Literatura, literatura. To nie jest tylko zasługa pióra...

(Tadeusz Żeleński „Boy")

Fikcja, abstrakcja i wielość rzeczywistości w matematyce i literaturze

Michał SZUREK, Warszawa

1. Matematyka – Królową Nauk!
2. Obrazy matematyczne dla polonistów
3. Przykład symboliki i fantazji intelektualnej – pentagram
4. Fikcja jako model
5. Kot jako fikcja
6. Fikcja jako abstrakcja i porządkowanie
7. Sens i nonsens
8. Problem narratora
9. Ścisłość
10. Wielość rzeczywistości
11. Nowe (?) spojrzenie na teorię powieści
12. Ostatni zajazd na Litwie

1. Matematyka – Królową Nauk!

Jeden ze znanych fizyków niemieckich pierwszej połowy XX wieku pisywał wiersze. Koledzy nie mogli tego zrozumieć. *Co ty robisz?*, mówili, *przecież celem fizyki jest rozjaśniać obraz świata, a poezji – zaciemniać.* Sądzę, że wielu Czytelników tego artykułu może skłaniać się do odwrotnego poglądu. Celem tego eseju – będącego tylko zbiorem impresji autora – jest przedstawienie i wyeksponowanie pewnych humanistycznych aspektów matematyki. Matematycy lubią odnajdować te aspekty w swojej nauce.

Artykuł ten został napisany zarówno przez, jak i z pozycji matematyka, ale *dla* humanisty. Zacząłem od dygresji o fizyce. Ta nauka wybrała matematykę jako swoje narzędzie badania świata i choć dzisiejsza fizyka teoretyczna jest już praktycznie matematyką, to ideologicznie te dwie nauki są daleko. Fizycy zawsze mogą powiedzieć, że badają **świat realny**, o ten, który jest za oknem, *a co wy badacie, koledzy matematycy? Na dobrą sprawę wytwory własnej wyobraźni!*

I tak to właśnie jest! Linie proste, koła, parabole, równania nie istnieją w przyrodzie. Są to tylko pojęcia, wymyślone przez ludzi. To bardzo ważne. To bowiem znaczy, że matematyka jest – tak naprawdę jedyną – **ścisłą nauką humanistyczną**. I tak jak światło ma dwoistą naturę korpuskularno-falową (czasem jest falą, czasem strumieniem cząstek), tak i matematyka ukazuje nam co chwila swą inną twarz: czasami jest sztuką, czasami tylko narzędziem do rachowania, a dość często po prostu **literaturą**. Nie, to nie pomyłka. Literaturą. I z tej właśnie strony będziemy się przyglądać Królowej Nauk, o ile ona pozwoli, boć to przecież Królowa. Nie zapominajmy też o należnym jej respekcie. Proszę pamiętać, by zwracać się do Niej *Wasza Wysokość*, nie zabierać głosu bez pytania i nigdy nie odwracać się tyłem.

Matematyk czuje się przeto nieswojo, gdy w czasie wykładu jest ustawiony przodem do słuchaczy. Przodem do słuchaczy równa się bowiem tyłem do tablicy, na której dzieje się wykład, na której przedstawiana jest rzeczywistość matematyczna. *Spójrzcie Państwo na tę formułę. Pięknie opisuje ona geometrię naszej przestrzeni funkcyjnej, weźmy teraz ciąg funkcji jednostajnie zbieżny do funkcji granicznej, o taki:* ... – i kreda wykładowcy opisuje świat istniejący gdzieś tam, na zewnątrz owej pieczary, w której siedzimy. Z gry świateł na ścianie jaskini staramy się poznać prawdziwy świat. To znany każdemu idealizm obiektywny Platona: Tam świat idei, a Tu jego odbicie w naszej rzeczywistości zmysłowej.

Zastanówmy się więc, co to za obszar działalności intelektualnej człowieka, gdzie konstruuje się i opisuje świat oparty wprawdzie bezpośrednio na obserwacji

Jest to zapis wykładu, który Autor prowadził dla polonistów z Uniwersytetu Warszawskiego.

Red.

tego, co dzieje się za oknem, ale jednak przetworzony i de facto istniejący tylko w jego, autora, myśli. Czy to matematyka, czy twórczość literacka?

Odpowiedź jest oczywista. **Jedno i drugie**!

Czy to porównanie jest tylko efektowne, czy ta analogia jest płytka? Zobaczymy.

2. Obrazy matematyczne dla polonistów

> – Nie! – zawołał – dziś pani algebry uprawiać nie wolno, panno Immo, czy w przestworzach igrać, jak to pani nazywa. Niechże pani spojrzy w słońce! ... Czy można...?
>
> I podszedł do stolika, biorąc do ręki zeszyt.
>
> To, co ujrzał, było oszałamiające. Strzępiasto, dziecięco grubym pismem, które zdradzało jej osobliwy sposób trzymania pióra, fantastyczny hokus-pokus, wiedźmowy sabat splątanych run pokrywał stronice. Greckie litery splatały się z łacińskimi, z cyframi różnej wielkości, z rodzajem kresek i krzyżyków, pod i ponad poziomymi liniami w ułamkowym uszeregowaniu, z daszkami innych linii na kształt namiotów, w parzystych kreseczkach znajdując zrównanie wartości, w okrągłych klamrach łącząc się w wielkie masy formułek. Pojedyncze litery, wysunięte jak szyldwachy, ustawione na prawo, ponad oklamrzonymi grupami. Znaki kabalistyczne, najzupełniej niezrozumiałe dla umysłu laika, obejmowały niby ramionami liczby i głoski, a ułamki cyfr stały przed nimi, cyfry zaś i litery krążyły u ich stóp i nad ich głowami. Osobliwe sylaby. Skróty tajemniczych wyrazów rozsypane były wszędy, a między nekromantycznymi kolumnami stały zdania i uwagi wypisane potocznym językiem, których sens jednak tak był odległy od wszelkich spraw ludzkich, że można je było czytać, nie rozumiejąc z nich więcej niż w pomruku guślarza.

Tak Tomasz Mann („Królewska Wysokość", przekład Wiktora Hulewicza) widzi matematykę i tak na ogół widzą ją humaniści. Obraz Tomasza Manna jest zresztą wyjątkowo udany: matematyka jest teraz bardzo zalgebraizowana, a *wiedźmowy sabat splątanych run* nie służy czarom, tylko jest subiektywnym sposobem opisania świata – prawda, że czasami odległego od *wszelkich spraw ludzkich*, ale częściej po prostu bardzo im bliskiego. Tajemniczo wyglądający napis $y = \cosh x$ (*cosinus hiperboliczny iks*) jest opisem kształtu, jaki ma umocowana w dwóch punktach swobodnie zwisająca lina, np. kolejki na Kasprowy Wierch. Zbiór wszystkich linii prostych w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej da się w naturalny sposób uporządkować tak, że wypełnia podobną do sfery przestrzeń, tyle, że wymiaru 4 i opisaną równaniem kwadratowym w przestrzeni pięciowymiarowej. Czy można czytać te zdania, *rozumiejąc z nich więcej niż w pomruku guślarza*?

A oto krótki fragment autobiograficznej powieści Igora Newerly'ego „Zostało z uczty bogów". Zwróćmy uwagę, że w obu cytowanych fragmentach autorzy powieści wykorzystują podobny pomysł: mężczyzna dziwi się, że młoda dziewczyna zajmuje się matematyką. Nie znaleźlibyśmy nic niezwykłego w obrazie odwrotnym: dziewczyna zaglądająca chłopakowi do jego notatek matematycznych.

> – Matematyka? – spytałem. – Ty lubisz matematykę?!
>
> – Ogromnie. W szkole pomagałam koleżankom nawet ze starszych klas, a teraz tak sobie czytam dla przyjemności, rozwiązuję. To piękne.
>
> – Co, mianowicie?
>
> – A chociażby binom Newtona.
>
> – Ależ to koniec algebry, zadanie maturalne! Na tym piekielnym binomie, słyszałem, najczęściej obcinają, ja jeszcze do tego nie doszedłem, a ty tak sama? Byłaś w gimnazjum? W której klasie?

– W piątej, trzy lata temu...

Podczas kolacji i potem, gdy robiła sobie posłanie na podłodze pod oknem, zdołałem powypytywać i wydobyć sporo innych szczegółów z jej życia, nie podważały jednak w niczym zdumienia – Nadia i binom! – nie pomniejszały kontrastu – hoża, czarnobrewa, z wiejska wyglądająca dziewczyna i ta jej matematyka, ze wszystkich nauk najbardziej dla mnie antypatyczna, kojarząca się zawsze z Antypodą. Czytuje stroniczki algebry dla przyjemności, coś podobnego! A powieści, spytałem, a poezje? Owszem, odrzekła, ale to przecież same słowa. – Ty wolisz znaki? – Naturalnie, tu się czuje rzeczy prawdziwe i wieczne...

W powieści Iris Murdoch matematyka nazwana jest *zimnymi Himalajami intelektu*. Ciekawe, że wielu ludzi uważa, że ignorancja w dziedzinie matematyki i w ogóle nauk ścisłych jest czymś nobilitującym. Na nieznajomość matematyki ludzie snobowali się od dawna, a celował w tym np. Julian Tuwim. Goethe powiedział: *Matematycy są jak Francuzi – cokolwiek im się powie, przekładają to na swój własny język i potem już się tego nie da zrozumieć.* Matematycy chętnie odgryzają się tutaj historią doktoranta bardzo wybitnego matematyka niemieckiego, Davida Hilberta. Otóż po roku czy dwóch doktorant ten zrezygnował ze studiów i został poetą. *Cóż, szkoda* – skomentował to Hilbert – *no, ale i tak miał za mało wyobraźni, żeby być matematykiem.*

W dyskusji o matematyce przeznaczonej dla polonistów nie można pominąć analizy obrazu matematyki w twórczości Stanisława Lema. Analiza taka mogłaby być tematem na poważną pracę naukową i wobec tego zrobię tutaj tylko kilka drobnych, ale charakterystycznych uwag. Nie wiem, czy świadomie Lem robił drobne i grubsze pomyłki. Na przykład kiedy Pirx wyjaśnia Langnerowi (*swojemu towarzyszowi od smażenia omletów*), że ma sto jedenaście lat i na pytanie *jak to?* wyjaśnia: *w układzie dwójkowym.* Pozostawiam Czytelnikom jako ćwiczenie, ile równa się 111 w układzie numeracji o podstawie 2 i że owe 111 nie jest pomyłką korektorską, bo z tekstu wynika jasno, że liczbą lat tego sympatycznego kadeta nie mogło być ani 1111, ani 11111, ani oczywiście 111111 lat. Mnie, właśnie jako matematykowi, ta niefrasobliwość autora wcale nie przeszkadza. Podstawiam sobie w myśli jakąś inną liczbę w układzie o podstawie 2 i jest dobrze.

Lem przyrównuje (niekiedy implicite, niekiedy pisze o tym wprost) matematyka do szalonego krawca, który szyje dziwaczne ubrania: np. spodnie z nieskończoną liczbą nogawek, albo marynarkę z rękawami zapętlonymi we wstęgi Möbiusa. Ubrania są w magazynie, do którego zaglądają fizycy i czasami sobie coś z niego wybierają, ale większość pokrywa się kurzem i staje się w końcu łupem moli. Dyskusja z tym – bardzo powierzchownym – poglądem wykracza poza ramy tego eseju. Wspomnę za to obraz matematyki, jaki wyłania się z powieści „Powrót z gwiazd". Hal Bregg wraca po 127 latach na Ziemię – dzięki efektowi relatywistycznemu on sam postarzał się tylko o sześć lat. Nie może się odnaleźć w świecie, który zastał. Zmieniło się wszystko. Nie zarosły tylko ścieżki, jakie znał w górach ... i teorie matematyczne.

Zjadliwa fraszka Jana z Czarnolasu „Na matematyka" wyraża opinię o wszystkich przedstawicielach nauk dedukcyjnych, tak bowiem do początków XIX wieku rozumiano termin *matematyka.* Z literatury mniejszego kalibru wymienię tylko „Szatana z VII klasy". Kornel Makuszyński sportretował tam matematyka (Iwo Gąsowski), który zaniedbuje rodzinę i dom, bo pracuje bez ustanku nad równaniem Fermata:

$$x^n + y^n = z^n,$$

gdzie x, y, z mają być liczbami naturalnymi, a wykładnik n jest większy niż 2. Otóż prawnik z Tuluzy, Pierre de Fermat (1601–1665) z amatorstwa zajmował się i matematyką. Odkrył zresztą kilka ważnych twierdzeń. Miał zwyczaj wypisywania swoich uwag na marginesach czytanych przez siebie książek. Na jednym z nich napisał:

Jest niemożliwe rozłożyć sześcian na dwa sześciany, czwartą potęgę na dwie czwarte potęgi i ogólnie potęgę wyższą niż druga na dwie takie potęgi; znalazłem naprawdę zadziwiający dowód tego, jednak margines jest za mały, żeby go pomieścić.

