, czyli spełniający warunek $x_{n+p} = x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, jest $(C,1)$-zbieżny do liczby

$$\frac{1}{p}(x_N + x_{N+1} + \ldots + x_{N+p-1}).$$

Przykład 2. Ciąg liczb zespolonych $\{z, z^2, z^3, \ldots\}$ utworzony dla dowolnego $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \wedge z \neq 1\}$ jest $(C,1)$-zbieżny do 0. Mamy bowiem

$$\frac{1}{n}(z^k + z^{k+1} + \ldots + z^{k+n-1}) = z^k \cdot \frac{1-z^n}{n(1-z)} \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Na podstawie tej obserwacji, korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych stwierdzamy, że dla $\varphi \neq 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, ciągi $\{\sin(n\varphi)\}$, $\{\cos(n\varphi)\}$ są $(C,1)$-zbieżne do 0.

Widzimy więc, że poza standardowym spojrzeniem na zbieżność ciągów możliwe jest określenie innych reguł, które w pewnych sytuacjach mogą być wygodniejsze. Opisana zbieżność sensie Cesàro jest np. mniej „wrażliwa" na sporadycznie pojawiające się, niewielkie zaburzenie ciągu, niż metoda tradycyjna. Dzięki temu większa ilość ciągów jest zbieżna w sensie Cesàro.

4. Słaba zbieżność

W analizie funkcjonalnej funkcje określone na przestrzeniach unormowanych, których wartości są rzeczywiste lub zespolone nazywamy *funkcjonałami*.

Niech $(E, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha i $f : E \to \mathbb{R}$ *funkcjonałem* liniowym. Zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych określonych na przestrzeni E tworzy przestrzeń liniową. Nazywamy ją *przestrzenią sprzężoną* do przestrzeni E i oznaczamy przez E^*.

Jeżeli w nowej przestrzeni E^* wprowadzimy normę wzorem

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in E,\ \|x\| \leq 1\}, \quad f \in E^*,$$

to E^* staje się przestrzenią Banacha.

Dla wielu przestrzeni Banacha można wskazać ogólną postać funkcjonałów liniowych i ciągłych, a dzięki temu wyznaczyć przestrzenie sprzężone (patrz [15]).

Przykład 3. Dla przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, każdy funkcjonał liniowy i ciągły $f \in H$ ma postać $f(x) = \langle x, a \rangle$, gdzie $a \in H$ jest elementem jednoznacznie wyznaczonym przez funkcjonał f. Pozwala to na utożsamianie H^* z H.

Przykład 4. Dla $1 < p < +\infty$, w przestrzeni ℓ^p, ogólna postać funkcjonału liniowego ciągłego jest następująca

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p,$$

gdzie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell^q$, przy czym $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Pozwala to identyfikować przestrzenie ℓ^p i ℓ^q.

Znajomość przestrzeni sprzężonej E^* pozwala niekiedy otrzymywać informacje o samej przestrzeni E. Korzystając z elementów przestrzeni sprzężonej E^*, możemy w przestrzeni E, obok zwykłej zbieżności (zwanej też zbieżnością mocną) ciągu $\{x_n\} \subset E$ ($x \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$), wprowadzić inny rodzaj zbieżności – zbieżność słabą:

Definicja 2. Mówimy, że ciąg $\{x_n\} \subset E$ jest *słabo zbieżny* do elementu $x \in E$ (zapisujemy to: $x_n \xrightarrow{\text{sł}} x$), jeśli

$$\forall_{f \in E^*} f(x_n) \to f(x).$$

Oto przykłady ciągów słabo zbieżnych.

Przykład 5. W rzeczywistej przestrzeni ℓ^2 z normą $\|x = (x_1, x_2, \dots)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$ rozważmy ciąg $\{e_n\}$, gdzie $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [na n-tym miejscu jedynka, a poza tym same zera]. Ciąg ten nie jest zbieżny w topologii wyznaczonej przez normę, bo nie jest ciągiem Cauchy'ego. Jest on jednak słabo zbieżny do 0. Ponieważ każdy funkcjonał liniowy i ciągły, określony na przestrzeni ℓ^2, jest postaci $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell^2$, więc $f(e_n) = \alpha_n \to 0$, bo szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ jest zbieżny. Zatem $f(e_n) \to 0 = f(0)$ dla dowolnego $f \in (\ell^2)^*$, co oznacza, że $e_n \xrightarrow{\text{sł}} 0$. Jednocześnie ciąg $\{e_n\}$ nie jest mocno zbieżny do 0.

