

# Twierdzenie Stokesa z osobliwościami

Maciej SKWARCZYŃSKI, Warszawa

## 1. Uwagi wstępne

Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego na prostej  $\mathbb{R}$  mówi, że dla każdej funkcji  $F \in C^1[a, b]$  całka z różniczki  $dF = F'(x)dx$  jest jednoznacznie określona przez wartości przyjmowane przez  $F$  na brzegu odcinka  $[a, b]$ . Mianowicie

$$(1) \quad \int_{[a,b]} dF = F(b) - F(a).$$

Przy przejściu do przestrzeni kartezjańskiej o większym wymiarze, np. do przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  (ważnej ze względów empirycznych) sytuacja staje się bardziej złożona. Pojawiają się całki objętościowe (po obszarze przestrzennym  $V$  ograniczonym powierzchnią  $\partial V$ ), całki powierzchniowe (po płacie powierzchniowym  $S$  ograniczonym linią  $\partial S$ ), całki krzywoliniowe (po segmencie linii wyznaczonym przez początek  $P$  i koniec  $Q$ ). Dla każdej z tych całek matematycy poszukiwali analogii z wzorem (1). Nietrywialne i ogólne rezultaty otrzymał M. Ostrogradski w r. 1831. Podał on wzór sprowadzający pewien typ całek objętościowych do całki powierzchniowej,

$$(2) \quad \int_V \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial V} f_1 dx_2 dx_3 - f_2 dx_1 dx_3 + f_3 dx_1 dx_2,$$

a także wzór sprowadzający pewien typ całek powierzchniowych do całki krzywoliniowej

$$(3) \quad \int_S \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 - \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_3 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial S} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3.$$

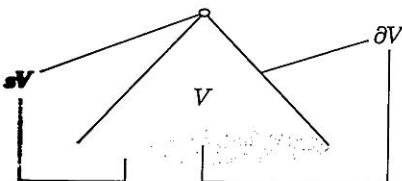
Uzupełnieniem wzorów (2) i (3) jest (raczej oczywisty) wzór sprowadzający krzywoliniową całkę z różniczki

$$dF := \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3$$

do różnicy wartości przyjmowanych przez  $F$  w punktach  $Q$  i  $P$

$$(4) \quad \int_L \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 = F(Q) - F(P).$$

Szczególne przypadki wzorów (2) i (3) można znaleźć w pracach Gaussa z lat 1813 i 1830. W dalszym ciągu (dla ustalenia terminologii) będziemy nazywać (2) wzorem Gaussa, a (3) wzorem Ostrogradskiego. W 1854 wzór (3) pojawił się jako zadanie na konkursowym egzaminie organizowanym corocznie przez G. Stokesa dla najlepszych studentów uniwersytetu Cambridge. Wszystkie te wyniki są szczególnymi przypadkami abstrakcyjnego twierdzenia znanego jako twierdzenie Stokesa. Twierdzenie to stosuje się w szczególności do gładkich podrozmaitości  $M \subset \mathbb{R}^k$  bez osobliwego brzegu  $sM$ . Niedawno S. Lang uogólnił twierdzenie Stokesa na podrozmaitości, których brzeg osobliwy jest „dostatecznie mały”. Otwarty stożek w  $\mathbb{R}^3$  (patrz rysunek) jest przykładem takiej podrozmaitości. Dowód twierdzenia Langa jest tematem obecnego wykładu.



## 2. Całka z formy różniczkowej

Wyrażenia podcałkowe we wzorach (2), (3), (4) są przykładami form różniczkowych. Nic dziwnego – współczesne pojęcie formy różniczkowej wyrosło ze studiowania klasycznych wzorów całkowych. Rezygnując z wnikania

Na priorytet M. Ostrogradskiego wskazuje m. inn. J. Maxwell w drugim wydaniu słynnego *Treatise on Electricity and Magnetism* (1881).

w techniczne szczegóły przedstawimy *pragmatyczne wprowadzenie* do teorii form różniczkowych.