(innymi słowy, napisane wyżej równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych). I tyle. W papierach pozostałych po śmierci Fermata dowodu nie znaleziono i w następstwie tego wielcy i mali matematycy biedzili się nad zadaniem przez następne 330 lat. Mijały generacje uczonych, próby rozwiązania zadania Fermata doprowadziły do rozwoju kilku gałęzi matematyki, a dowodu jak nie było, tak nie było. W końcu zadanie się jakby się znudziło. Matematycy zaczęli podkreślać, że wcale nie jest ono takie ważne. Ot tam, jedno równanie. Gdy więc w 1995 roku Andrew Wiles znalazł dowód, wiadomość o tym trafiła nawet na pierwsze strony gazet, ale w świecie matematycznym została przyjęta oczywiście z wielkim uznaniem, choć bez wybuchu entuzjazmu, jakiego można by oczekiwać, gdy kończy się pracę trwającą, bagatelka, 330 lat. Od kilkunastu zresztą lat mówiło się, że rozwiązanie jest już w zasięgu ręki – stworzono bowiem potężne metody, dzięki którym zadanie Fermata było tylko szczególnym przypadkiem znacznie bardziej ogólnego problemu, rozwiązanego właśnie przez Wilesa. Największe zasługi w rozwoju tych metod położyli tu dwaj matematycy: Niemiec Faltings i Rosjanin Arakiełow. Karierę tego drugiego zakłóciła, nazwijmy to eufemistycznie, wewnętrzna polityka ZSRR za czasów Breżniewa; Gerd Faltings przejdzie do historii matematyki jako jeden z tych, którzy nadawali jej (matematyce) kierunek.

A tak na marginesie, w historii Iwa Gąsowskiego Kornel Makuszyński przekazał, chyba niechcący, myśl, którą usłyszałem w 1994 roku jako radę ambasadora Wspólnoty Europejskiej dla młodzieży polskiej, wypowiedzianą na spotkaniu na obozie naukowym dla młodzieży wybitnie uzdolnionej: *W Europie liczyć się będą umiejętności. Cokolwiek będziecie robić, musicie być w tym dobrzy.*

Niby oczywiste, ale jakoś w latach 1945–1989 o tym ... zapominaliśmy.

Nie tylko sama matematyka, ale i sposób patrzenia na jej historię trochę zmienił się pod wpływem ... rozwoju techniki komputerowej i upowszechnienia PC-tów. To, co dawniej nazywano pre-matematyką Egipcjan i Babilończyków, niektórzy nazywają pre-informatyką, bo były to po prostu *algorytmy* na obliczanie tego czy owego. Tak jak przeplatają się prądy literackie i sposoby pojmowania roli literatury, tak i matematyka ma okresy większej i mniejszej niechęci do jednej ze stron swojej twarzy: techniki obliczeniowej.

Od pewnego czasu inaczej rozumiemy to dość tajemnicze przejście, ten potężny skok, jakiego dokonali starożytni Grecy, przechodząc od owej pre-informatyki do bardzo abstrakcyjnych teorii. A właściwie to przyznajemy, że nie do końca to rozumiemy, jak to się stało, że *ni z tego ni z owego* takie teorie powstały i przetrwały bez większego szwanku, bagatela, 2500 lat. Dalszy rozwój matematyki postępował dość prosto: potrzeby rachunkowe (równania wyższych stopni, trygonometria: *najpierw* sferyczna, *potem* płaska, logarytmy) powodowały formalizowanie teorii i jej alienację. Narzędzia wymyślone do badania równań (np. pojęcie grupy) same stały się przedmiotem niezależnych badań, a – analogia z rzemieślnikami jest tu dość dobra – udoskonalane narzędzia pozwalały nie tylko sprawniej dokręcać śrubki, ale i konstruować nowe, lepsze, mniej lub bardziej potrzebne przedmioty.

Każda chyba dziedzina twórczości przeżywa okresy zwątpienia, kiedy stare drogi zarosły, a nowych nie ma. W historii matematyki po raz pierwszy taki kryzys miał miejsce na początku piątego wieku przed naszą erą, kiedy pitagorejczycy odkryli liczby niewymierne, a dokładniej: odcinki niewspółmierne. Mało tego, odkryto je w jednej z najprostszych i najbardziej symetrycznych figur: w kwadracie. Przypomnę: przekątna kwadratu jest niewspółmierna z jego bokiem: liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Nawet dzisiaj, gdy podstawy matematyki są tak dobrze poznane, niewymierność jest trudnym pojęciem i być może Czytelnicy zwrócili uwagę, że w matematyce szkolnej obchodzi się je jakoś bokiem. Żeby bowiem porządnie *skonstruować* liczby niewymierne, musimy wykonać konstrukcję znaną pod nazwą *uzupełnianie przestrzeni metrycznej* – trudną do przedstawienia w szkole, nawet w okrojonej wersji.

Pitagorejczycy wierzyli, że wszystko jest *wymierne* – na przykład stworzyli całkiem udatną skalę muzyczną (skala diatoniczna), opartą na prostych założeniach i zależnościach między ułamkami. Odkrycie odcinków niewspółmiernych – dowiedzione matematycznie, a bardzo trudne do zaakceptowania przez Greków ze światopoglądowego punktu widzenia – było długo utrzymywane w tajemnicy przed ogółem adeptów Akademii Platońskiej, a ujawnione podzieliło w końcu Związek Pitagorejski na dwa ugrupowania. Pierwsze z nich – byli to tak zwani *akuzmatycy* (= słuchacze, uczniowie) – zachwyciło się odkrytą tajemnicą. Zalecali medytacje nad nią, a niemożliwość jej ogarnięcia wcale im nie przeszkadzała; wprost przeciwnie – była źródłem natchnienia, wiary i nadziei. Świadomie używam tu zwrotów kojarzących się jednoznacznie z chrześcijaństwem. Trudno jest odtworzyć sposób myślenia ludzi sprzed 2500 lat. Musimy bowiem z konieczności używać dzisiejszych pojęć.

Autor tego eseju nie jest akuzmatykiem z tej prostej przyczyny, że zwyciężyło w końcu drugie ugrupowanie. Jego zwolennicy nazwali siebie *matematykami* (mathein = uczyć się). Chcieli oni mimo wszystko zrozumieć problem niewspółmierności. Nie potrafili tego zrobić za pomocą liczb, więc zwrócili się ku proporcjom wyrażanym geometrycznie. Dokonali bardzo wielu odkryć, które i dzisiaj zachwycają matematyków swoją pięknością i ... dojrzałością. W każdym razie ośrodkiem zainteresowań mędrców stały się figury i w ten sposób powstało jedno z dziwnych zawirowań w historii myśli ludzkiej: brnięcie przez gąszcz geometrii aksjomatycznej, zamiast rozwijania arytmetyki i teorii liczb.

Choć każdy wie, co to jest matematyka, współczesne encyklopedie definiują ją dość ostrożnie:

> **matematyka** [łac. < gr., od máthema 'wiedza, nauka'] dawniej rozumiana jako nauka o liczbach i figurach geom., obecnie łamie ramy wszelkich definicji wytyczających przedmiot jej badań. Nie udało się dotąd znaleźć określenia, które charakteryzowałoby m. w pełni i zadowalało choćby samych tylko matematyków (...)
> (Wielka Encyklopedia Powszechna, PWN, 1966).

Przez 31 lat od chwili wydania tej encyklopedii niewiele się w tej materii zmieniło. Definicja matematyki w nowej, sześciotomowej encyklopedii PWN jest prawie taka sama. Ale wpływem komputerów matematyka powoli wraca do swych korzeni – obliczeń. A w tym eseju jest miejsce na fantazję. Może, gdyby zwyciężyli akuzmatycy, komputery pojawiły by się kilkaset lat wcześniej. Jagiełło pokonałby Krzyżaków dzięki temu, że zręczny *hacker*, Zbyszko z Uniwersytetu w Bogdańcu, *wlogował* się do centralnego komputera w Malborku. Pod Grunwaldem starłyby się dwa systemy komputerowe, a 15 lipca 1410 roku wieczorem na monitorze Ulricha von Jungingen wyświetliłby się napis *you lost your last life.*

W tej bardzo specyficznie ujętej opowieści o matematyce wymienię kolejne problemy z liczbami. Matematycy włoscy XVI wieku (Cardano, Tartaglia) odkryli, że potrafią rozwiązać dowolne równanie sześcienne, używając symbolu $\sqrt{-1}$. Jak wszystkim wiadomo ze szkoły, każda liczba podniesiona do kwadratu jest dodatnia (no, a $0^2 = 0$), zatem pierwiastka z minus jeden po prostu nie ma. Tym niemniej ... jeśli się nim posłużyć, to każde równanie trzeciego stopnia da się rozwiązać, a bez $\sqrt{-1}$ – nie. No i co tu zrobić? Znów odezwał się duch akuzmatyzmu: jeden z najwybitniejszych matematyków i filozofów, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), pisał, że liczby takie jak $\sqrt{-1}$ są *cudownym wzlotem Ducha Bożego, są one pomostem łączącym byt z niebytem.*

Owo *akuzmatyczne* podejście (*choć to jakaś mistyka, to przecież to działa!*) nie było takie złe i w dalszej historii matematyki zdarzyło się jeszcze kilka razy.

Ale matematycy (w starożytnym sensie słowa) pokazali, jak określić pierwiastek z minus jeden ściśle, bez niedomówień i bez naruszenia Drugiego Przykazania [wyjaśnienie dla nie-chrześcijan: Nie będziesz wzywał imienia Pana, Boga twego, do czczych rzeczy (Wj 20, 7; Pwt 5, 11)].

Dziś z całej mistyki została tylko nazwa: liczby urojone (ang.: imaginary numbers, ros.: mnimyje czisła). Dla matematyka (w obecnym sensie słowa) liczby urojone nie są inną fikcją niż liczby w ogóle, a $\sqrt{-1}$ jest tak samo dobry, jak pierwiastek z dwóch, a ... *o wiele lepszy* niż π, choć tę aluzję zrozumieją być może tylko specjaliści, a o wierszu Wisławy Szymborkiej „Liczba pi" piszę poniżej.

Nasz *end of the century* będzie z pewnością analizowany przez naszych potomnych, tak jak dziewiętnastowieczny *fin-de-siecle* przez nas. Do ogólnego nastroju zwątpienia tamtego końca wieku przyłączyła się wtedy i matematyka. Po raz kolejny – wydaje się, że tym razem na zawsze – utracono pewność, że matematyka mówi prawdę. Tak jest! Matematycy chętnie dziś przyznają, że nie wiedzą, o czym mówią, i czy to, co mówią, jest prawdą. Brzmi to niewiarygodnie i może niezrozumiale, ale chodzi *tylko* o to, że aksjomaty teorii matematycznych są oparte o *zdrowy rozsądek* i gust specjalistów, no a z jednym i drugim różnie bywa. Może pozornie dobrze ugruntowana teoria będzie działać tylko do czasu i okaże się w końcu wewnętrznie sprzeczna? Jeśli bowiem umiemy *udowodnić*, że teoria matematyczna jest niesprzeczna, to tylko przy założeniu, że niesprzeczna jest jakaś inna, bardziej fundamentalna. *Da capo.* Może z rozumowaniami matematycznymi jest tak, jak z budowaniem wieży: oczywiste jest, że do wierzchołka jak najwyższej baszty można jeszcze przecież dołożyć jedną cegłę i nic się nie stanie – a jednak kiedyś to się musi zawalić, choćby pod własnym ciężarem. Wszystko wskazuje, że tak nie jest, że matematyka jest rzeczywiście tożsama z pewnością. Nie mają co do tego wątpliwości fizycy, którzy otwarcie przyznają się do ślepej wiary w matematykę.

Na szczęście świadomość tej ewentualnej sprzeczności całej ich nauki nie bulwersuje matematyków zbytnio, ale gdyby dowiedziało się o tym Ministerstwo Finansów, może zabrałoby pieniądze na badania matematyczne. Proszę więc w imieniu kolegów-matematyków o utrzymanie faktu nierozwiązalności niesprzeczności matematyki w tajemnicy.

Te trudności z podstawami matematyki mają swoje bardzo dobre strony. Pozwalają nam – pisałem o tym powyżej – na uświadomienie sobie, że matematyka porusza problemy fikcyjnych figur, funkcji i przestrzeni. Należy tylko rozumieć, czym jest owa fikcja. Podkreślam, że dyskusja o niej jest właśnie jednym z celów tego artykułu, a tezę moją można streścić: fikcja literacka jest tym samym, co ... fikcja matematyczna.

3. Przykład symboliki i fantazji intelektualnej – pentagram

Zwycięstwo *matematyków* nad *akuzmatykami* wyraziło się między innymi w powstaniu nowego symbolu pitagorejczyków: był nim od tej pory pentagram – pięciokąt foremny w kształcie gwiazdy. Jej ramiona przecinają się w sposób nadzwyczaj proporcjonalny: *zawsze całość ma się tak do części większej, jak większa do mniejszej.* To nazwano *boską proporcją*, zlaicyzowaną następnie na *złotą*. Bardzo łatwo opisać ją równaniem i *młodsi Czytelnicy* z *maturą* powinni to umieć zrobić ... no, ale niech nie będzie za dużo równań. Będą potem. Nie robiąc zatem osobnego wykładu wspomnę, że liczby wyrażające ową proporcję: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ są często spotykane i dość ważne we współczesnej matematyce. Między innymi okazuje się, że właśnie je najtrudniej przybliżać przez liczby wymierne (czyli ułamki), że z ich rozwinięcia dziesiętnego możemy otrzymać bardzo dobre liczby losowe (lepsze, niż z innych liczb) i że spotyka je się nawet w dość abstrakcyjnych działach matematyki.