Przykład 6. Rozważmy w zwartym przedziale $D \subset \mathbb{R}$ ciąg funkcji $\{\sin(nt)\}$. Na mocy klasycznego twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a dla każdej funkcji $x(t)$, całkowalnej w Δ, zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Delta} x(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Innymi słowy, dla każdego funkcjonału liniowego ciągłego f w przestrzeni $L^p(\Delta)$, $1 < p < +\infty$, mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(\sin(nt)) = 0 = f(0),$$

tzn. ciąg $\{\sin(nt)\}$ jest słabo zbieżny w przestrzeni $L^p(\Delta)$ do zera.

Ciągi słabo zbieżne mają wiele charakterystycznych własności:

Własności ([15]).
(1) Każdy ciąg mocno zbieżny jest także słabo zbieżny (przeciwna implikacja jest fałszywa).
(2) Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x, to nie może być słabo zbieżny do innej granicy.
(3) Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x, to każdy jego podciąg też jest słabo zbieżny do x.
(4) Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x, to normy $\|x\|$ są wspólnie ograniczone.
(5) Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x, to

$$\|x\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

(6) W przestrzeni skończenie wymiarowej słaba zbieżność jest równoważna mocnej zbieżności (oznacza to, że słaba zbieżność nabiera sensu dopiero w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych).
(7) (Schur) Słaba i mocna zbieżność przestrzeni ℓ^1 są równoważne (choć ℓ^1 nie jest skończenie wymiarowa).
(8) (Mazur) Jeżeli $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x, to istnieje ciąg wypukłych kombinacji liniowych $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} \cdot x_k$ ($\alpha_{nk} \geq 0$ oraz $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} = 1$, $k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots$) mocno zbieżny do x.
(9) (Mazur) Jeżeli A jest niepustym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej, $\{x_n\} \subset A$ i $x_n \xrightarrow{\text{sł}} x$, to $x \in A$ (słabe domknięcie zbioru A jest równe metrycznemu domknięciu).

5. Dygresja o zwartości

W praktyce nie wymagamy, aby każdy ciąg był zbieżny, lecz często oczekujemy spełnienia znacznie skromniejszego warunku:

(I) by ciąg $\{x_n\} \subset A$ zawierał podciąg $\{x_{n_m}\}$ zbieżny mocno (słabo) w zbiorze A;

lub warunku jeszcze słabszego (a przez to działającego w większym zakresie):

(II) by ciąg $\{x_n\} \subset A$ zawierał podciąg $\{x_{n_m}\}$ zbieżny mocno (słabo) w sensie Cesàro do elementu zbioru A.

Jeżeli dla danego zbioru i dowolnego ciągu elementów tego zbioru spełniony jest warunek (I) z mocną zbieżnością, to mamy do czynienia z warunkiem – *ciągowej zwartości* zbioru A. Konkurencyjną do niej jest definicja pokryciowa. Niestety, obie te własności nie są tożsame i na ogół żadna z nich nie implikuje drugiej [9, 20]. Twierdzenie Tichonowa z 1930 roku (*produkt dowolnej rodziny zwartych przestrzeni topologicznych jest przestrzenią zwartą*) przesądza o przewadze koncepcji pokryciowej, gdyż zwartość ciągowa nie przenosi się na nieskończone produkty kartezjańskie. Jednak w wielu sytuacjach chcemy, aby zwartość i zwartość ciągowa były tym samym. Dzieje się tak, gdy potrzebujemy zbieżnych podciągów, bądź gdy o ciągach wiemy więcej, niż o otwartych pokryciach. Na szczęście w przestrzeniach metrycznych pojęcia te są równoważne.

Każdy, kto głębiej poznał matematykę, wie jak cudowną własnością jest zwartość. To dzięki niej wszystko robi się szybciej, łatwiej i pełniej. Dla przestrzeni zwartych możliwe jest wnioskowanie o własnościach globalnych na podstawie własności lokalnych. Ponadto dla wielu problemów przypadek zwarty jest dobrym punktem wyjścia do rozważania przypadku niezwartego. W związku z tym istotny jest problem wskazania prostej i łatwej do sprawdzania charakteryzacji zbiorów zwartych. W przestrzeniach skończenie wymiarowych taką charakteryzację mamy (Heine, Borel): zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. Niestety, w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych dotychczasowe osiągnięcia dalekie są od naszych oczekiwań. Dodatkowo:
- założenie zwartości rzadko występuje jako naturalne środowisko rozwiązywanych problemów;
- klasa zbiorów zwartych nie jest wystarczająco bogata;
- w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych zbiory zwarte są brzegowe (mają puste wnętrze).

