O zliczaniu

Kilka zadań kombinatorycznych – Część II

Wojciech GUZICKI, Warszawa

Część pierwszą tego wykładu zakończyliśmy rozwiązaniem klasycznego zadania o zamienionych listach. Otrzymaliśmy tam wzór na liczbę D_n sposobów takiego zamieniania listów, by żaden z nich nie trafił do właściwej koperty. Wzór określający D_n za pomocą n możemy też otrzymać w inny sposób, korzystając z tzw. zasady włączeń i wyłączeń.

Zasada włączeń i wyłączeń mówi nam, ile elementów ma suma zbiorów skończonych. Najpierw zauważmy, że dla dowolnych dwóch zbiorów skończonych A i B prawdziwy jest wzór:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Z tego wzoru łatwo wyprowadzić podobny wzór dla trzech zbiorów A, B i C:

$$\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| = \\
&\quad = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = \\
&\quad = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = \\
&\quad = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = \\
&\quad = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

Mamy zatem:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Podobny wzór jest prawdziwy dla zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jest to tzw. zasada włączeń i wyłączeń. A oto sam wzór:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n,$$
gdzie
$$S_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}.$$

Zastosujmy teraz zasadę włączeń i wyłączeń do wyprowadzenia wzoru na liczby D_n. Musimy jednak najpierw uściślić zadanie. Pamiętamy, że listy i koperty zostały ponumerowane. Niech $\pi(i)$ oznacza numer koperty, do której trafił list o numerze i. Każdy sposób włożenia listów do kopert określa w ten sposób pewną funkcję π ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ w ten sam zbiór. Ponieważ różne listy trafiają do różnych kopert, więc funkcja π jest różnowartościowa; jest więc permutacją zbioru liczb od 1 do n. Interesują nas przy tym tylko takie permutacje π, które mają następującą własność:

$$\pi(i) \neq i \quad \text{dla wszystkich } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

O takich permutacjach mówimy, że nie mają punktów stałych. Liczba i, dla której $\pi(i) = i$, nazywa się bowiem punktem stałym permutacji π. Chcemy zatem wyznaczyć liczbę permutacji zbioru n-elementowego, które nie mają punktów stałych. Wiemy, że wszystkich permutacji jest $n!$. Wystarczy zatem znaleźć liczbę permutacji, które mają choć jeden punkt stały.

Oznaczmy przez A_i zbiór tych permutacji, dla których i jest punktem stałym:

$$A_i = \{\pi : \pi(i) = i\}.$$

Chcemy zatem znaleźć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Korzystamy z zasady włączeń i wyłączeń. Mamy wtedy:

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{\pi : \pi(i_1) = i_1 \wedge \pi(i_2) = i_2 \wedge \ldots \wedge \pi(i_k) = i_k\},$$

skąd od razu wynika, że $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Zatem

$$S_k = \binom{n}{k}(n-k)!.$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!.$$

Teraz odejmujemy otrzymaną liczbę od $n!$:

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! =$$

$$= n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)!.$$

To daje nam inną postać wzoru na D_n:

$$\boxed{D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)!.}$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru i wyciągnięciu $n!$ przed znak sumy otrzymamy znany wzór:

$$\boxed{D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.}$$

W podobny sposób zasada włączeń i wyłączeń pozwala wyznaczyć liczbę funkcji z jednego zbioru skończonego na drugi. Zajmiemy się więc teraz problemem zliczania funkcji. Będziemy zajmować się funkcjami

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Zajmiemy się najpierw wszystkimi takimi funkcjami. Każda wartość $f(i)$ funkcji f może być wybrana na m sposobów. Jest n takich wartości. Proste zastosowanie prawa iloczynu pokazuje, że istnieje m^n takich funkcji. Podobne rozumowanie pokazuje, że istnieje

$$m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

takich funkcji różnowartościowych. Wyznaczenie liczby funkcji „na" wymaga już zasady włączeń i wyłączeń.

Oznaczmy przez $Rg(f)$ zbiór wartości funkcji f. Następnie niech

$$A_i = \{f : i \notin Rg(f)\}.$$

Wtedy oczywiście $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{f : i_1, \ldots, i_k \notin Rg(f)\}$, czyli

$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{f : Rg(f) \subset \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}\}.$$

Zatem

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n$$

i proste zastosowanie zasady włączeń i wyłączeń daje

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (m-k)^n.$$

Po odjęciu obu stron ostatniej równości od m^n otrzymamy wzór wyrażający liczbę $s_{n,m}$ funkcji ze zbioru n-elementowego „na" zbiór m-elementowy:

$$\boxed{s_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (m-k)^n.}$$

Następnie zajmijmy się funkcjami rosnącymi. Zauważmy, że funkcja rosnąca jest jednoznacznie wyznaczona przez swój zbiór wartości. Liczba takich funkcji jest więc równa liczbie n-elementowych podzbiorów zbioru m-elementowego, czyli $\binom{m}{n}$.