Do pentagramu (matematycznie zwanego pięciokątem gwiaździstym), przyznawała się religia żydowska (*klucz Salomona*), chrześcijaństwo (w dawnym chrześcijaństwie był to symbol Trójcy Świętej, a wszak i dzisiaj prezenty dostajemy *na Gwiazdkę*), alchemicy, magowie i wiedźmy, a ze współczesnych czasów: Związek Radziecki, Stany Zjednoczone, kilka krajów arabskich i tysiące agencji reklamowych – zestawienie może wydać się szokujące. Piękny wykład o znaczeniu pentagramu mamy w anonimowym XIV-wiecznym utworze angielskim „Sir Gawain and the green knight" (przekład polski: A. Szurek, 1997), a przypomnijmy sobie, że Faust chciał się zabezpieczyć przed diabłem przez narysowanie pentagramu na progu swojego domu. Zrobił to niestarannie (por. wyżej radę p. ambasadora!) i oto, co się stało (wg. przekładu Władysława Kościelskiego:)

F a u s t
Lecz przebóg, co się dzieje!
Czy prawda to, czy zjawa?
To nie jest ziemska sprawa!
Pies rośnie, olbrzymieje!
Wszerz, w górę prze na gwałt!
Już psa utracił kształt!
Cóż za poczwarę przywiodłem do domu?
Hipopotamem zda się już z ogromu,
Ogniste oczy i paszczęka wściekła.
Już cię nie wypuszczę z ócz!
Na taki to półpomiot piekła
Wystarczy Salomona klucz.
(...)
Moc pentagramu cię urzekła?
Ej! Powiedzże mi, synu piekła,
Jakżeś tu wszedł, jeśli cię to pętało?
Czyżby tak łatwo duch taki się zmylił?

M e f i s t o f e l e s
Patrz, znak nieściśle narysowany;
Ten kąt zewnętrzny się odchylił;
Jak widzisz, nieco jest otwarty.

F a u s t
Traf płata czasem niezłe żarty.
Na więźnia byłbyś mi oddany?
(...)

W średniowieczu próbowano bezskutecznie skonstruować magiczny pentagram: umieścić w wierzchołkach gwiazdy liczby od 1 do 10 tak, by sumy liczb wzdłuż każdego ramienia gwiazdy były takie same. Łatwo wykazać, że tą sumą musiałaby być wtedy liczba 22, a zadanie o niemożności skonstruowania takiej figury nie jest bardzo trudne – polecam Czytelnikowi na długi przejazd pociągiem. Tylko z trójkątów, kwadratów i pięciokątów foremnych można budować wielościany foremne, a więcej o pentagramie nie napiszę, bo i tak poniżej będzie sporo matematyki.

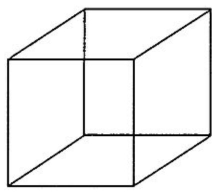
4. Fikcja jako model

Podyskutujmy więc o fikcji w matematyce i literaturze. Jaką rolę ona pełni? Musimy na wstępie nieco uściślić to pojęcie, a w każdym razie podkreślić, że nie mówimy o fikcji rozumianej jako prosta nieprawda: „$2 + 2 = 5$", „na biegunie północnym żyją tygrysy" i tak dalej. To najprostsze, płaskie rozumienie naszego pojęcia.

Teoria literatury mówi o fikcji bardzo wiele. Po pierwsze jest ona określana jako *fabuła* lub *konstrukcja myślowa bez związku z konkretną rzeczywistością, lub dowolna konstrukcja pozbawiona sensu i treści.* Jest wiele powieści, które mogą dziać się wszędzie lub prawie wszędzie, na przykład „Kubuś Puchatek", „Przygody Muminków", czy w bardzo nieokreślonej przestrzeni (Tolkien!!!) Wydawać by się mogło, że komu jak komu, ale matematykowi nic, co jest pozbawione treści i sensu nie może się podobać. *Ty, bracie, masz kiepsko,* odezwał się mój partner od koszykówki z drużyny uniwersyteckiej 1963–65, gdy dowiedział się, że jestem studentem matematyki, *bo jak czegoś nie wiesz na egzaminie, to nie możesz nawet truć, że Pitagoras to był w gruncie rzeczy taki fajny gość, ale miał miał kłopoty z żoną i przez to wymyślił te swoje, jak to tam idzie, a kwadrat plus be kwadrat.*

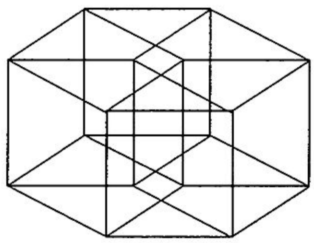
O sensie i nonsensie piszę niżej (pkt 7). Pojmowanie zaś fikcji *jako modelu, ogólnego prawa lub idealizacji* jest już czystą ... matematyką. W przyrodzie nie istnieją ani linie proste, ani okręgi, ani równania. To wszystko wymyślili matematycy, którzy – jak pisałem – chętnie postrzegają świat na sposób platoński. Siedzimy w ciemnej jaskini tyłem do wejścia i patrzymy na grę świateł i cieni na ścianie. Na zewnątrz jest słoneczny dzień. Ale my możemy oglądać tylko odblaski na omszałej ścianie pieczary. Świat na zewnątrz – to *idee*, świat, który oglądamy niedoskonałymi zmysłami – to tylko ich odbicie.

Matematycy wierzą, że ich równania opisują ten zewnętrzny świat idei najlepiej, jak tylko ... ludzie potrafią. Jako przykład pokażę, jak bardzo łatwo opisać i badać pewną „bryłę” czterowymiarową. Zacznijmy od prostej obserwacji. Choć na rysunku poniżej każdy „zobaczy” sześcian, jest to tylko oczywiście *rysunek* tego *sześcianu*, a nie on sam. Sześcian powstaje tak, że płaski kwadrat – stający się potem podstawą bryły – przesuwamy w trzecim wymiarze ... no i właśnie powstaje coś trójwymiarowego. Rysując sześcian, musimy umownie przyjąć, że „trzeci wymiar” jest reprezentowany przez ukośny kierunek, „z południowego zachodu na północny wschód”.



Możemy teraz narysować bryłę czterowymiarową. Przesuwamy nasz sześcian w czwartym kierunku. Ponieważ i tak mamy na tej kartce do dyspozycji tylko dwa wymiary, więc rysunek wyda się trochę zagmatwany, ale przecież tracimy aż dwa wymiary.

Gdzie jest ten czwarty wymiar? Może w ogóle go nie ma? To nie jest pytanie dla mnie, matematyka. Gdziekolwiek by był, ja go przedstawię na płaszczyźnie jako ukośny kierunek z płd.-wsch. na płn.-zach. I oto mój czterowymiarowy obiekt, *wróć*, **jego płaski rysunek**:



Ten rysunek i kilka nieskomplikowanych równań wystarczy do badania naszej czterowymiarowej bryły. Jest ono dość proste. Któregoś roku na obozie naukowym dla stypendystów Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci powstały programy na grę w kółko i krzyżyk w przestrzeni czterowymiarowej. Pisane przez różnych uczestników programy były różne i na ogół bardzo dobre. Mogły zresztą grać ze sobą, człowiek tylko naciskał klawisze tak, jak one mu kazały. Nie tylko człowiek, ale i komputer może pojąć czwarty wymiar. Można oczywiście polemizować z tym, czy ludzie *naprawdę rozumieją* ten czwarty wymiar (o komputerach nie dyskutujmy!). Jeżeli przez jego *rozumienie* uznamy *jako tako sprawne poruszanie się po nim*, to oczywiste jest, że matematycy doskonale rozumieją przestrzenie wielowymiarowe. Co więcej, elementarna teoria tych przestrzeni da się wytłumaczyć każdemu, kto nie mdleje od razu na widok równania pierwszego stopnia.

Dodam, że napisany przez stypendystę X.Y. program na grę w kółko i krzyżyk w przestrzeni *pięcio*wymiarowej działał jeszcze dość kiepsko, ale warsztaty matematyczne były tylko jednymi z wielu dla tej wybitnej młodzieży. I tu jest miejsce na pewną dygresję, wykraczającą poza ramy artykułu. Wśród wielu innych zadań Krajowy Fundusz na Rzecz Dzieci stawia sobie za cel wyszukiwanie młodzieży wybitnie uzdolnionej i umożliwienie im stania się elitą intelektualną kraju. Za PRL-u nie można było się do tego głośno przyznawać, bo deklarowaną równość rozumiano nie tak, że wszyscy mają równe szanse na starcie, tylko że wszyscy mają być razem na mecie. Autor tego artykułu nie rozumie, dlaczego i teraz termin *elita intelektualna* nie jest dobrze widziany.

Wracamy do fikcji. Na własny użytek mam termin: *fikcja użytkowa* – wyimaginowana historia, która jednak czemuś służy. Bez teorii przestrzeni wielowymiarowych nie byłoby na pewno komputera, za pomocą którego piszę ten artykuł. Nikt też nie powie, że Mickiewicz napisał swój poemat o ostatnim zajeździe na Litwie zupełnie bez celu i bez sensu, albo dlatego, że inaczej nie umiał zarobić pieniędzy na życie. *Dobra* fikcja zaczyna żyć swoim własnym życiem. Na kamienicy przy Krakowskim Przedmieściu, niedaleko Uniwersytetu Warszawskiego znajduje się tablica obwieszczająca, że w tym właśnie domu mieszkał Ignacy Rzecki – ten z „Lalki" Bolesława Prusa. Dom ulegał wielokrotnym przeróbkom, spalił się w 1944 roku, a Rzecki – taki z krwi i kości – nie istniał. No i co z tego? Solidna metalowa tablica podaje nawet jego życiorys.

Tym dla mnie jest literatura – autor chce nam coś powiedzieć, przekazać, opowiedzieć i dochodzi do wniosku, że najlepiej ująć to w *fikcję*. Gdy wejdziemy do księgarni w Anglii czy Ameryce i zaczniemy szukać działu z literaturą piękną, to właściwym adresem będzie *Fiction*.

Większość ludzi na pytanie *co to jest fikcja?* udzieliła by prostej odpowiedzi: *jest to nieprawda.* O tak wąskim pojmowaniu fikcji nie będziemy mówić. Nie tak rozumie się też fikcję w teorii literatury. Ale analizowanie bardziej *wymyślnej* nieprawdy jest jedną z *głównych metod dowodzenia twierdzeń matematycznych.* Myślę tu o dowodach niewprost, w których zakładamy coś, *co właśnie chcemy obalić*, i przez dłuższy lub krótszy czas pracujemy z tym fikcyjnym założeniem, wyciągamy wnioski, odkrywamy i analizujemy własności liczb, figur i przestrzeni tylko po to, żeby kilka linijek dalej stwierdzić, że nie mają miejsca, są fikcyjne. Tego rodzaju *fikcja użytkowa* nie mieści się w podanej wyżej klasyfikacji fikcji literackiej. Przypuśćmy, że chcemy przekonać się, że nie istnieją Zielone Wieloryby. Możemy wyobrazić sobie, że aby to udowodnić, pewien badacz napisał grubą książkę, analizującą zwyczaje tych hipotetycznych zwierząt, by na stronie 222 dowodnie wykazać, że pewne ich zwyczaje nie dadzą się pogodzić z tymi ze strony 143. Ponieważ – jak wywiódł nasz uczony – obie rzeczy są koniecznymi konsekwencjami istnienia ZW, ergo te poczciwe skądinąd ssaki istnieją tylko w naszym umyśle. To jest właśnie klasyczny dowód niewprost. Matematycy stosują go bez wahania i bardzo często. Przyjrzyjmy się rozumowaniu Sokratesa, że

$$\sqrt{2} \text{ jest liczbą niewymierną,}$$

to znaczy nie jest żadnym ułamkiem p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. We współczesnym ujęciu idzie ono tak. Załóżmy, że jest: $\sqrt{2} = p/q$ i że ułamka tego nie da się już skrócić. W szczególności liczby p i q nie są obie parzyste. Podnieśmy do kwadratu:

$$2q^2 = p^2.$$

Liczba p nie może być nieparzysta, bo wtedy p^2 też by była, a po lewej stronie równości stoi wielokrotność 2. A więc p jest parzysta, czyli $p = 2r$, a więc $p^2 = 4r^2$. Skróćmy równanie $2q^2 = 4r^2$. Otrzymamy $q^2 = 2r^2$ i widzimy, że q musi być też parzysta, a przyjęliśmy, że tak nie jest. *Otrzymana sprzeczność kończy dowód* – w każdej książce matematycznej można tę formułę znaleźć co chwila.

Analizowana równość okazała się nieprawdziwa, przez pewien czas obracałem więc fikcyjnymi wzorami.

Krótka teoria dowodów niewprost jest następująca. Są dwa zasadnicze ich typy: dowód apagogiczny i rozdzielczy. W dowodzie apagogicznym zaprzeczamy tezie i wyprowadzamy stąd zaprzeczenie założenia. Na mocy prawa wyłączonego środka wyjściowe twierdzenie jest prawdą. Dowody takie oparte są zwykle na jednym z następujących prawach rachunku zdań (p', q' oznaczają zaprzeczenia zdań p, q):

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p'),$$
$$(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p),$$
$$(p' \Rightarrow (r \wedge r')) \Rightarrow p,$$
$$(p' \Rightarrow p) \Rightarrow p.$$

Szczególnie ciekawe jest ostatnie prawo, zwane regułą Claviusa: jeżeli z zaprzeczenia zdania wyprowadzimy prawdziwość tego zdania, to zdanie jest prawdziwe.

Dowody apagogiczne nie są uznawane przez intuicjonistów. W intuicjonizmie twierdzenia o istnieniu są akceptowane tylko wtedy, gdy podany jest sposób konstrukcji danego obiektu. Pogląd ten jest konsekwencją negowania prawdziwości zasady wyłączonego środka. Przyjęcie zasady wyłączonego środka prowadziłoby, zdaniem intuicjonistów do *asercji tezy o istnieniu uniwersalnej metody rozwiązania każdego problemu matematycznego* [J. Ładosz: „Szkice z epistemologii matematyki", PWN, 1965, str. 42]. Do przyjęcia dla nich jest tylko drugi typ dowodu niewprost: dowód rozdzielczy. Stosujemy go w tych przypadkach, gdy dowodzona teza wchodzi do całości faktów, które w sumie wyczerpują wszystkie fakty z danego zakresu. Odrzucając wszystko poza jedną możliwością, dowodzimy właśnie jej. Jeśli wiemy, że szukany przedmiot musi się znajdować w jednym z trzech pudełek, to po sprawdzeniu, że dwa są puste, nie musimy już otwierać trzeciego. A Sherlock Holmes mawiał, że jeśli wyeliminujemy to, co niemożliwe, to wszystko to, co pozostaje, jakkolwiek niewiarygodne, musi być prawdą.