**2.1. Rozmaitości różniczkowe.** *Rozmaitość różniczkowa  $n$ -wymiarowa* jest to przestrzeń topologiczna  $X$  lokalnie izomorficzna z przestrzenią kartezjańską  $\mathbb{R}^n$ . Lokalnie, tj. w otoczeniu współrzędnościowym  $U$ , położenie punktu  $p$  na rozmaitości  $X$  można (tak jak w  $\mathbb{R}^n$ ) opisać  $n$ -wyrazowym ciągiem liczb rzeczywistych  $x(p) = (x_1, \dots, x_n)$ . Mówimy że  $x(p)$  ( $p \in U$ ) jest lokalnym układem współrzędnych. Otoczeniu współrzędnościowemu  $U \subset X$  odpowiada wówczas otwarty zbiór  $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Jeśli  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest afinicznym automorfizmem, to  $Ax(p)$  ( $p \in U$ ) jest także lokalnym układem współrzędnych. Na ogół (inaczej niż w przypadku przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ ) przy rozpatrywaniu rozmaitości  $X$  nie można poprzestać na jednym otoczeniu współrzędnościowym i jednym lokalnym układzie współrzędnych. Mówimy, że rozmaitość  $X$  jest *gładka*, jeśli każda odpowiedniość między ciągami  $(u_1, \dots, u_n)$  i  $(v_1, \dots, v_n)$  opisującymi ten sam punkt w różnych lokalnych układach współrzędnych jest gładkim dyfeomorfizmem. Mówimy, że gładka rozmaitość  $X$  jest *zorientowana*, jeśli każdy tak otrzymany dyfeomorfizm ma dodatni jacobian.

**2.2. Pojęcie formy różniczkowej.** Dla nieujemnej liczby  $r \in \mathbb{Z}$  zbiór form różniczkowych stopnia  $r$  na rozmaitości  $X$  będziemy oznaczać symbolem  $A^r(X)$ . Podkreślamy, że równość dwu form zachodzi wtedy, gdy każdy punkt rozmaitości ma otoczenie współrzędnościowe, na którym obie formy są równe. Ten ostatni warunek można łatwo sprawdzić, bo na otoczeniu współrzędnościowym każda forma  $\eta \in A^r(X)$  ma następujące formalne przedstawienie określone jednoznacznie przez wybór współrzędnych lokalnych  $(x_1, \dots, x_n)$

$$(5) \quad \eta = \sum_{i_1 < \dots < i_r \leq n} h_{i_1, \dots, i_r} du_{i_1} \dots du_{i_r}.$$

**2.3. Całka z formy różniczkowej.** W dalszym ciągu zakładamy, że  $X$  jest gładką rozmaitością zorientowaną. W szczególnym przypadku, gdy  $r = \dim X = n$ , suma (5) sprowadza się do jednego składnika  $\eta = h dx_1 \dots dx_n$  o współczynniku  $h$ . Załóżmy, że  $\eta \geq 0$ , t.j. że współczynnik ten jest funkcją nieujemną (niezależnie od wyboru lokalnego układu współrzędnych). Jeśli figura  $F_0 \subset M$  zawiera się w otoczeniu współrzędnościowym  $U$  (z lokalnymi współrzędnymi  $(x_1, \dots, x_n)$ ), to przyjmujemy

$$(6) \quad \int_{F_0} \eta := \int_{x(F_0)} h(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Jeśli  $F$  jest sumą rozłącznych składników  $F_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) i całka po każdym składniku  $F_j$  jest określona wzorem (6), to przyjmujemy

$$(7) \quad \int_F \eta := \sum_{j=1}^l \int_{F_j} \eta.$$

Na koniec, jeśli  $E \subset M$  jest dowolną figurą mierzalną, to

$$(8) \quad \int_E \eta := \sup_{F \subset E} \int_F \eta,$$

gdzie całki po prawej stronie są obliczane zgodnie z wzorem (7). Dowodzi się, że całka (8), jako funkcja zbioru całkowania  $E$ , jest miarą nieujemną na  $\sigma$ -algebrze mierzalnych podzbiorów rozmaitości  $X$ ; miarę tę będziemy oznaczać także przez  $\eta$ . Jeśli warunek  $\eta \geq 0$  nie jest spełniony, to możemy rozpatrzyć związane z  $\eta$  formy  $\eta^+$ ,  $\eta^-$ ,  $|\eta|$  odpowiednio o współczynnikach  $h^+$ ,  $h^-$ ,  $|h|$  (związek ten ma miejsce przy każdym wyborze otoczenia współrzędnościowego i współrzędnych lokalnych.) Jeśli  $|\eta|(E) < \infty$ , to mówimy, że  $\eta$  jest całkowna na  $E$ ; przyjmujemy wówczas, że