Zmusza nas to do studiowania innych warunków. Z pomocą przychodzi nam topologia, która choć sama nie jest w stanie rozwiązywać specyficznych dla analizy problemów, to stwarza klimat, w którym analiza rozkwita – zamiast o zbiorach zwartych możemy mówić o zbiorach słabo zwartych!

Ponieważ z każdą przestrzenią Banacha E w naturalny sposób związana jest przestrzeń sprzężona E^*, więc z przestrzenią E związane są dwie topologie:
- topologia wyznaczona przez normę (i tę zazwyczaj mamy na uwadze);
- topologia słaba, której podbazę stanowi rodzina

$$\{f^{-1}(U) : f \in E^* \text{ i } U \subset R \text{ jest otwarty}\}.$$

Oznacza to, że w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych zamiast zbiorów zwartych możemy z powodzeniem rozpatrywać znacznie bogatszą klasę zbiorów *słabo zwartych*. Należą do niej zbiory, które są zwarte w słabej topologii.

Dla przestrzeni Banacha E mamy użyteczną charakteryzację (Eberleina–Šmuliana) słabo zwartych podzbiorów:
- podzbiór $A \subset E$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset A$ istnieje podciąg słabo zbieżny do elementu zbioru A;
- w przestrzeniach refleksywnych zbiory niepuste, domknięte, wypukłe i ograniczone są słabo zwarte.

Charakteryzacja ta znajduje szerokie zastosowanie m.in. w analizie funkcjonalnej, w teorii optymalizacji.

6. Przestrzenie z własnością Banacha–Saksa

Często jest tak, że dokładne rozwiązanie danego równania, punkt x, należy do słabego domknięcia ciągu przybliżonych rozwiązań $\{x_n\}$. Mamy wówczas gwarancję istnienia słabo zbieżnego podciągu $x_{n_m} \xrightarrow{\text{sł}} x$. Niestety słaba zbieżność nie jest użyteczna przy tworzeniu zbieżnych algorytmów obliczeniowych. Gdyby to wszystko było zanurzone w przestrzeni, w której dla dowolnego ciągu spełniony byłby warunek (II) z mocną zbieżnością, to sytuacja wyglądałaby znacznie lepiej – wtedy punkt x można byłoby aproksymować za pomocą ciągu $\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\right\}$.

Pierwszy rezultat w tym kierunku podali Banach i Saks [4] w 1930 roku (patrz [8]):

Twierdzenie 1. *W przestrzeniach $L^p(0,1)$, $1 < p < +\infty$, z każdego ciągu ograniczonego $\{f_n\}$ można wybrać podciąg $\{f_{n_m}\}$ zbieżny w sensie Cesàro, tzn. dla pewnego $f \in L(0,1)$*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_{n_k} - f \right\| = 0.$$

Od tego czasu przyjęto następującą definicję:

Definicja 3. Mówimy, że przestrzeń Banacha $(E, \|\cdot\|)$ ma *własność Banacha–Saksa* (B-S), gdy z każdego ciągu ograniczonego $\{x_n\} \subset E$ można wybrać podciąg zbieżny mocno w sensie Cesàro.

Przestrzenie Banacha z własnością (B-S) [lub z różnymi modyfikacjami tego warunku, na przykład z tzw. słabą własnością (B-S)] są nadal przedmiotem badań (patrz [1], [7], [8]).

W geometrii przestrzeni Banacha ważną rolę odgrywają, wyróżnione przez Clarksona w 1936 roku, jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha, patrz [10]. Są to takie przestrzenie $(E, \|\cdot\|)$, w których dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} > 0.$$

Jak widać jednostajna wypukłość przestrzeni ma charakter skończenie wymiarowy – przestrzenie te są charakteryzowane przez dwuwymiarowe podprzestrzenie. Mówiąc obrazowo, są to takie przestrzenie, w których brzegi kul nie zawierają spłaszczeń, odcinków, dzióbków – kule są wystarczająco gładkie i okrągłe. Takimi są np. przestrzenie Hilberta, klasyczne przestrzenie ℓ^p, L^p, $1 < p < +\infty$.