Korzystając z okazji, że mogę nauczyć Czytelników trochę matematyki, przypomnę trochę faktów o liczbach pierwszych. Są to liczby naturalne większe niż 1, które dzielą się tylko przez 1 i przez samą siebie: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ..., 22801763489 (jest to miliardowa liczba pierwsza), ..., 170141183460469231731687303715884105727, ... Ciąg liczb pierwszych nie ma końca i wiedział to już Euklides. Znów posłużymy się założeniem, o którym będziemy się starali dowieść, że jest fikcyjne: *liczb pierwszych* jest tylko skończenie wiele. Oznaczmy je wszystkie przez $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$. Nie wiemy, jakie jest N, ale to nic nie szkodzi. Utwórzmy iloczyn, którzy matematycy oznaczają estetycznym symbolem: $\prod_{j=1}^{N} p_j$, a który jest po prostu iloczynem tych wszystkich liczb:

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_N$$

i dodajmy jedynkę. Liczba $1 + \prod_{j=1}^{N} p_j = 1 + p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_N$ nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą, a więc sama jest pierwsza. Założyliśmy, że wypisaliśmy wszystkie liczby pierwsze, a wyszło nam, że nie wszystkie. *Otrzymana sprzeczność kończy dowód.* To zdanie matematycy wypowiadają codziennie. Przedstawione rozumowanie jest warte uwagi z kilku względów. Po pierwsze, korzysta ono z przytoczonej wyżej reguły wnioskowania, zwanej już w średniowieczu regułą Claviusa. Po drugie, rozumowanie – prowadzące do pożądanej sprzeczności – zawiera wnioski, które, oparte na fałszywych przesłankach, istotnie nie są poprawne w *prawdziwym świecie* matematycznym: iloczyn kolejnych liczb pierwszych powiększony o 1 nie musi być liczbą pierwszą:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509.$$

a nawet rzadko bywa:

$$
\begin{gathered}
2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1 = 19 \times 97 \times 277 \\
2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 + 1 = 347 \times 27953 \\
2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 + 1 = 317 \times 703763 \\
2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 + 1 = 331 \times 571 \times 34231
\end{gathered}
$$

i dopiero $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 + 1 = 200560490131$ jest liczbą pierwszą. Mój komputer potrzebował niespełna minuty, by rozłożyć na olbrzymie czynniki pierwsze

$$
\begin{aligned}
2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 + 1 &= \\
&= 7858321551080267055879091 = \\
&= 54730729297 \times 143581524529603.
\end{aligned}
$$

Analizując zatem ten dowód niewprost, odkryliśmy ciekawy problem matematyczny: kiedy iloczyn kolejnych liczb pierwszych powiększony o 1 jest znów liczbą pierwszą? Czy ma to miejsce skończenie wiele, czy nieskończenie wiele razy? Jest to otwarty, nie rozwiązany jeszcze problem matematyczny (co prawda, niespecjalnie ważny). Największą znaną liczbą pierwszą tej postaci jest

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times \ldots \times 1019 \times 1021 + 1 =$

$= 20832554441869718052627855920402874457268652856889007473404900784018145718728624430191587286316088$
$57214863138937930928474301694088598087188708302659775388131777260588503833162528205231112130679219354$
$04833217036456300717776168885357126715023250865563442766366180331200980711247645589424056809053468323 9$
$06745795726223468483433625259000887411959197323973613488345031913058775358684690576146066276875058596$
$10023611226005494428763653 1,$

a gdy komputer to wyliczał, zdążyłem zaparzyć kawę. W obecnej dobie tego typu informacje szybko się dezaktualizują i już być może znana jest większa. To jednak będzie istotne dla czystego matematyka, a my poświęćmy chwilę uwagi napisanej wyżej 428-cyfrowej liczbie. Czy możemy jakoś zdać sobie sprawę z jej wielkości? To bardzo trudno, przekracza ona jakąkolwiek ludzką skalę. Światło lampy, zapalonej przy narodzeniu Chrystusa przebiegło to tej pory dystans około tylko 1890512291520000000000 *milimetrów*. Jeżeli w pewnej książce było by tyle liter, ile wyraża owa 428-cyfrowa liczba i gdyby ultrahiperszybka drukarka drukowała sto miliardów znaków w ciągu jednej stumiliardowej sekundy (a to jest przecież zupełna fikcja!) , to od końca epoki lodowcowej wydrukowała by zaledwie około

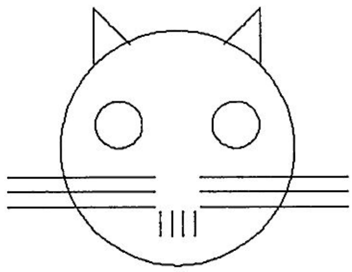
$$30000000000000000000000000000000$$

znaków. A gdzie reszta? Czy rozważanie takich dużych liczb nie jest samo w sobie fikcją? A jednak dla matematyka to mniej więcej wszystko jedno, czy ma do czynienia z liczbą 5, 7, czy 42783482495629365238566665999997.

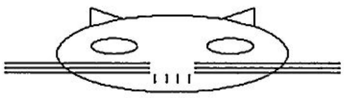
Odrzucając zatem płytkie rozumienie fikcji jako *nieprawdy*, a także *fikcji doraźnej*, która jest jądrem rozumowań niewprost, czyli dowodów przez *reductio ad absurdum*, widzimy, że fikcja literacka dobrze odpowiada matematycznemu pojęciu *idealizacji*, *modelu* a także – o czym będzie niżej, w pkt 6 – *abstrakcji*.

5. Kot jako fikcja

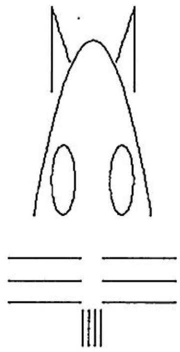
Poprzedni rozdział był przydługi i pełny matematyki. W nieco udziwnionej formie można to przedstawić powołując do istnienia sympatycznego kota o niezbyt oryginalnym imieniu Mruczek. Mruczek jest bardzo miłym kotkiem i naprawdę wygląda tak:



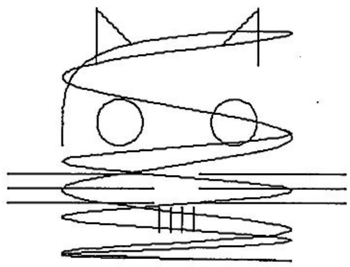
ale jego literacki opis może być taki:



a więc niezbyt ciekawy, bardzo sztampowy, taki sobie Harlecquin, ale można i naszego kotka Mruczka kotka odmalować tak;:



opisując następne jego przygody paraboliczne. A może autor chce spojrzeć na Mruczka przez *zwierciadło sinusoidalne*:



a dla specjalistów jest chyba oczywiste, że przyznaję się tu do stendhalowskiego rozumienia powieści (powieść jest to zwierciadło przechadzające się po gościńcu). Co więcej, jeżeli dopuścimy również zwierciadła o zakrzywionej powierzchni,. będzie się to stosować i do pozostałych form literackich. Nie każde bowiem krzywe zwierciadło daje efekt komiczny, jak w beczce śmiechu, a matematycy potrafią opisać równaniami każdą krzywiznę.

6. Fikcja jako abstrakcja i porządkowanie

Jest w matematyce niezliczona ilość przestrzeni, wymienię tylko niektóre nazwy: przestrzenie liniowe, metryczne, topologiczne, algebraiczne, unormowane, Banacha, Hilberta, ... Za każdym razem chodzi o porządkowanie badanych obiektów, wprowadzanie na nich jakiegoś *ładu i składu*. Niemal wszystkie twory matematyczne wypełniają jakieś ciekawe przestrzenie, niekiedy pełne punktów osobliwych, dziur i wirów, czyhających na niedoświadczonego podróżnika. Praca habilitacyjna autora tego artykułu polegała na uporządkowaniu pewnych (ile się dało) *wiązek wektorowych* na czymś, co było dane równaniem kwadratowym. Tej pracy referować tu nie będę, ale **każdy** jest w stanie zrozumieć, jak można uporządkować i badać wszystkie równania kwadratowe.

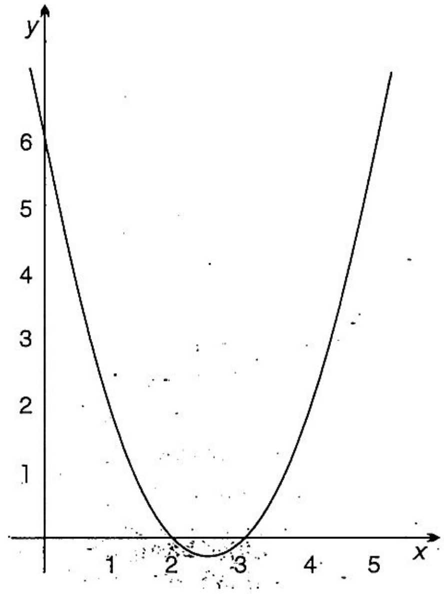
Wszyscy pamiętamy owe równania ze szkoły:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i może nawet, jak się je rozwiązuje: obliczamy deltę $\Delta = b^2 - 4ac$ i jeżeli jest ona nieujemna (to znaczy większa od zera lub równa zeru), to równanie ma rozwiązanie:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

znak $\pm$ przypomina, że są na ogół dwa rozwiązania: w jednym trzeba wziąć plus, w drugim minus. Na przykład dla równania $x^2 - 5x + 6 = 0$ obliczamy: $\Delta = 25 - 24 = 1$ i podstawiając do wzoru, otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Wykres funkcji kwadratowej $y = x^2 - 5x + 6$ widzimy poniżej.

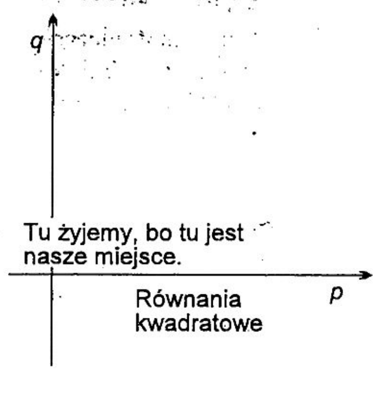


I to tyle tytułem przypomnienia wiadomości z II klasy liceum. Skonstruujemy teraz pewną przestrzeń, pewien świat, w którym żyją nasze **równania**. Widzieliśmy, że mają one trzy współczynniki a, b, c. Ale, żeby równanie było naprawdę kwadratowe, współczynnik a musi być różny od zera. Można więc przez niego podzielić i zapisać równanie tak, żeby współczynnik przy x^2 był równy po prostu 1:

$$x^2 + px + q = 0,$$

gdzie $p = b/a$, $q = c/a$. A więc równanie jest reprezentowane przez parę (p, q), a więc punkt na płaszczyźnie! Każda para liczb wyznacza równanie, każde równanie – parę liczb. Matematycy mówią, że pokazaliśmy oto wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy równaniami i parami liczb. Mając parę liczb, możemy napisać odpowiadające równanie i odwrotnie. Mamy doskonały *słownik*, jak tłumaczyć równania na liczby i *vice wersa*. Możemy zapomnieć o tym, że liczby to co innego niż równania. I oto doszliśmy do ładnego twierdzenia matematycznego:

Twierdzenie. Wszystkie równania kwadratowe żyją sobie na płaszczyźnie:



Fundamentalną metodą badawczą dla matematyków jest właśnie tendencja do utożsamiania zbiorów, między którymi została ustalona taka odpowiedniość. Dzięki temu *patrząc* na liczby, możemy *widzieć* wszystko: skomplikowane funkcje, wielowymiarowe przestrzenie, powykrzywiane i nieorientowalne powierzchnie. Jest to zupełnie literacko pojmowana *fikcja* – Czytelnicy wiedzą znacznie lepiej ode mnie, że całą fabułę „Wesela" da się opisać w kilku zdaniach, a i zawartość ideową można bez specjalnych przekłamań streścić w niewielkim szkicu. Nie na tym polega wartość tego dzieła.

Opiszę dokładnie – jest to istotne dla całego wykładu zawartego w tym artykule – jak matematycy posługują się zasadą identyfikacji zbiorów, jeżeli dana jest *dobra* funkcja między nimi. Patrząc na płaszczyznę, widzimy teraz zbiór równań, a raczej: możemy zobaczyć. Pozwolę zatem sobie na nazwanie płaszczyzny Królestwem Równań Kwadratowych. Ale równania są różne, jak różni są ludzie. Na przykład jedne (równania, nie ludzie) mają rozwiązania, inne nie. Gdzie rozciąga się Księstwo Tych, Co Mają Rozwiązania? Musimy trochę porachować: kiedy *delta* równania $x^2 + px + q = 0$ jest nieujemna? Oczywiście, gdy $p^2 - 4q \geq 0$. Narysujmy tę parabolę $y = p^2 - 4q$, zaznaczmy inne obszary i punkty charakterystyczne (p, q) – czyli *pewne ciekawe równania*. Otrzymamy mapę Królestwa. Płynie przezeń Rzeka Paraboliczna. Oddziela ona Dobre Równania (te, które dają się rozwiązać) od tych złych, bez pierwiastków. W rzece pływają równania-dziwolągi: o jednym tylko pierwiastku. W samym wierzchołku paraboli siedzi dziw nad dziwy: równanie $x^2 = 0$, a gdyby zapytać matematyka, jakie równanie kwadratowe powinno zostać Królem, z dużym prawdopodobieństwem *dałby kreskę* równaniu

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

a to dlatego, że jednym z jego pierwiastków jest admirowana już przez starożytnych Greków boska liczba

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052 6\ldots$$

wyrażająca stosunek złotego podziału (całość ma się tak do większej części, jak większa do mniejszej), o którym pisałem wyżej. Grecy podchodzili do nauki od strony, jakbyśmy to dzisiaj określili, humanistycznej i *mimo to* (ironia zamierzona, M.Sz.) dokonali bardzo wielu odkryć matematycznych. Jeśli ktoś z Czytelników sam przygotowuje się do matury z matematyki, albo ma dziecko, brata, siostrę, czy znajomego w tym wieku, to proszę mu polecić takie oto

Zadanie. Przez dany punkt naszej płaszczyzny prowadzimy styczną do opisanej wyżej paraboli $y = p^2 - 4q$. Jaką charakterystyczną własność mają równania, odpowiadające punktom na tej stycznej (wskazówka: przypomnieć sobie wzory Vieté'a).