$$(9) \quad \int_E \eta := |\eta^+|(E) - |\eta^-|(E).$$

### 3. Rachunek form różniczkowych

**3.1. Pierścień form różniczkowych.** Istnieje wyraźna analogia między wielomianami stopnia  $r$  a formami różniczkowymi stopnia  $r$ . Suma prosta

$$(10) \quad A(M) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r(M)$$

ma naturalną strukturę pierścienia. Jednakże mnożenie w  $A(M)$ , zwane mnożeniem zewnętrznym i oznaczane niekiedy symbolem  $\wedge$  (wedge product), jest na ogół nieprzemienne. W dalszym ciągu symbol  $\wedge$  będziemy pomijać, aby nie przeciążać oznaczeń. Jednomian  $h_{j_1}, \dots, h_{j_r} dx_{i_1} \dots dx_{i_r}$  jest iloczynem funkcji  $h_{j_1}, \dots, h_{j_r}$  (formy stopnia zero) i  $r$  form pierwszego stopnia  $dx_{i_1} \dots dx_{i_r}$ . Zmiana kolejności dwu jednorodnych form  $\alpha, \beta \in A(M)$  może spowodować co najwyżej zmianę znaku iloczynu zewnętrznego, zachodzi bowiem podstawowy wzór

$$(11) \quad \beta\alpha = (-1)^{(\text{st } \alpha)(\text{st } \beta)} \alpha\beta.$$

W szczególności mnożenie form stopnia pierwszego jest antyprzemienne.

**3.2. Operator różniczki zewnętrznej.** Rozpatrzmy podalgebrę  $A_k(M) \subset A(M)$  złożoną z form, których współczynniki (w każdym lokalnym układzie współrzędnych) są funkcjami klasy  $C^k$ ). Istnieje dokładnie jeden lokalny operator liniowy  $d: A_1(M) \rightarrow A_0(M)$  (tzw. operator różniczki zewnętrznej) o następujących własnościach:

(a) dla formy  $h$  stopnia zero (funkcji) zachodzi równość

$$(12) \quad dh = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} h \right) dx_i,$$

(b) dla formy stopnia  $r$  o przedstawieniu (3) zachodzi równość

$$d\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} dh_{i_1} \dots dx_{i_r}.$$

Z własności tych można wyprowadzić następującą przydatną tożsamość dla jednorodnych form  $\alpha, \beta \in A_1(M)$

$$(14) \quad d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^{\text{st } \alpha} \alpha(d\beta).$$

**3.3. Obraz wsteczny formy.** Rozpatrzmy gładkie rozmaitości  $Y, X$  oraz gładkie odwzorowanie  $\varphi: Y \rightarrow X$ . Istnieje dokładnie jeden homomorfizm pierścieni  $\varphi^*: A(X) \rightarrow A(Y)$  przemienny (na  $A_1(X)$ ) z operatorem różniczki zewnętrznej i taki, że  $\varphi^*f = f \circ \varphi$  dla każdej funkcji  $f \in A^0(X)$ . Mówimy że  $\varphi^*\omega$  jest *obrazem wstecznym* formy  $\omega$  przy odwzorowaniu  $\varphi$ . Składaniu odwzorowań gładkich odpowiada składanie odwzorowań indukowanych:  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ . Oczywiście  $(\text{id})^*\omega = \omega$ . Ostatnia równość pozwala łatwo dokonać zamiany zmiennych w lokalnym przedstawieniu formy różniczkowej. Możemy więc łatwo stwierdzić, czy dane przedstawienia lokalne w dwu różnych układach współrzędnych pochodzą od jednej i tej samej formy różniczkowej. Tym samym określenie formy różniczkowej (dla potrzeb obecnego tekstu) można uznać za kompletne.