Znaczenie przestrzeni z włanością (B-S) wzrosło, gdy pojawiły się następujące rezultaty:

(Rok 1938) *Każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha ma własność* (B-S) [11];

(Rok 1963) *Przestrzenie Banacha z własnością* (B-S) *są refleksywne* [14] (inne dowody podali J. Diestel (1975), D. van Dulst (1978));

(Rok 1972) *Istnieją refleksywne przestrzenie Banacha bez własności* (B-S), przykładem jest tzw. przestrzeń Baernsteina [3]. (Dla przestrzeni tej zachodzi interesujące zjawisko: ma ona złą strukturę geometryczną z klasycznego punktu widzenia – nie jest ściśle wypukła, ale jest niemal jednostajnie wypukła [18] i ma dobrą strukturę geometryczną, gdy patrzymy na nią przez pryzmat warunków zwartościowych [5].)

Od 1965 roku, kiedy to pojawiło się poniższe twierdzenie, nastąpił intensywny rozwój teorii punktów stałych (patrz [10]):

Twierdzenie 2. *Każde odwzorowanie $T : C \to C$ określone na niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorze jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha, które spełnia warunek nieoddalania*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \text{ dla } x, y \in C$$

ma punkt stały.

Wyrażamy to krócej, mówiąc: *jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha mają własność punktu stałego.*

Jeden z najistotniejszych problemów teorii punktów stałych jest następujący: *czy przestrzenie refleksywne mają własność punktu stałego?* Ze względu na dużą różnorodność przestrzeni, które spełniają warunek refleksywności, zagadnienie to wydaje sie bardzo trudne. Dotychczas uzyskano szereg rezultatów w węższych klasach przestrzeni, które sugerują odpowiedź twierdzącą. Jednak dla wielu klas przestrzeni refleksywnych problem jest nadal otwarty. Między innymi istnieje przypuszczenie, że prawdziwa jest (nierozstrzygnięta od wielu lat) następująca hipoteza:

Hipoteza. *Przestrzenie Banacha z własnością Banacha–Saksa mają własność punktu stałego.*

7. Przestrzenie z własnością Opiala

Dla wielu zagadnień nie tylko istotne jest wiedzieć, czy istnieje rozwiązanie, ale również to, jak je wyznaczyć. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w teorii punktów stałych. Wiele twierdzeń tej teorii ma charakter egzystencjalny – patrz Twierdzenie 2. Jednym z podstawowych problemów tej teorii jest wskazanie mocno lub słabo zbieżnych ciągów aproksymujących punkty stałe. Dla ciągu kolejnych przybliżeń,

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

założenie nieoddalania (jeśli pominąć kontrakcje) nie gwarantuje zbieżności, o czym możemy się przekonać rozważając odwzorowanie T będące obrotem koła jednostkowego na płaszczyźnie wokół początku układu współrzędnych. W tym przypadku dla zbieżności ciągu konieczne są dodatkowe założenia! Problem zbieżności (mocnej i słabej) ciągu kolejnych przybliżeń

$$x_{n+1} = Tx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

lub jego modyfikacji

$$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n + (1 - \alpha) \cdot Tx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \text{ dla dowolnego } \alpha \in (0, 1),$$

dyskutowali z powodzeniem m.in. Browder i Petryshyn [6] (patrz [17]).

W 1967 roku Opial [16], studiując problem słabej zbieżności powyższych ciągów, podał elegancki dowód następującego rezultatu:

Twierdzenie 3. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta, $T : C \to C$ odwzorowaniem nieoddalającym z niepustym zbiorem punktów stałych.*

(i) *Jeżeli T jest asymptotycznie regularne, tzn.*

$$\lim_{n \to \infty} \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0 \text{ dla każdego } x \in C,$$

to dla każdego $x \in C$ ciąg

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest słabo zbieżny do punktu stałego odwzorowania T.

(ii) *Dla każdego $\alpha \in (0, 1)$ i każdego $x \in C$ ciąg*

$$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n + (1 - \alpha) \cdot Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest słabo zbieżny do punktu stałego odwzorowania T.

W uzasadnieniu istotną rolę odgrywała odkryta w przestrzeniach Hilberta własność słabej granicy:

(*) dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subset E$ słabo zbieżnego do $x \in E$ i dowolnego $y \neq x$, $y \in E$, mamy

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Dowód. Granice występujące w warunku (*) są skończone i nierówność wynika ze wzoru

$$\|x_n - y\| = \|x_n - x + x - y\| =$$
$$= \|x_n - x\| + \|x - y\| + 2\mathrm{Re}\langle x_n - x, x - y\rangle,$$

gdzie ostatni składnik zmierza do 0, przy $n \to \infty$.

(Warunek (*) możemy też sformułować następująco:

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x + x_n\|$$

dla każdego $x \neq 0$ i każdego ciągu $\{x_n\} \subset E$ takiego, że $x_n \overset{\text{sł}}{\to} 0$.)