I jeszcze zadanie trudniejsze, już zdecydowanie dla zainteresowanych matematyką. Pochodzi ono z Olimpiady Matematycznej w 1950/51 roku:

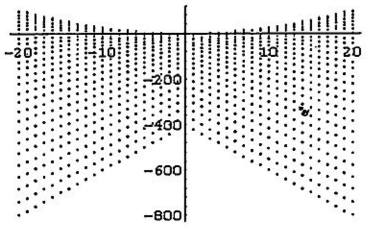
Zadanie. Dane są dwa trójmiany kwadratowe $x^2 + mx + n$ i $x^2 + px + q$. Kiedy pierwiastki jednego z nich leżą między pierwiastkami drugiego?

Niektóre równania kwadratowe są Dobrze Urodzone: mają obydwa pierwiastki całkowite. Dobry nauczyciel matematyki pamięta kilka z nich, żeby mieć pod ręką gotowe łatwe przykłady do dyskusji w klasie. W dzisiejszych czasach szukanie takich równań można zalgorytmizować. Każdy zrozumie, że napisanie poniższego programu (w języku Mathematica) na szukanie wielomianów o pierwiastkach całkowitych nie może być trudne. Po kilku godzinach nauki każdy z Czytelników byłby w stanie podobny program napisać.

Program w języku Mathematica, wyszukujący te wielomiany kwadratowe $x^2 + px + q$, których obydwa pierwiastki są całkowite:

```
For [p = -20, p<=20, p++,  Block{For[k= -20, k <=20, k++,
Block{q:=p*k-k^2,       If[(p^2-4q >=0),        Print["Oto
wspolczynniki: (", p ",", q, ")"]]}]}]
```

Efektem działania programu może być estetyczny wykres. Kropki reprezentują równania, które mają pierwiastki całkowite. Leżą one rzadko na ciągłej płaszczyźnie, wszystkie pod parabolą widoczną w górnej części rysunku, również w trójkącie o wierzchołku −400; tyle tylko, że program drukuje je ukośnymi rzędami.



Mapę przestrzeni wielomianów kwadratowych widzimy na rysunku na końcu artykułu. Wielomiany trzeciego stopnia wypełnią przestrzeń trójwymiarową, dla której opisana wyżej płaszczyzna będzie *płaszczyzną w nieskończoności*. Czwarty stopień da przestrzeń wymiaru cztery, piąty – wymiaru pięć i *tak dalej*. Analiza *punktów w nieskończoności* jest zresztą trudna (koniec pierwszego roku studiów matematycznych) i wymaga elementarnego obycia z geometrią rzutową. Powiem tylko, że na naszej płaszczyźnie żyją same równania kwadratowe, ale na jej brzegu, *czyli konkretnie w nieskończoności*, jest skromne miejsce dla równań liniowych, tj. pierwszego stopnia. Nieskończoność jest bardzo dobrze opisywalna matematycznie: kilka prostych wzorów i pozioma ósemka już nam niestraszna, ale może już dość tych formułek...

Owo Królestwo Równań Kwadratowych można by opisać nieco inaczej; wychodząc z innej postaci równania kwadratowego, np. $y = (x - a)(x - b)$, choć do tego trzeba *liczb zespolonych*. Matematyk może mieć wielość rzeczywistości przez rozmaite parametryzacje przestrzeni, które bada.

Używana przez mnie terminologia i styl mogą sugerować, że to wszystko są jakieś żarty matematyczne. Nie, rzecz jest dość poważna. To, co ja nazwałem Królestwem, matematyk potraktowałby jako *przestrzeń moduli* (łac. *modulus*) wielomianów kwadratowych, a napisałem to w trybie warunkowym tylko dlatego, że z matematycznego punktu widzenia jest to konstrukcja tak łatwa i oczywista, że nie warto poświęcać jej znaczniejszej uwagi. Stąd ten styl pisania. Równania kwadratowe są naprawdę bardzo dobrze poznane. Ale już równania trzeciego stopnia wciąż kryją naprawdę wiele tajemnic.

7. Sens i nonsens

Każdy ochoczo się zgodzi, że nie wszystkie ciągi liter są sensownymi słowami, nie wszystkie ciągi słów są zdaniem, a nie każda rymowanka poezją. Nie każde rachunki matematyką, nie każdy układ kresek – geometrią, nie każda sekwencja dźwięków muzyką ... i tak dalej. Problem w tym, co jest dobrą poezją, dobrą matematyką, muzyką. Żadne definicje nie są tu adekwatne; decyduje wyłącznie gust ... indywidualny i społeczny. Po łacinie brzmi to de gustibus non disputandum, a dla nie znających tego języka podaję dosłowny (jak to się teraz mówi, *word for word*) przekład na polski: ksiądz woli pomarańcze, organista Magdę.

Jako matematyk, przyzwyczajony jestem do definiowania wszystkich pojęć, których się potem używa. Muszę więc jasno określić i własny gust literacki. Ułatwi to ewentualnym oponentom dyskusję z użyciem zgniłych jajek.

Then, gust autora tego artykułu jest następujący (jako laik mogę sobie pozwolić na niewyważone, zdecydowane opinie). „Trylogia" nadaje się do czytania, choćby dlatego, że przemiana zła w dobro jest głęboko chrześcijańska, „Mastier i Margerita" jest wielka, a pozostała twórczość Michaiła Bułhakowa niekoniecznie, Thomas Mann jest wielkim pisarzem (każdemu zdarzają się wpadki, takie jak jemu „der Zauberberg"), a „Ulisses" to makulatura (na szczęście książka jest gruba!). Z wierszy, które są tylko igraszką słowną, lubię utwory w stylu „Słopiewnie" Julian Tuwima, nie patrzę nawet na twórczość

Młodożeńca, nie znoszę turpizmu, np. w wydaniu Grochowiaka. Uwielbiam za to igraszki słowne takie, jak te z wiersza niemieckiego poety Christiana Morgensterna (1871–1914) o łasicy, siedzącej pośrodku strumienia. Przytaczam ten wiersz w *kongenialnym* przekładzie Stanisława Barańczaka:

DAS ÄSTHETISCHE WIESEL	ŻYRAFY-ESTETKI
Ein Wiesel	Stado żyrafie
saß auf einem Kiesel	gnieździ się w szafie
inmitten Bachgeriesel	na koralowej rafie
Wißt ihr weshalb?	Pytanie nader
Das Mondkalb	istotne. Czemu?
verriet es mir	Dromader
im Stillen	ze strusiem emu
Das raffinier	depeszują odpowiedź z Rzymu:
te Tier	Jest zwyczajem wyraf-
tat's um des Reimes willen.	inowanych żyraf
	robić takie rzeczy dla rymu.

Z drugiej strony, utwory w stylu historii o piecu Mirona Białoszewskiego uważam za prostą kpinę z Czytelnika, no chyba, że wiersz (??) ten ukazałby się w gazecie codziennej z datą następującą po 31 marca. Przytaczam obszerny fragment tego utworu z tendencyjnym zaniedbaniem *znaku sterującego* \par, co w edytorze tekstów matematycznych TEX oznacza przejście do następnej linijki:

> Mam piec podobny do bramy triumfalnej! Zabierają mi piec podobny do bramy triumfalnej!! Oddajcie mi piec podobny do bramy triumfalnej!!! Zabrali.

Oburzonym Czytelnikom, którzy powiedzą, że poezja może polegać i na odpowiednim postawieniu przecinka i że nawet Cyprian Kamil by się z tym zgodził, odpowiem po prostu: – e tam, sami w to nie wierzycie.

Nieskoro też mi krytykować kogoś, kto siedział po prawej ręce króla szwedzkiego. Wiersz Wisławy Szymborskiej o liczbie pi odczytywałem sobie wiele razy z niekłamanym uczuciem, ale i lekką zawodową goryczką. Wiersza nie przytaczam, Autorka zadziwia się w nim *prawdziwą* nieskończonością: ciąg cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby *pi* nigdy się nie skończy i nie zacznie powtarzać.

Proszę Państwa: przecież dokładnie każda liczba niewymierna ma dokładnie tę samą własność, co opiewana przez Wisławę Szymborską *pi*. To trzeba wiedzieć na trójkę na maturze. Ach, sorry, teraz dwójka też zalicza. Nie na tym polega wyjątkowe znaczenie tej liczby... wykład matematyczny na życzenie. Podstawiając 7 za liczbę lat Pirxa Stanisław Lem nie wykroczył poza pewną konwencję – zachwyt laureatki najpoważniejszej nagrody, jaka może spotkać człowieka, nad liczbą wyrażającą stosunek obwodu koła do jego średnicy jest ... wzdragam się jednak przed napisaniem „fałszywy", bo jak i Witkiewiczowi sto lat temu, tak i mnie teraz gwara góralska wydaje się poezją, a dla moich *gazdów* z Małego Cichego jest normalnym sposobem mówienia. To smutne, że *poezja* może znaczyć po prostu *niezrozumienie* (patrz pierwsze zdania tego artykułu!!) ... to byłoby okropne ... Przy lekturze wiersza Wisławy Szymorskiej o liczbie pi wylazł ze mnie cały zasuszony matematyk, co to dla niego tylko szkiełko i oko ...

Aha, a co z sensem i nonsensem w matematyce? Dziękuję, wszyscy zdrowi. Problem uczonego, który jest niezrozumiały przez społeczeństwo, bo wyprzedza swoją epokę o kilkadziesiąt lat, jakby przycichł. Może z powodu etatyzacji ... coraz mniej jest geniuszy, którzy godzą się na życie w biedzie, by Tworzyć. Jeśli nie znajdą miejsca na jakimś uniwersytecie, podpisują umowę z firmą komputerową, gdzie w dużym zespole pracują nad świetnym system sprzedaży biletów (żeby i w Zalesiu Górnym można było kupić bilet do Jokohamy!), albo z agencją reklamową. Sprzedaż Niezwykłego Proszku wzrasta trzykrotnie, a nasz Intelektualista kupuje sobie lepszy samochód. Wspomnę tylko o czymś, co może każdemu filologowi wydać się kpiną ze studenta, a jest bardzo poważnie traktowaną teorią matematyczną, ważniejszą zresztą może nawet dla fizyki niż dla samej matematyki. Otóż termin *słowo* ma w matematyce konkretne znaczenie: jest nim dowolny ciąg zdefiniowanych uprzednio zmiennych, np.: $xyxyzyx$. Jeśli wprowadzę aksjomat, że podobne litery można łączyć, to zamiast $xxxxyyyyy$ napiszę oczywiście x^4y^5, a jeśli założę przemienność, to skrócę $xyxxyzxzyxyx$ do $x^6y^4z^2$. Między zmiennymi mogą zachodzić jakieś związki, np. $x^2+y^2=z^2$ i wtedy mogę się pozbyć zmiennej z i zastąpić $x^6y^4z^2$ przez $x^8y^4+x^6y^6$. Analiza systemów, w których składamy słowa, jest znana w algebrze pod nazwą pod nazwą teorii grup, a dokładnie w chwili, kiedy piszę ten tekst, moi studenci zdają egzamin pisemny z tej teorii. Pojutrze będę miał do przepytania 30 osób na ustnym...

Suma wiedzy, intuicji i doświadczenia wszystkich matematyków składa się na powszechne uznanie, co ma, a co nie ma sensu. Jak każda taka zbiorowa opinia, nie jest ona niezmienna w czasie.

Wspomnę jeszcze o *teorii kategorii*, którą sami matematycy nazywają *abstract nonsense* – nonsensem abstrakcyjnym. Pasuje ona świetnie do określenia fikcji literackiej jako ogólnego prawa. Wiemy wszyscy, że dodawanie liczb jest przemienne: $a+b=b+a$. Zawsze. Oto, jak wyraża ten fakt teoria kategorii: Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych. Rozpatrzmy diagram funkcji:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

w którym górna strzałka pozioma to funkcja $(x,y)\to(y,x)$, a ukośne strzałki symbolizują dodawanie. Przemienność dodawania mówi, że ten diagram jest przemienny (lubimy go nazywać kartezjańskim), a więc pójście z lewego $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ do dolnego $\mathbb{Z}$ wprost na płd.-wsch. da ten sam efekt, co najpierw na wschód, a potem na płd.-zach. Matematycy zawsze lubili turystykę.

Uff...Po co tak komplikować prostą rzecz? Po to mianowicie, że tak sformułowana przemienność dodawania jest przejawem pewnego ogólnego prawa. Nie musimy mieć liczb, żeby mówić o przemienności dodawania. Wystarczy narysować kilka strzałek. Sami matematycy nie uważają jednak takich zbyt ogólnych rozważań za dobrą matematykę, ale chętnie stosują diagramy i strzałki w konkretnych sytuacjach. *Fikcja jako ogólne prawo* ma w matematyce bardzo dobre prawo obywatelstwa.