### 4. Podrozumaitości w $\mathbb{R}^n$

**4.1. Definicja podrozumaitości.** Podzbiór  $M$  rozmaitości  $X$  nazywamy *podrozumaitością s-wymiarową*, jeśli można go pokryć otoczeniami współrzędnościowymi w  $X$  o następującej własności: w każdym otoczeniu  $U$  z rozpatrywanego pokrycia można wybrać lokalny układ współrzędnych  $x_1, \dots, x_n$ , taki że

$$(15) \quad U \cap M = \{p \in U; x(p) \in \mathbb{R}^s \times \{0\}^{n-s}\}.$$

Z powyższego określenia wynika, że podrozumaitość  $s$ -wymiarowa  $M \subset X$  ma naturalną strukturę rozmaitości  $s$ -wymiarowej. Przy tym zbiory (15) są otoczeniami współrzędnościowymi w  $M$ . Jako układ lokalnych współrzędnych w  $U \cap M$  można przyjąć  $x_1, \dots, x_n$ .

Zamiast dla  $x(p)$ , warunek (15) można sprawdzać dla  $Tx(p)$ , gdzie  $T$  jest automorfizmem afinicznym  $\mathbb{R}$ .

Nasze rozważania zilustrujemy przykładem. Niech  $X = \mathbb{R}^3$ . Skorzystamy ze współrzędnych sferycznych  $r, \varphi, \psi$  i z analogii geograficznej: niech  $M$  oznacza obszar na sferze  $r = 1$ , w którym szerokość geograficzna  $-\pi/4 < \psi < \pi/4$  spełnia warunek  $M$ . Wykażemy, że  $M$  jest dwuwymiarową podrozmaitością. W tym celu wystarczy rozpatrzyć pokrycie  $M$  dwoma otoczeniami współrzędnościowymi

$$(16) \quad U' = \{r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\pi/4 < \psi < \pi/4\},$$

$$(17) \quad U'' = \{r > 0, -\pi < \varphi < \pi, -\pi/4 < \psi < \pi/4\}.$$

Otoczenia te spełniają warunek (15), mianowicie

$$(18) \quad U' \cap M = \{p \in U'; (\psi(p), \varphi(p), r(p) - 1) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}\},$$

$$(19) \quad U'' \cap M = \{p \in U''; (\psi(p), \varphi(p), r(p) - 1) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}\}.$$

#### 4.2. Brzeg regularny $\partial M$ i brzeg osobliwy $sM$

Pojęć tych nie należy mylić z brzegiem topologicznym. *Brzeg regularny*  $\partial M$  podrozmaitości  $M$  składa się z tych punktów w  $\overline{M} \setminus M$ , dla których istnieje otoczenie współrzędnościowe  $U$  z lokalnymi współrzędnymi  $x_1, \dots, x_n$  spełniającymi warunek

$$(20) \quad U \cap M = \{p \in U; x(p) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{s-1} \times \{0\}^{n-s}\},$$

$$(21) \quad U \cap \overline{M} = \{p \in U; x(p) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{s-1} \times \{0\}^{n-s}\}.$$

Widać stąd, że

$$(22) \quad U \cap \partial M = \{p \in U; x(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{s-1} \times \{0\}^{n-s}\}.$$

Z (22) wynika, że brzeg regularny  $\partial M$  ma naturalną strukturę podrozmaitości o wymiarze  $s - 1$ . Otoczeniami współrzędnościowymi w  $\partial M$  są zbiory (22).

(Jako lokalne współrzędne w otoczeniu (22) można przyjąć  $x_2, \dots, x_s$ .)