Wreszcie wyznaczymy liczbę funkcji niemalejących. Niech więc f będzie funkcją niemalejącą. Definiujemy funkcję g wzorem

$$g(i) = f(i) + i - 1.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja g jest rosnąca oraz

$$g : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m+n-1\}$$

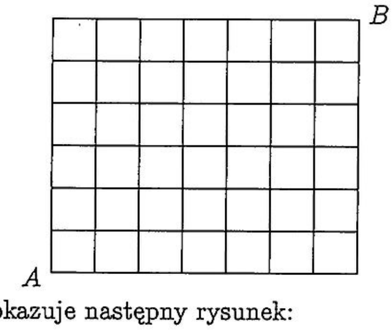
Odwrotnie, z każdej takiej funkcji rosnącej g możemy zrobić niemalejącą funkcję f kładąc

$$f(i) = g(i) - i + 1.$$

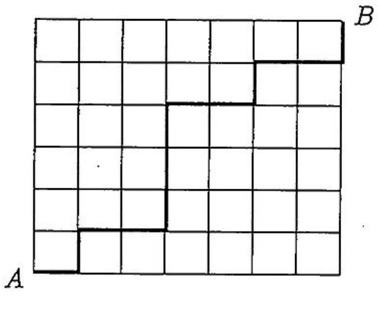
Zatem liczba funkcji niemalejących ze zbioru liczb od 1 do n w zbiór liczb od 1 do m wynosi

$$\binom{m+n-1}{n}.$$

Tę liczbę funkcji niemalejących można też wyznaczyć dzięki bardzo przydatnej ilustracji współczynników Newtona. Pokazuje ją następujące zadanie. Mamy sieć prostopadłych ulic. Chcemy obliczyć, na ile sposobów możemy dostać się z punktu A do punktu B pod warunkiem, że poruszamy się wyłącznie „w prawo" i „do góry". Poniższy rysunek pokazuje przykładową sieć takich ulic. Zauważamy, że sieć ta jest prostokątem podzielonym na wiele mniejszych kwadratów. Przyjmijmy za jednostkę długości bok takiego kwadratu. Nasza sieć ma zatem 7 jednostek długości w poziomie i 6 jednostek długości w pionie (prostokąt ma długość 7 jednostek i wysokość 6 jednostek).



Przykładową drogę pokazuje następny rysunek:



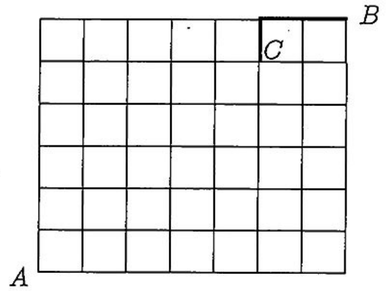
Każda taka droga składa się z pewnej liczby jednostkowych odcinków poziomych (w naszym przykładzie jest 7 takich odcinków) i pewnej liczby jednostkowych odcinków pionowych (na rysunku mamy 6 takich odcinków). Łatwo zauważyć, że każda dopuszczalna droga jest wyznaczona jednoznacznie przez podanie kolejności, w jakiej przechodzimy odcinki poziome i pionowe. Inaczej mówiąc, określamy drogę wskazując, które z 13 odcinków mają być poziome lub równoważnie, które mają być pionowe. Ogólnie, jeśli nasza sieć ma wymiary $n \times m$, tzn. ma n jednostek w poziomie i m jednostek w pionie, to drogę określamy podając, które z $n+m$ przebywanych odcinków mają być poziome. To oczywiście możemy zrobić na $\binom{n+m}{n}$ sposobów. Zatem mamy wzór:

$$\text{Liczba dróg z punktu } A \text{ do punktu } B = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

Ten sposób zliczania dróg pozwala łatwo udowodnić wiele wzorów dotyczących współczynników Newtona. Popatrzmy na następującą sytuację. Dana jest sieć ulic mająca n jednostek w poziomie i $m+1$ jednostek w pionie. Łącznie mamy zatem

$$\binom{n+m+1}{n}$$

dróg prowadzących z A do B. Wybierzmy jedną taką drogę. Popatrzmy na punkt C znajdujący się na przedostatniej (licząc od dołu) ulicy, z którego przechodzimy pionowo na ostatnią ulicę. Taki punkt C na tej drodze jest wyznaczony jednoznacznie przez te warunki. Oczywiście dla różnych dróg położenie punktu C będzie różne. Na rysunku mamy przykładowe położenie C wraz z zaznaczonym końcem drogi:



Jeśli punkt C leży na k-tej (licząc od lewej strony) ulicy, to z punktu A do punktu C prowadzi

$$\binom{k-1+m}{k-1}$$

dróg. Liczba k może się zmieniać od 1 (gdy punkt C leży na pierwszej ulicy) do $n+1$ (gdy punkt C leży na ostatniej ulicy). Porównując liczbę wszystkich dróg z punktu A do punktu B z liczbą dróg przechodzących przez wszystkie możliwe punkty C, otrzymujemy wzór

$$\binom{n+m+1}{n} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{k-1+m}{k-1},$$

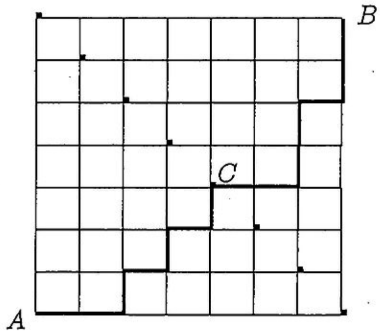
który po zmianie granic sumowania przybierze postać:

$$\binom{n+m+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+m}{k}.$$

Dla przykładu udowodnimy w ten sam sposób jeszcze jeden wzór, znany nam już z wcześniejszych rozważań:

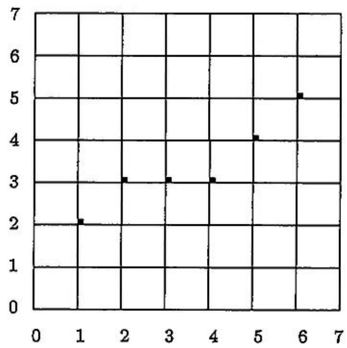
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

W tym celu rozważymy sieć kwadratową o boku długości n jednostek (na naszym rysunku będzie to 7 jednostek). Każda droga z punktu A do punktu B musi przechodzić przez pewien punkt C leżący na przekątnej kwadratu.



Zauważmy, że jeśli punkt C jest odległy od punktu A o k jednostek (licząc odległość wyłącznie w poziomie), to istnieje $\binom{n}{k}$ dróg z A do C. Wynika to stąd, że każdy punkt przekątnej jest przeciwległym do A wierzchołkiem prostokąta o wymiarach $k \times (n-k)$. Podobnie istnieje $\binom{n}{k}$ dróg z C do B. Każda droga z A do B przechodząca przez C powstaje z dwóch niezależnie wybieranych dróg: z A do C i z C do B. Zatem jest $\binom{n}{k}^2$ takich dróg. Wystarczy teraz zsumować te liczby ze względu na k, by otrzymać żądany wzór.

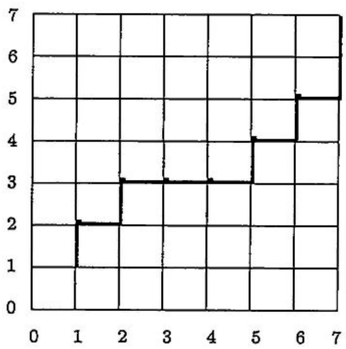
Powróćmy do problemu zliczania funkcji niemalejących. Funkcje niemalejące ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ w zbiór $\{1, 2, \ldots, m\}$ mogą być przedstawione na naszej sieci dróg:



W tym przykładzie mamy $n = 6$ oraz $m = 7$. Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje następujące wartości:

$$f(1) = 2, \; f(2) = f(3) = f(4) = 3, \; f(5) = 4, \; f(6) = 5.$$

Zauważamy, że pogrubione skrzyżowania ulic tworzą wykres tej funkcji. Ponieważ funkcja f jest niemalejąca, można wykreślić drogę, która przechodzi przez te skrzyżowania, które należą do wykresu. Popatrzmy na taką drogę:



Początkiem tej drogi jest punkt o współrzędnych $(1,1)$, końcem zaś punkt o współrzędnych $(7,7)$. Drogę tworzymy w ten sposób, że każdy punkt wykresu jest początkiem poziomego odcinka drogi i otrzymane w ten sposób odcinki poziome łączymy odcinkami pionowymi. Ostatnie odcinki pionowe dochodzą do punktu $(7,7)$. Zauważmy, że w ten sposób możemy reprezentować tylko funkcje niemalejące. Odcinki pionowe muszą przebiegać wyłącznie „do góry", czyli każda następna wartość funkcji musi być niemniejsza od poprzedniej.