8. Problem narratora

Jest to dobrze znane zagadnienie w teorii literatury: co wie, a czego nie wie o bohaterach narrator. Najczęściej wie wszystko, w szczególności doskonale zna ich stany emocjonalne. Do niektórych bohaterów nastawiony jest dobrze, do innych źle. Ocenia ich, ale na ogół nie podpowiada, co mają czynić ani nie żałuje za nich wstecz (tak, jak narrator Pana Tadeusza misia: *Głupi niedźwiedziu, gdybyś w mateczniku siedział...*). W pracach matematycznych standardem jest chłodny opis, prowadzony przez pozbawionego uczuć obserwatora: *Weźmy, rozważmy.* Matematyka ujawnia tu cechy nauki przyrodniczej, którą nie jest. Większość przymiotników i środków stylistycznych byłaby bezlitośnie wyszydzona przez recenzentów i skreślona przez redaktorów ... choć wyjątki jestem sobie w stanie wyobrazić, a i dawniej było inaczej. Tytuły dzisiejszych podręczników są suche i prozaiczne: „Teoria liczb", „Wykłady z topologii algebraicznej", „Podstawy teorii grup". Oto tytuł (!) książki wydanej w 1874 roku:

Treść

Jeometryi elementarnej

Popularnie w 95 rysunkach na oko pokazana

albo

raczej wyrazy jeometryczne, bez poznania których nie można mieć

dokładnego pojęcia w wykładzie nauk przyrodniczych, a nawet bez

ścisłej ich znajomości sama mowa potoczna na

jasności i zrozumiałości traci

Z dodatkiem

sposobów wymierzania wszystkich powierzchni figur i pełności

rozmajitych postaci brył

Szczególnie dla płci pięknej napisana

przez

Antoniego Odrowąża Kamińskiego

Używana powszechnie w pracach pisanych po polsku pierwsza osoba liczby mnogiej: *Udowodnijmy teraz twierdzenie Pitagorasa* nie jest *pluralis majestatis*, ale pewnego rodzaju skrótem myślowym: *Oto teraz my razem, Czytelniku, ja i Ty, udowodnimy twierdzenie Pitagorasa.* Tak samo w pierwszej osobie liczby mnogiej pisze się po angielsku i rosyjsku; po francusku jest dopuszczalna forma bezosobowa, całkiem poprawna już w niemieckim: *man nehme, man beweise.* Należy ze smutkiem skonstatować, że wszystkie języki przejmują angielskie rozumienie słów i niekiedy i składnię. Liczne przykłady pominę, żeby nie psuć Czytelnikom ewentualnego dobrego humoru. Wspomnę tylko dwie ciekawostki językowe. Polski jest jedynym językiem indoeuropejskim, który nie ma łacińskich terminów na stożek, walec, prostopadłościan itd. a także na całkę i różniczkę – to wynik działalności braci Śniadeckich z pierwszych lat XIX wieku. Natomiast holenderski jest jedynym językiem, gdzie słowo znaczące po prostu *matematyka* nie ma owego starogreckiego rdzenia *mathein.* Po holendersku *matematyka* to *Wiskunde* i ma to samo pochodzenie, co współczesne niemieckie *Wissenschaft* i angielskie *wisdom* (= wiedza).

Osobny traktat należałby się analizie terminologii matematycznej. Wspomnę tylko co bardziej smakowite kąski. Niematematycy dziwią się, gdy dowiedzą się, że zbiór, który nie jest otwarty, nie musi być domknięty i że są zbiory, które są jednocześnie otwarte i domknięte. Z oczywistego dla studentów drugiego roku faktu, że każde *X jest gęste w X* nie wynika (i dość rzadko się zdarza), że *X jest w sobie gęste.* W geometrii algebraicznej elipsa nie jest krzywą eliptyczną, choć ma *typ eliptyczny.* No, bo krzywe eliptyczne mają typ paraboliczny.

Zanotujmy jeszcze fragment podręcznika dla inżynierów „Technik" (1936): *Koniec nitki nawiniętej na rozwinietą opisuje rozwijającą, jeśli go się odwija z rozwiniętej.*

9. Ścisłość

Następnym tematem naszej dyskusji jest precyzja i ścisłość w matematyce i ... literaturze. Co proszę? – powie każdy – Przecież wszystko jest jasne: twórczość literacka to dowolność, a matematyka = precyzja. Nie da się temu zaprzeczyć. Matematyka uchodzi za symbol pewności: *... to zostało matematycznie dowiedzione, ... z matematyczną dokładnością, to pewne jak* $2 + 2 = 4$ – chwała pokoleniom uczonych, którzy wypracowali taką opinię o Królowej Nauk. Z pewnego rodzaju dumą chętnie przyznajemy, że w Naszej Nauce z takich samych przesłanek można wyprowadzić tylko – zawsze i wszędzie – te same wnioski. Żadna partia polityczna nie pójdzie do wyborów z hasłem: *Obalimy twierdzenie Pitagorasa*, czy *Precz z tożsamością* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Zauważmy tylko, na marginesie, że w ostatnich latach nie mówi się *to zostało matematycznie dowiedzione*, tylko *komputer obliczył*, a uczeni (nazywani w nomenklaturze urzędniczej naukowcami) przestali być zaliczani do *inteligencji*, a stali się *budżetówką*. To jest jednak temat na inny artykuł.

Jak to jest z tą precyzją sądów matematycznych i niematematycznych? Rozważmy takie opinie:

> Na płaszczyźnie euklidesowej w trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.
>
> Człowiek nigdy nie dostanie się na Jowisza.
>
> Wiekszość Polaków woli Pepsi-Colę od Coca-Coli.
>
> Dawniej było lepiej.

Która z nich jest bezdyskusyjna? Pierwsza na pewno. To twierdzenie Pitagorasa, miło kojarzące się nam z wczesną młodością. Druga? Hm, rzeczywiście na powierzchni Jowisza jest zimno, ciemno i strasznie ciężko. Ale w dziewiętnastowiecznych książkach nader chętnie szermowano stwierdzeniami: przesyłanie głosu na odległość jest niemożliwe, nie dostaniemy się nigdy na Księżyc, bo tam nie ma powietrza, a więc balonem dolecieć się nie da, a na początku XX wieku futurolodzy francuscy przewidywali, że w 1940 roku ulice Paryża będą do wysokości pół metra pokryte, excusez le mot, łajnem końskim. W dziedzinie techniki człowiek jest *diabelnie* pomysłowy.

Co z Coca i Pepsi? Wyobraźmy sobie, że Instytut Opinii Publicznej przeprowadził odpowiednie kosztowne badania i uzyskał opinię twierdzącą. Co to znaczy? Czy naprawdę większość Polaków woli P od C ? **Nie**, to tylko znaczy, że **większość Polaków dała tego dnia na to pytanie odpowiedź twierdzącą**. Może za tydzień będą głosować inaczej, bo Coca rozpocznie kampanię reklamową (przykład wojny masło-margaryna pokazuje, że reklamą można wcisnąć prawie wszystko). Może nie bardzo wiedzą, o co chodziło w ankiecie (co to znaczy: *lubić? Może Pepsi lepiej czyści zardzewiałe śruby?*), może głosowali na złość. A może ankieta kłamie? Może była przeprowadzana na zlecenie Pepsi Company? Nie trzeba oszustw w stylu parlamentarnym, ani falandyzacji wyników. Można fałszować rzeczywistość nie kłamiąc. Czy mówię od rzeczy? Nie. Wyobraźmy sobie oto, że pewien ośrodek badania opinii publicznej przeprowadził ankietę, czy lepiej usuwa łupież Pepsi, czy Coca Cola. Spójrzmy na tabelę, obrazującą wyniki tych badań.

	Próbowało	Pozbyło się łupieżu	Skuteczność w procentach
Pepsi Cola			
Mężczyzn	210	50	24
Kobiet	20	15	75
Ogółem	230	65	28
Coca Cola			
Mężczyzn	100	20	20
Kobiet	60	40	67
Ogółem	160	60	38

Coca Cola ogłasza więc dumnie swoje zwycięstwo nad Pepsi, bo $38 > 28$. To bujda, że jesteście lepsi oświadcza prezes Pepsi i pokazuje w tabeli: mamy nad wami czteroprocentową przewagę wśród mężczyzn ($24 > 20$) i ośmioprocentową wśród kobiet. Myjcie włosy tylko Pepsi Colą!

Matematycznie sytuacja jest prosta: dodawaliśmy liczby w niedozwolony sposób, podobnie jak z zadaniu: z Warszawy do Krakowa (300 km) jechaliśmy z prędkością 60 km na godzinę, z powrotem 100 km na godzinę. Jaka była prędkość przeciętna? $(100 + 60)/2 = 80$? Oczywiście, że ... nie (to *zadanie do domu dla Czytelników; w razie trudności zasięgnąć konsultacji u syna/córki ze szkoły podstawowej, a jeśli dziecko nie będzie umiało rozwiązać, to iść na skargę* *do dyrektora szkoły na nauczyciela matematyki!!*). A w rozważanym przykładzie bossowie przemysłu napitkowego posłużyli się matematyką jak pijany kłonicą: do walenia nią po głowie oponenta. Wszyscy wiemy, że literatura piękna też nieźle sprawdza się w podobnej roli. Tej analogii może jednak nie eksponujmy.

Wróćmy do czterech twierdzeń, sądów raczej, napisanych w początkowej części. Najbardziej mętne jest oczywiście zdanie ostatnie, o tym jakoby dawniej było lepiej. *Kiedy* było lepiej? *Komu* było lepiej? *Co to znaczy* lepiej? Bardzo trudno będzie znaleźć grupę ludzi, która zgodzi się tutaj na jednolite kryteria ... a potem i tak się pokłócą, choćby dlatego, że pamięć jest zawodna. Ale sprawa jest głębsza. Matematyk z trudem przyjmuje do wiadomości, że w naukach nie zaliczanych do ścisłych, nie ma jednej prawdy! Przeczy to jego rozumieniu tego pojęcia. W każdej nauce ścisłej liczą się przede wszystkim wyniki ilościowe: Księżyc jest odległy od Ziemi o 384000 km (a nie: jest bardzo daleko), w trójkącie prostokątnym $a^2 + b^2 = c^2$, na ogólnej powierzchni określonej równaniem stopnia 5 w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej jest dokładnie

$$704288164978454686113482249750$$

krzywych wymiernych stopnia 10 (tak jest, to prawdziwy, odkryty niedawno wynik – rezultat rozwinięcia zręcznych metod obliczeniowych!). Bez czucia i wiary w to, co się robi, trudno jest coś osiągnąć w naukach ścisłych, ale bez *szkiełka i oka* – zupełnie niesposób. Na marginesie zauważę tu, że pod wpływem komputerów matematyka zaczyna wracać do swoich korzeni – obliczeń. *Jak to wyliczyć?* – moje pokolenie matematyków zostało nauczone, że to nieważne, że ważne jest tylko Zrozumienie Idei. Jako nauczyciel, wiele razy miałem do czynienia z sytuacją, w której uczeń czy student oblicza coś, szybko przestaje rozumieć, o co właściwie chodzi, ale obliczenia już się wyalienowały. Uczeń coś rachuje, ale już nie wie, *o co biega*. W końcu otrzymuje z ulgą *jakiś* wynik, np. że ojciec starszy jest od syna o minus 23 kilometry, albo, że pociągi miną się w odległości 450000 km na godzinę i zadowolony domaga się pozytywnego stopnia, bo *ukończył rachunki.*

Zwracali na to uwagę poważni filozofowie. Zacytuję Schopenhauera: Rechnungen haben bloß Werth für die Praxis, nicht für die Theorie. Sogar kann man sagen: wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf.

Dosłownie rzecz biorąc, ma on rację. Rachunki wyłączają nam rozum: włączamy nasz komputer i coś się tam liczy. Ale racja Schopenhauera jest tylko teoretyczna: właśnie chodzi o to, by rachunki nas uwalniały od myślenia, gdzie jest ono *niepotrzebne* i wspomagały je tam, gdzie rozum ma trudności. Bo – niestety czy na szczęście – większość czynności trzeba robić nie zastanawiając się nad nimi. Czy nauczyciel ma prawo postawić pozytywny stopień uczniowi, który nie wie, ile to jest 2 dodać 2, ale twierdzi, że wie, jak to obliczyć i nawet po minucie obliczy? Czy chcielibyśmy być operowani przez chirurga, który za każdym razem przypomina sobie teorię użycia skalpela i wertuje podręcznik anatomii?

W wojsku austro-węgierskim był specjalny order dla oficera, który nie wykonał rozkazu, bo *pomyślał* i w ten sposób uratował kompanię, batalion, czy pułk. Order przyznawano niezwykle rzadko: oficer nie może myśleć nad rozkazem, tylko ma go wykonywać. Ale...

10. Wielość rzeczywistości

Skoro matematyka wymaga precyzji (a tak jest!), to czy jest w niej miejsce na jakąkolwiek wielość rzeczywistości? Czy jest jakaś rzeczywistość matematyczna, w której $2 + 2 = 5$?

Można by ją skonstruować, ale każdy z nas jest obyty z taką arytmetyką, w której $10 + 4 = 2$. Prawda? Jeśli zebranie zaczyna się o dziesiątej i trwa cztery godziny, to o której się kończy? Matematycy nazywają to dodawaniem *modulo* 12, ale i bez wprowadzenia nazwy każdy rozumie, o co chodzi i ile to będzie dwa razy dwa *modulo* 3. Ale to nie jest dobry przykład wielości światów matematycznych. To tylko różne systemy rachunkowe. A właśnie wielość rzeczywistości jest tym, co łączy bardzo ściśle matematykę i literaturę.