W tej samej pracy Opial wykazał, że warunek (*) jest niezależny od wielu dotychczas studiowanych własności – nie spełniają go przestrzenie L^p, $1 < p < +\infty$ i $p \neq 2$. W związku z tym przyjęto następującą definicję:

Definicja 4. Mówimy, że przestrzeń Banacha $(E, \|\cdot\|)$ ma własność Opiala, jeśli spełniony jest w niej warunek (*).

Obecnie wiemy, że wśród klasycznych przestrzeni Banacha przestrzenie ℓ^p, $1 \le p < +\infty$ (ℓ^1 nie jest refleksywna) mają własność Opiala.

Jednocześnie odkryto (Gossez, Lami Dozo), że refleksywne przestrzenie Banacha, które mają własność Opiala, posiadają dobrą strukturę geometryczną w postaci struktury normalnej (patrz [10]). Gwarantuje to, że *refleksywne przestrzenie Banacha z własnością Opiala mają własność punktu stałego.* W ostatnich latach rozpoczęto badanie nieskończenie wymiarowych odpowiedników klasycznych pojęć geometrycznych, np. niemal jednostajnej wypukłości, patrz [10].
W związku z tym, w 1992 roku Prus [19] zaproponował rozważanie silniejszego warunku od własności Opiala, tzw. jednostajnej własności Opiala, który to warunek spełniają m.in. przestrzenie Hilberta, przestrzenie ℓ^p $(1 < p < +\infty)$.

Mówimy, że przestrzeń Banacha ma jednostajną własność Opiala, jeśli dla każdego $c > 0$ istnieje takie $r > 0$, że

$$1 + r \le \varliminf_{n\to\infty} \|x + x_n\|$$

dla każdego $x \in E$ z $\|x\| \ge c$ i każdego ciągu $\{x_n\} \subset E$, $x_n \overset{\text{sł}}{\to} 0$, dla którego $\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \ge 1$.

Możemy to również wyrazić w terminach funkcji r_E, zwanej modułem Opiala [13]: przestrzeń Banacha ma jednostajną własność Opiala, jeśli $r_E(c) > 0$ dla każdego $c > 0$, gdzie

$$r_E(c) = \inf\{\varliminf_{n\to\infty} \|x + x_n\| - 1\}$$

i infimum jest brane po wszystkich x i $\{x_n\}$ określonych wyżej.

Dzięki tym pojęciom i wypracowanym metodom lepiej poznajemy strukturę badanych przestrzeni. Ponadto uzyskane wyniki z powodzeniem są stosowane do badania punktów stałych, patrz [2], [13], [19], [21].

Literatura

[1] A. G. Aksoy, M. A. Khamsi, *Nonstandard methods in fixed point theory*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Compactness conditions in metric fixed point theory*, Univ. of Sevilla, 1995.

[3] A. Baernstein II, *On reflexivity and summability*, Studia Math. 42 (1972), 91–94.

[4] S. Banach, S. Saks, *Sur la convergence forte dans les champs L*, Studia Math. 2 (1930), 51–57.

[5] J. Banaś, L. Olszowy, K. Sadarangani, *Moduli of near convexity of the Baernstein space*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3693–3699.

[6] F. E. Browder, W. V. Petryshyn, *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 571–575.

[7] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Rozprawy Mat. 356 (1996).

[8] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York 1984.

[9] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1989.

[10] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Univ. Press, London 1990.

[11] S. Kakutani, *Weak convergence in uniformly convex Banach spaces*, Tohoku Math. J. 45 (1938), 188–193.

[12] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1973.

[13] P. K. Lin, K. K. Tan, H. K. Xu, *Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. 24 (1995), 929–946.

[14] T. Nishiura, D. *Waterman, Reflexivity and summability*, Studia Math. 23 (1963), 53–57.

[15] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1989.

[16] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591–597.

[17] Z. Opial, *Nonexpansive and monotone mappings in Banach spaces*, Center for Dynamical Systems Brown University, 1967.

[18] J. R. Partington, *On nearly uniformly convex Banach spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 93 (1983), 127–129.

[19] S. Prus, *Banach spaces with the uniform Opial property*, Nonlinear Anal. 18 (1992), 697–704.

[20] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in topology*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[21] H. K. Xu, *Geometricall coefficients of Banach spaces and nonlinear mappings*, in: Recent Advances on Metric Fixed Point Theory (T. Domínguez Benavides, Edit.), Sevilla (1996), 161–178.