Można zastanowić się, dlaczego dodajemy tę ostatnią pionową ulicę. Otóż w przeciwnym przypadku musielibyśmy kończyć drogę na tym poziomie, na którym narysowaliśmy ostatni odcinek poziomy. Otrzymane w ten sposób drogi kończyłyby się w różnych punktach i trudniej byłoby je zliczać. Musielibyśmy skorzystać z jakiegoś wzoru pozwalającego sumować współczynniki Newtona. Przyjęty sposób reprezentacji funkcji za pomocą dróg pozwala utożsamić każdą funkcję

$$f : \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,m\}$$

z drogą prowadzącą od punktu $(1,1)$ do punktu $(n+1,m)$. Stąd od razu wynika, że takich dróg jest $\binom{n+m-1}{n}$.

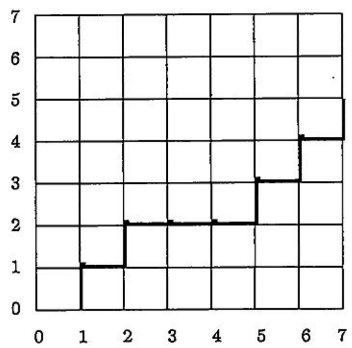
Zamiast zliczać funkcje

$$f : \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,m\}$$

możemy również zliczać funkcje

$$f : \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{0,1,\ldots,m-1\}.$$

Mianowicie każdej funkcji f o wartościach w zbiorze $\{1,2,\ldots,m\}$ odpowiada dokładnie jedna funkcja g o wartościach w zbiorze $\{0,1,\ldots,m-1\}$, określona wzorem $g(x) = f(x) - 1$. Również odwrotnie, każdej takiej funkcji g odpowiada dokładnie jedna funkcja f, określona wzorem $f(x) = g(x) + 1$. Przykładową drogę odpowiadającą takiej właśnie funkcji g przedstawia następny rysunek:



Rozwiążemy jeszcze jedno zadanie dotyczące zliczania funkcji. Policzymy mianowicie, ile jest funkcji niemalejących

$$f : \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,n\}$$

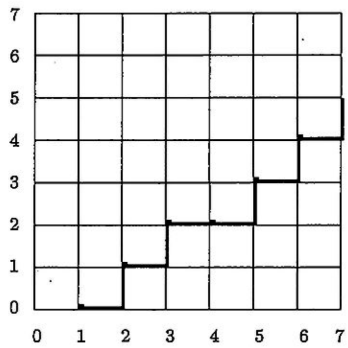
takich, że $f(x) \leq x$ dla każdego x. Zgodnie z tym, co zauważyliśmy wyżej, takich funkcji jest tyle samo co funkcji

$$f : \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{0,1,\ldots,n-1\}$$

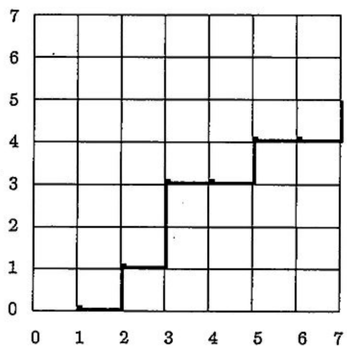
spełniających dla każdego x warunek $f(x) < x$. Takie funkcje możemy reprezentować za pomocą dróg przebiegających cały czas poniżej „przekątnej", tzn. zbioru skrzyżowań o współrzędnych postaci (i,i). Przykład takiej drogi, odpowiadającej funkcji

$$f : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5\},$$

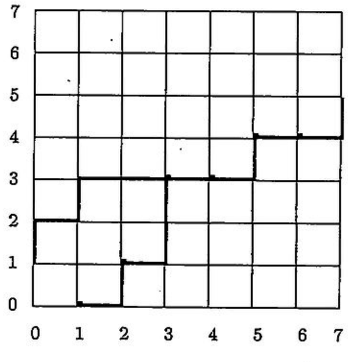
obejrzymy na rysunku:



Musimy więc zliczyć wszystkie drogi od punktu $(1,0)$ do punktu $(n+1, n-1)$ i przechodzące cały czas poniżej przekątnej. Zrobimy to tak, że od liczby wszystkich dróg odejmiemy liczbę tych dróg, które przechodzą przez któryś punkt przekątnej. Wszystkich dróg jest oczywiście $\binom{2n-1}{n}$. Każda taka droga składa się bowiem z n odcinków poziomych i $n-1$ odcinków pionowych. A ile będzie dróg, które przechodzą przez któreś skrzyżowanie leżące na przekątnej? Popatrzmy na taką drogę:



Ta droga składa się z dwóch części. Pierwsza część, to fragment od punktu $(1,0)$ do pierwszego punktu leżącego na przekątnej. Nie ma przy tym znaczenia, czy ten punkt odpowiada wartości funkcji (tak jak to jest na naszym rysunku), czy też jest to tylko skrzyżowanie na pionowej drodze łączącej poprzedni poziomy odcinek z następną wartością funkcji leżącą ponad przekątną. Druga część drogi to fragment od pierwszego punktu na przekątnej do końca drogi. Pierwszą część drogi odbijemy symetrycznie względem przekątnej. Ten odbity fragment, wraz z drugą częścią drogi, tworzy drogę od punktu $(0,1)$ do punktu $(n+1, n-1)$. Każdej drodze rozpoczynającej się w punkcie $(1,0)$ i przechodzącej przez przekątną odpowiada więc droga rozpoczynająca się w punkcie $(0,1)$. Nietrudno zauważyć, że i na odwrót: każda droga od punktu $(0,1)$ do punktu $(n+1, n-1)$ musi przejść przez któreś skrzyżowanie na przekątnej i zatem powstaje przez odbicie symetryczne z pewnej drogi poprowadzonej z punktu $(1,0)$ i przechodzącej przez przekątną. Popatrzmy na przykład takiego odbicia symetrycznego:



Zatem liczba dróg przechodzących przez przekątną wynosi $\binom{2n-1}{n+1}$. Każda taka droga składa się bowiem z $n+1$ odcinków poziomych i $n-2$ odcinków pionowych. A więc liczba dróg prowadzących z punktu $(1,0)$ do punktu $(n+1, n-1)$ i nie przechodzących przez przekątną wynosi

$$\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ostatnie zadanie kombinatoryczne, którym będziemy się zajmować, polega na zliczaniu podziałów zbioru na równe części. Przypuśćmy, że dany jest zbiór mn-elementowy. Chcemy wiedzieć, iloma sposobami możemy podzielić go na m zbiorów n-elementowych. Każdy taki podział możemy łatwo otrzymać z pewnej permutacji całego zbioru mn-elementowego. Mianowicie jako pierwszy zbiór podziału bierzemy zbiór składający się z elementów stojących na pierwszych n miejscach, jako drugi zbiór bierzemy zbiór elementów stojących na następnych n miejscach itd. Oczywiście ten sam podział otrzymamy z różnych permutacji całego zbioru.

Liczbę podziałów wyznaczymy dzieląc liczbę wszystkich permutacji przez liczbę permutacji dających ten sam podział zbioru. Wszystkich permutacji jest oczywiście $(mn)!$. Ten sam podział otrzymamy z permutacji różniących się porządkiem elementów w każdym bloku n-elementowym oraz różniących się porządkiem tych bloków. Każdy blok n-elementowy możemy uporządkować na $n!$ sposobów. Takich bloków jest m, więc łącznie mamy $(n!)^m$ sposobów uporządkowania elementów wewnątrz każdego bloku. Wreszcie mamy $m!$ sposobów uporządkowania tych m bloków. To ostatecznie daje liczbę $(n!)^m \cdot m!$ permutacji wyznaczających ten sam podział zbioru. A zatem liczba podziałów wynosi

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m \cdot m!}.$$

Otrzymujemy stąd ważny wniosek. Ponieważ liczba podziałów zbioru jest liczbą całkowitą, więc

$$\boxed{(n!)^m \cdot m! \mid (mn)!.}$$

Otrzymany wniosek pozwoli nam łatwo rozwiązać następujące zadanie teorioliczbowe (XLIII Olimpiada Matematyczna, zawody III stopnia, zadanie 6):

$$\boxed{(k!)^{k^2+k+1} \mid (k^3)!.}$$

Najpierw podstawimy $m = n = k$ i otrzymamy

$$(k!)^k \cdot k! \mid (k^2)!,$$

czyli

$$(k!)^{k+1} \mid (k^2)!.$$

Następnie podstawimy $m = k^2$ oraz $n = k$ i otrzymamy

$$(k!)^{k^2} \cdot (k^2)! \mid (k^3)!.$$

Łącząc ze sobą ostatnie dwie zależności łatwo otrzymamy

$$(k!)^{k^2} \cdot (k!)^{k+1} \mid (k^3)!,$$

czyli ostatecznie

$$(k!)^{k^2+k+1} \mid (k^3)!.$$