Przejdźmy zatem do analizy pewnych wielości rzeczywistości. Zacznijmy od wyimaginowanego przykładu. Autor pewnej powieści wspominał w niej wielokrotnie, że *wujek Onufry, stary kawalarz i facecjonista, obiecał podarować Jasiowi piękne puzderko. „Nie będzie ono puste, zapewniam cię, luby siostrzeńcze!"*. Pod koniec powieści przyniósł je: *„Proszę, Jasiu, to dla ciebie". Jaś otworzył ... i oniemiał ....*

I na tym skończyła się powieść. Czytelnik może do woli fantazjować, czy szkatułka była pełna złotych monet, czy może stary skąpiec włożył tam zdechłą żabę. Można napisać dwa drugie tomy powieści: w jednym z nich za złote monety wuja Onufrego Jaś kupił akcje na giełdzie, które niebywale hossowały. Doszedł do fortuny. Miał typowe kłopoty businesmana, w szczególności za bardzo lubił dobre trunki. Niektórzy mówili, że stał się alkoholikiem, ale to nie była prawda. W każdym razie w hacjendzie, którą właśnie nabył, jest basen i pole golfowe; w zatoczce czeka jacht, na którym Rozalinda kończy ostatnie przygotowania do rejsu naokoło świata. Jaś kończy swój ulubiony gin z tonikiem i za chwilę pożegluje sam na sam z Rozalindą (*plus* piętnaścioro służby) na Morza Południowe. W tym *drugim* drugim tomie zawiedziony Jaś popija coraz bardziej i coraz gorszą wódkę, powoli schodzi na psy i koniec drugiego tomu zastaje go śpiącego na ławce w parku – nie golonego od trzech dni, obdartego, z butelką taniego wina w podartym płaszczu. Nie ma żadnej Rozalindy, hacjendę kupił sam wuj, a koło Jasia kręci się tylko wierny pies, którego przodkowie należeli do wszystkich istniejących ras. Wabi się Morus i jest bardzo przywiązany do Jasia. Wybiorą się dziś na przedmieście, może znajdzie się tam jakiś zarobek.

Autor powieści mógłby zostawić pewne wskazówki co do dalszych losów Jasia po owym znaczącym wieczorze z wujem Onufrym – żeby chociaż uprawdopodobnić dalsze jego losy – ale mógłby nie dać żadnych *indykacji*. Wtedy oba tomy, obydwa zakończenia pierwszego tomu byłyby równie dobre. Matematyk powiedziałby, że obie hipotezy (hipoteza pełnej i hipoteza pustej szkatułki) są niesprzeczne. Ważne jest też, czy dla całości dzieła, dla jego wydźwięku, jest *istotne*, co w tej szkatułce było, ile miał włosów na głowie Andrzej Kmicic (wiadomo, że więcej niż zero, bo takiego na pewno Oleńka by nie chciała), ile dzieci miała Lady Macbeth, czy Tadeusz był brunetem, czy blondynem. Wychwytywanie charakterystycznych momentów powieści wydaje mi się, laikowi, bardzo ważnym elementem analizy dzieła literackiego a poniżej (pkt 11) porównuję to do znanej wszystkim programistom różnicy między zmiennymi lokalnymi i globalnymi..

Wydaje się, że historia z wujem Onufrym (wspomnijmy też niejednoznaczność zakończenia „Lalki") to typowa fikcja literacka, że coś takiego możliwe jest tylko na kartach powieści. Nie! Przejdźmy znów do matematyki. Dla oglądających matematykę *z zewnątrz*, najbardziej efektowną wielością rzeczywistości są geometrie nieeuklidesowe.

Wszyscy słyszeli, że w geometriach nieeuklidesowych chodzi o jakieś proste równoległe, czy wprost przeciwnie – nierównoległe. Tak właśnie jest. Jeżeli przez punkt płaszczyzny, nie leżący na prostej mogę poprowadzić jedną prostą równoległą do danej, to geometria moja jest euklidesowa, paraboliczna. Jeśli żadnej – to jest to geometria Riemanna, eliptyczna, a jeśli więcej niż jedną, to mamy do czynienia z geometrią hiperboliczną – Łobaczewskiego. Nie jest wcale jasne, jaka jest geometria naszego świata. Wydawać by się mogło, że euklidesowa: to przecież widać, ale jak stwierdzić to na pewno?

Jak tam jest z naszym światem, tak jest i nie interesuje on nas aż tak bardzo. Niespecjalista zacznie jednak od razu spekulować: czy w ogóle możliwe jest, by dało się przeprowadzić nieskończenie wiele prostych równoległych, albo – co gorsza – żadnej? Przecież to nonsens!

Nie żaden nonsens, tylko inny model geometrii, niesprzeczny i całkiem prawdopodobny. Stanisław Lem napisał już dostatecznie wiele na temat życia w rozmaicie zakrzywionych przestrzeniach, że niczego nowego *ja* wymyślić nie mogę. Wspomnę tylko o wstędze Möbiusa – nieorientowalnej powierzchni zamkniętej, jednostronnej, na której nie mogłoby istnieć pojęcie lewo ani prawo, bo po obejściu całej powierzchni dookoła wrócilibyśmy wywróceni na lewą stronę (to znaczy na tą drugą stronę) – pomysł ten wykorzystał autor jednego z opowiadań w „Młodym Techniku". Po powrocie z długiej podróży międzygwiezdnej pilot wraca taki sam, tylko z antymaterii. Nic oczywiście nie czuje – no, bo jak? Nie może oczywiście lądować na Ziemi, bo zetknięcie materii z antymaterią powoduje anihilację obu i wyzwolenie się ogromnej energii; czyli po prostu wybuch. Sytuację ratuje matematyk, który znajduje jedyne chyba rozwiązanie – powtórną podróż naokoło świata (nie Ziemi, tylko właśnie Świata).

Wszedłem tu w obszar topologii, niegdyś sztandarowej specjalności polskiej matematyki. Na drugim roku studenci poznają klasyfikację *powierzchni zwartych* – każda nieorientowalna wygląda jak sfera, do której doklejono kilka rączek, wycięto jedną dziurę i zaklejono ją wstęgą Möbiusa. Wykonalne to jest w przestrzeni tylko czterowymiarowej, a więc całkiem niewielkiego wymiaru.

Lepszym przykładem, naprawdę oddającym świetnie zjawisko wielości rzeczywistości, jest ładnie nazywająca się *hipoteza continuum*. Sformułowana przez Georga Cantora około 1870 roku jest jednym z najprostszych matematycznych problemów nierozstrzygalnych.

Wszyscy wiemy, co to są liczby naturalne i że jest ich nieskończenie dużo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...,10000, ..., 859340330, ..., 211864146184629629565, ... – ten ciąg nie ma końca. Są także liczby, które nie są naturalne: takie jak $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{1+\sqrt[1997]{2001}}+\sqrt{\frac{1}{1+e^2}}$, gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, czyli jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, a w przybliżeniu

$$e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303\ldots$$

jak to dziarsko wyliczył mi mój domowy komputer w ułamku sekundy, mrugając jeszcze światełkami na czerwono i pomarańczowo.

Wszystkie liczby (te, o których uczymy się w szkole) to *liczby rzeczywiste*. Jest ich też nieskończenie wiele. Matematycy potrafią jednak wykazać, że ta nieskończoność jest większa niż ta, która jest udziałem ciągu liczbowego 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Wszystkich liczb rzeczywistych nie da się ustawić w ciąg! Nie jest to trudne twierdzenie matematyczne; przerabia się je w pierwszym semestrze studiów. Pierwszą z tych nieskończoności oznaczamy symbolem $\aleph_0$, drugą – gotycką literą $\mathfrak{c}$. Mamy więc

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

U progu XX wieku, w 1900 roku odbył się w Paryżu II kongres Międzynarodowej Unii Matematycznej. Wygłosił tam referat David Hilbert, niekwestionowany matematyk nr 1 owych czasów. Hilbert wyliczył 23 problemy matematyczne, które – jego zdaniem – będą wyzwaniem dla matematyków nadchodzącego dwudziestego stulecia. Niektóre z nich zostały rozwiązane już po kilku latach, niektóre po kilkudziesięciu, dwa bardzo ważne w ostatnich pięciu latach (a więc tuż przed dzwonkiem), a kilka przejdzie na dalsze stulecia. Jako nr 1 wymienił Hilbert hipotezę kontinuum:

Czy istnieje nieskończoność, oznaczmy ją chwilowo np. przez @, taka, że

$$\aleph_0 < @ < \mathfrak{c}$$

Hilbert zakończył swój referat słynnym teraz zdaniem: Wir müssen wissen, wir werden wissen. Wyrażało to więcej niż przekonanie, że zadania zostaną rozwiązane. Było skrótowym sformułowanie całego *programu Hilberta*: cała matematyka jest aksjomatyzowalna; nie może być w niej zdań, które *ex definitione* nie są możliwe do udowodnienia.

W 1939 roku, gdy Hilbert był już stary, matematyk austriacki Kurt Gödel wykazał (a w 1963 wynik uzupełnił Paul Cohen) coś, co trudno pojąć od razu. Mianowicie, że z hipotezą continuum to właśnie trochę tak, jak z zawartością pudełka, ofiarowanego Jasiowi przez wuja-kawalarza. Możemy otóż przyjąć sobie, że takiej nieskończoności nie ma, albo że ona jest. Świat się nie zawali – mogą istnieć dwie matematyki: jedna, w której hipoteza continuum jest prawdziwa, druga, że nie! Jedni lubią wyżej wspomnianą nieskończoność @ i wobec tego przyjmują sobie, że ona istnieje, inni mówią: no, nie, czegoś takiego to nie ma. Ani jedni, ani drudzy nie mogą swoich racji dowieść. Pozostaje wiara ...i gust.

No dobrze, zapyta Czytelnik, ale przecież jakoś to jest *naprawdę*. My tego nie wiemy, ale jakiś demon, zielony ludzik z Marsa, który wie wszystko, zna również odpowiedź i na to pytanie. A co na to dobry Pan Bóg?

Pogląd opiera się na przekonaniu, że z puzderkiem Jasia jest tak, jak z tym pudełkiem, które stoi na mojej półce i na które patrzę pisząc ten artykuł. Nie pamiętam, czy coś w nim jest, ale mogę je otworzyć i przekonać się, czy jest puste, czy nie. Z przestrzeniami matematycznymi jest inaczej. Są to raczej pudełka podobne do tego, jakie wuj Onufry podarował Jasiowi – istniało ono tylko w *wyimaginowanym* świecie, który autor *opisał* na kartkach powieści. A imputowanie Bogu takich czy innych poglądów jest zawsze ryzykowne i niepewne. Większość matematyków patrzy na hipotezę kontinuum i podobne problemy nierozstrzygalne tak: Pan Bóg nie dał żadnej wskazówki, jak wiele nieskończoności możemy oglądać naszym, ludzkim umysłem. Dał nam wolny wybór: wierzyć w @ czy nie.

Wydaje się, że wobec tego powinniśmy chlasnąć brzytwą Ockhama i wyciąć nieszczęsne @. Rzeczywiście, wiara czy niewiara w @ nie ma większego znaczenia dla matematyki, jako całości – przynajmniej na razie. Ale już co do *pewnika wyboru* – innego kontrowersyjnego sądu matematycznego – musimy się jasno zdeklarować: wierzymy w niego, czy nie?

Pewnik wyboru dotyczy reguł posługiwania się pojęciem zbioru. Zbiór jest bowiem jedynym *niedefiniowalnym* pojęciem matematycznym. Wszystkie inne rzeczy, rozpatrywane przez matematyków: liczby, równania, funkcje, figury, ... muszą mieć – i mają – jednoznaczne, precyzyjne określenie. To chyba jasne, że w takim ciągu definicji trzeba się na czymś oprzeć, coś musi być przyjęte bez określenia. Tym czymś jest właśnie pojęcie zbioru. Sto lat temu matematycy kłócili się o reguły używania tego pojęcia. Nie była to tylko sprawa ambicji, czyje będzie na wierzchu. Szło o rzecz o wiele ważniejszą. Odkryto tak wiele paradoksów i antynomii, że stało się jasne, że nie można powiedzieć po prostu: zbiór to zbiór, dowolne elementy można związać w pęczek i powstanie zbiór.

Niech więc będzie dany nieskończony zbiór niepustych zbiorów, nazwijmy je $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ Wybierzmy z każdego z nich po jednym elemencie, bez żadnej reguły, ot tak, na chybił-trafił: z pierwszego jakiś x_1, z drugiego jakiś x_2, z trzeciego jakiś x_3, ...i tak dalej i nazwijmy tak powstały zbiór przez ...

Stop! To jest właśnie pewnik wyboru! To, że możemy z nieskończonej kolekcji zbiorów wybrać po jednym elemencie i *utworzyć z nich nowy zbiór*. Skąd wiemy, że tak można?

I tej właśnie reguły tworzenia nowych zbiorów z już istniejących nie da się wyprowadzić z innych, powszechnie przyjętych i nie budzących wątpliwości reguł. Wielu z Państwa powie, że to przecież jasne i oczywiste, że można wybrać z każdego zbioru po jednym elemencie bez podawania reguły wyboru; ot tak, jakkolwiek. I rzeczywiście, matematycy nie mają na ogół zahamowań przed używaniem tej zasady. Bez niej matematyka byłaby uboższa, nie dało by się udowodnić wielu ogólnych twierdzeń, które porządkują nam nasz świat matematyczny. Skąd zatem wątpliwości? A stąd mianowicie, że przyjęcie zasady wyboru prowadzi do niektórych wniosków tak paradoksalnych, że wzdraga się przed nimi nasza intuicja. Na pierwszym miejscu wymienia się tu zawsze paradoks Banacha-Tarskiego: zwykłą kulę da się podzielić na taką skończoną liczbę części, by po ich odpowiednim przesunięciu otrzymać dwie takie same kule! Sam żałuję, że tych części nie da się jakoś efektywnie opisać – gdyby tak, na pewno umiałbym podzielić swoje konto w banku na takie części, że wyszłyby z tego dwa konta, każde z taką samą liczbą złotówek, jak wyjściowe. Ale tak to już jest z pewnikiem wyboru: można udowodnić istnienie czegoś tam, ale skonstruować niesposób. Obiekty powołane do życia w tak niekonstruktywny sposób mogą mieć – i często mają – nieoczekiwane, paradoksalne własności.

Nic chyba dziwnego, że część matematyków stoi na stanowisku, że wolno używać tylko metod konstruktywnych. Nie uznają oni w szczególności pewnika wyboru. Ich matematyka jest inna. Napisałem wyżej, że jest uboższa, ale to tylko znaczy, że ma mniej twierdzeń ogólnych.

11. Nowe (?) spojrzenie na teorię powieści

Teoretycy literatury próbują zrozumieć, czym w ogóle jest *fikcja* literacka. Próbują na przykład definiować i jakoś potem mierzyć stopień prawdopodobieństwa zdań w powieści, rozwijają teorie światów możliwych i wielości rzeczywistości. Próbowałem naświetlić to z matematycznego punktu widzenia. Ale – o tym też pisałem – nadmiar matematyki nie jest dobry:

> Logika, podobnie jak whiskey, traci swój dobroczynny wpływ na nas, gdy jest używana w zbyt dużych porcjach.
> (Edward Dunsany, pisarz irlandzki, 1878–1957)

Przematematyzowanie nauk społecznych, teorii literatury i wielu innych gałęzi nauk humanistycznych nie może im wyjść na dobre. Ale, jak Czytelnicy zauważyli, mówię o *przematematyzowaniu*, a nie o *niedomatematyzowaniu* (ojej, jakie ładne słowa!).

Zastosowanie pojęcia prawdopodobieństwa prawdziwości zdań w powieści i klasyfikacji tych zdań ze względu na owo prawdopodobieństwo wydaje mi się chybione. Zostaje za dużo pytań bez odpowiedzi, w rodzaju: jakie prawdopodobieństwo przypisać zdaniu *Wokulski stał przy pomniku Kopernika i karmił łabędzie*? Zero? A dlaczego? Bo nie ma łabędzi na Nowym Świecie? A Wokulski był? Teoria światów możliwych ma kłopoty z odpowiedzią na pytanie, co zrobić z ewidentnymi pomyłkami autora (rozwiązanie zadania o Pirxie brzmi $\cdot$ 111 w układzie dwójkowym to 7, $(1111)_2 = 15$, $(11111)_2 = 31$ i tak dalej).

Każda epoka ma własne porównania i analogie, którymi próbuje ogarnąć zmieniający się świat. Gdybym chciał Don Kichotowi opisać helikopter, powiedziałbym mu, że to taka karoca z położonym na jej dachu wiatrakiem i że jak skrzydła się obracają, to wiatrak ciągnie karocę do góry i to wszystko leci. To są żarty, ale kiedy Amerykanie lądowali na Księżycu w 1969 roku, pewna babinka spod Lublina rozumiała wszystko, tylko nie to, jak można się z nimi porozumieć na taką odległość. – Jak to jak, babciu? Przez telewizję! – powiedział reporter i wieśniaczka zrozumiała.

Teraz patrzymy na wszystko przed szybkę ekranu komputera. Na przykład pewna poważnie traktowana teoria snów porównuje naszą dzienną aktywność do pracy programu, włożonego w nasz skomplikowany biologiczny komputer – mózg. Program jest bardzo skomplikowany, wymagał milionów lat pracy nad nim. Jest więc samouczący się; koryguje własne błędy. Jeśli uderzę się we framugę zbyt niskich drzwi w pewnym domu, do programu zostanie dopisana odpowiednia procedura: uważaj w tym domu na niskie drzwi. Każdy informatyk wie, że program trzeba najpierw *skompilować*, a potem najlepiej przetestować, czyli puścić na sucho, czyli tak, żeby naprawdę nie zadziałał, tylko tak, jakby. Sterownik naszego programu musi więc nam wyłączyć świadomość, żebyśmy nie narobili głupstw. Czasami jednak następują głupie przebicia z testowanego programu do świadomości i dlatego wydaje nam się, że robimy takie głupstwa i wyczyniamy takie dziwactwa, jak każdemu się na pewno zdarzyło we śnie.

Piszę o tym dlatego, żeby zobrazować obecną tendencję opisu zjawisk. Algorytmizuje się właściwie wszystko. Spójrzmy zatem na literaturę z tego właśnie punktu widzenia.

Programy informatyczne zawierają, jawną lub ukrytą, deklarację zmiennych (x jest liczbą całkowitą), nadają im wartości początkowe:

> Dobrze, mój Tadeuszu, bo tak nazywano
>
> Młodzieńca, który nosił Kościuszkowskie miano
>
> (...)

w trakcie programu zmienne przyjmują rozmaite wartości ($x := x + 1$; coś drgnęło w duszy pana Andrzeja) i za pomocą tak prymitywnych narzędzi jak przypisywanie wartości zmiennych, instrukcje warunkowe (bez instrukcji if żadnego sensownego programu się nie da napisać) i pisanie pętli programowych możemy napisać właściwie każdy program: od rozwiązywania równań kwadratowych przez obliczanie liczb Fibonacciego, kontrolę jakości produkcji śrubek samochodowych do służącego do zabawy programu Lander oraz poważnego trenażera pilotów Lufthansy. Za kilka lat pojawią się programy „Szlakiem Bilbo Bagginsa" i na początku będą to dość głupie gry.

A zatem *powieść jest jak algorytm*, a nawet tylko *opis algorytmu*, do napisania programu, który będzie nam opowiadał (po konsultacjach ze specjalistami od grafiki komputerowej nawet: pokazywał na ekranie!), jak Wokulski przechadzał się pod kościołem Wizytek marząc o Izabeli, co przeżywał pilot Pirx w czasie samotnego patrolu po trylionach kilometrów sześciennych próżni, jak palił papierosa Piotr czekając na Łucję, jak modlił się Winicjusz i jak bardzo dolina Rivendell przypominała Czarną Jaworową. Od filmu różnić się będzie to tym, że będziemy mogli tę rzeczywistość do pewnego stopnia kształtować według naszej woli i gustu, tak jak budujemy miasto w znanej grze komputerowej SimCity. Książka daje opis algorytmu, my uściślamy go i przetwarzamy na program. Program działa ... a po kilku próbach osiągamy to, co naszym zdaniem autor *chciał* w książce powiedzieć. A jeśli nawet nie chciał, to może tylko dlatego, że żył w innych czasach. Don Kichot z La Manchy mógłby sobie wyobrazić pojedynczy helikopter, może i samolot, ale czy cały desant aliantów w Zatoce Perskiej, żeby miliony blaszanych wózków na kółkach mogły same jeździć. Starsi Czytelnicy mogą pamiętać, że na konkursie Chopinowskim w 1980 roku odpadł w półfinale Ivo Pogorelić, który muzykę Mistrza interpretował w *dwudziestowieczny* sposób. Tam ma być słychać te kibitki, wiozące zesłańców na Sybir – odezwała się w wywiadzie w 1995 roku pani Regina Smendzianka.

Dlaczego? Czy o wartości muzyki nie świadczy właśnie coś przeciwnego: że jest piękna i dla słuchacza, który słuchając romantycznego koncertu e-moll Chopina nie widzi wcale owych kibitek, tylko śnieg w Tatrach, zawilce w Zaborowie albo i choćby sałatkę z vin-de-Provence w małej tawernie gdzieś w Europie, która jednoczy się po to, żeby chronić swoje tysiącletnie wartości.

I to pisze matematyk??? – zapytają Czytelnicy. – A gdzież równania?.

Program komputerowy zawiera stałe i zmienne. Zmienne mogą przybierać rozmaite wartości, a niektóre działają tylko w obrębie podprogramów (zmienne lokalne). Gdyby informacja, że morderca miał żółty płaszcz okazała się dla detektywa z Baker Street istotną poszlaką, to zmienną *kolor_płaszcza* nazwałbym *globalną*, w przeciwnym razie *lokalną*.

Stałe w programach komputerowych są dane raz na zawsze (możemy zmienić program tak, jak A.M. mógł wcisnąć Replace i zmienić głównemu bohaterowi swego Poematu imię np. na Stefan; zręczny program sam znalazłby pasujące rymy i rytm). Stałych zmienić się nie da. „Lalka" musi się dziać w Warszawie, Sherlock Holmes musi mieszkać w Londynie, a „Na przełęczy" Stanisława Witkiewicza brzmiało by dziwacznie w alpejskich, nie tatrzańskich, realiach.

Tezą tej części eseju jest, że język informatyczny wydaje się bardziej odpowiedni do teorii literatury niż matematyczny, choć jeden i drugi wciąż jeszcze przyznają się do tych samych korzeni. Jak Czech dogada się ze Słowakiem bez dykcjonarza, tak i matematyk wciąż jeszcze zrozumie informatyka i *na abarot*. Może za 50 lat już tak nie będzie.

Wróćmy na przykład do dyskusji teorii, co zrobić z pomyłkami, albo ewidentnymi niedoróbkami popełnionymi przez autora powieści. W ujęciu informatycznym są one po prostu błędami albo lukami algorytmu. Matematyk odróżnia błąd dowodu od luki w rozumowaniu. Luka w dowodzie to to, co jest prawdziwe i może być wypełnione poprawnym rozumowaniem, niekoniecznie prostym i łatwym. *Błędy* też są dwóch rodzajów: poprawialne i nie. Jak w życiu.

Luki i błędy programu mogą dawać nieoczekiwane wyniki (np. $x = -1$, podczas, gdy każdy widzi, że x musi być dodatnie), albo powodować zawieszenie się programu, gdy np. chcemy dzielić przez zero. Nie należy dyskutować, czy Pirx mógł mieć siedem lat. Taki program by się zawiesił; prędzej czy później wyskoczyłaby sprzeczność. Matematycy mawiają: zmieńmy n na $n+1$ i wszystko będzie dobrze.

Teoria, że powieść jest opisem algorytmu, według którego Czytelnik pisze sobie własny program, bardzo się podoba autorowi tego szkicu. Może dla teoretyka literatury jest niepoważna? Poza tym zupełnie nie pasuje do poezji. Czym jest wobec tego poezja? *Sztuką ustawiania najprostszych słów*? (Tuwim), *Ty przychodzisz jak noc majowa*...? (Broniewski), czy jeszcze czymś innym?

12. Ostatni zajazd na Litwie

Mam oczywiście w swojej biblioteczce kilka wydań Pana Tadeusza. Jedno z nich zawiera bardzo obszerne przypisy Stanisława Pigonia. Nadają one historii ostatniego zajazdu na Litwie charakter książki matematycznej – z dużym zainteresowaniem przeczytałem te przypisy, które odnoszą się do wielości rzeczywistości. Poświęcę trochę uwagi jednemu. W niektórych wydaniach w wiadomym miejscu w księdze pierwszej jest

Konie porzucone same / szczypać trawę ciągnęły powoli pod bramę.

w innych zaś:

Konie porzucone same / szczypiąc trawę ciągnęły powoli pod bramę.

Co za różnica? A no taka, że pierwsza z tych wersji sugeruje, że na środku podwórka trawy nie było: no, bo konie szukały jej aż pod bramą. Najpewniej została wyjeżdżona przez liczne powozy, zajeżdżające codziennie do Soplicowa. Kto to przyjeżdżał? Wysłannicy cesarza Francuzów? Agenci rosyjscy? Wiadomo nie od dziś, że są oni nawet wśród swoich. Wersja druga zachowania się koni implikuje, że podwórko było zarośnięte trawą i Mickiewicz może dopiero w ostatniej chwili zrezygnował z wersetu: Niech na świecie wszędzie wojna, byle polska wieś zaciszna, byle polska wieś spokojna (zostawiając go wspaniałomyślnie Wyspiańskiemu) – bo przecież taki jest wydźwięk poematu (drugi aspekt został ściągnięty z powieści Stanisława Dygata „Pożegnania": odchodzi stary świat: trochę go żal, a trochę nie...). Gdyby to ubrać w równania, byłaby ciekawa matematyka!

Puśćmy znów wodze fantazji: może Adam Mickiewicz chciał napisać dwa poematy: w jednym rozwinąłby pomysł wywodzący się od *szczypiąc*, w drugim od *szczypać*. Może ktoś napisze kiedyś *dwa* programy ?

I tak właśnie rozumiana wielość rzeczywistości zbliża, wręcz utożsamia twórczość matematyczną z literacką. Nie siląc się na suchą naukową definicję, ujmę to jak następuje. Twórczość taka to powoływanie do życia nowych przestrzeni, nowych światów, po których możemy sobie wędrować i cieszyć się widokami *niedostępnymi dla tych leniuchów, którym nie chce się nawet trochę porachować.* Może tylko część poprzedniego zdania wydrukowana kursywą odróżnia matematykę od literatury?

Mapa Płaszczyzny,

Na Której Mieszkają Równania Kwadratowe

Parabola oddziela równania, które mają rozwiązania od tych, które ich nie mają. Po prawej stronie widzimy obszar złożony z równań, których obydwa pierwiastki są ujemne, po lewej – których obydwa pierwiastki są dodatnie. Pod osią poziomą są równania, których pierwiastki mają różne znaki. Kropki symbolizują równania o pierwiastkach całkowitych (ich dokładne rozmieszczenie jest pokazane w artykule). Styczna do paraboli parametryzuje równania o wspólnym pierwiastku.