Można sprawdzić, że jeśli  $M$  jest rozmaitością zorientowaną, to  $\partial M$  jest także rozmaitością zorientowaną. Mówimy, że orientacja brzegu regularnego  $\partial M$  jest *indukowana* przez orientację podrozmaitości  $M$ . Zilustrujemy te pojęcia na przykładzie dwuwymiarowej podrozmaitości  $M$  w  $\mathbb{R}^3$  rozpatrzonej w poprzednim punkcie. W przykładzie tym narost  $\overline{M} \setminus M$  jest sumą dwu okręgów

$C_+ := \{\psi = \pi/4\}$  i  $C_- := \{\psi = -\pi/4\}$ . Sprawdzimy, że  $\partial M = C_+ \cup C_-$ . W tym celu rozpatrzmy następujące otoczenia współrzędnościowe w  $\mathbb{R}^3$

$$(23) \quad U'_+ := \{p \in U'; \psi(p) > 0\}, \quad U''_+ := \{p \in U''; \psi(p) > 0\},$$

$$(24) \quad U'_- := \{p \in U'; \psi(p) < 0\}, \quad U''_- := \{p \in U''; \psi(p) < 0\}.$$

Sprawdzamy z łatwością, że

$$(25) \quad \begin{aligned} U'_+ \cap M &= \left\{p \in U'_+; \left(\frac{\pi}{4} - \psi, \varphi, r - 1\right) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \{0\}\right\}, \\ U''_+ \cap M &= \left\{p \in U''_+; \left(\frac{\pi}{4} - \psi, \varphi, r - 1\right) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \{0\}\right\}, \end{aligned}$$

a także

$$(26) \quad \begin{aligned} U'_- \cap M &= \left\{p \in U'_-; \left(\frac{\pi}{4} + \psi, \varphi, r - 1\right) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \{0\}\right\}, \\ U''_- \cap M &= \left\{p \in U''_-; \left(\frac{\pi}{4} + \psi, \varphi, r - 1\right) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \{0\}\right\}. \end{aligned}$$

Jest jasne, że każde z otoczeń (23), (24) spełnia (dla  $n = 3, s = 2$ ) warunki (21) i (22). Otoczenia te pokrywają  $\overline{M} \setminus M$ , więc tym bardziej pokrywają mniejszy zbiór  $\partial M$ . Ponieważ

$$(27) \quad \begin{aligned} U'_+ \cap \partial M &= \left\{p \in U'_+; \psi(p) = \frac{\pi}{4}, 0 < \varphi(p) < 2\pi, r(p) = 1\right\}, \\ U''_+ \cap \partial M &= \left\{p \in U''_+; \psi(p) = \frac{\pi}{4}, -\pi < \varphi(p) < \pi, r(p) = 1\right\}, \\ U'_- \cap \partial M &= \left\{p \in U'_-; \psi(p) = -\frac{\pi}{4}, 0 < \varphi(p) < 2\pi, r(p) = 1\right\}, \\ U''_- \cap \partial M &= \left\{p \in U''_-; \psi(p) = -\frac{\pi}{4}, -\pi < \varphi(p) < \pi, r(p) = 1\right\}, \end{aligned}$$

więc w rozpatrywanym przykładzie  $M = C_+ \cup C_- = \overline{M} \setminus M$ .

*Brzeg osobliwy*  $sM$  podrozmaitości  $M$  definiujemy jako (na ogół niepuste) dopełnienie brzegu regularnego  $M$  do narostu  $\overline{M} \setminus M$ . Można wykazać, że  $sM$  jest zbiorem domkniętym.

**4.3. Twierdzenie Stokesa.** Dowód abstrakcyjnego twierdzenia Stokesa (por. R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, North-Holland, Amsterdam 1968) wykorzystuje gładki rozkład jedyńki i twierdzenie Fubinięgo. Następujący wariant odnosi się do rozpatrywanej przez nas sytuacji

Twierdzenie 1. Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  będzie gładką zorientowaną  $s$ -wymiarową podrozmaitością ( $1 \leq s \leq n$ ). Załóżmy, że forma  $\omega \in A^{s-1}(\mathbb{R}^n)$  ma zwarty nośnik, rozłączny z brzegiem osobliwym  $sM$ . Zachodzi wówczas wzór

$$(28) \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Zapis powyższy jest nieco uproszczony. Forma całkowana po lewej stronie (28) jest w istocie obrazem wstecznym formy  $d\omega$  przy odwzorowaniu tożsamościowym  $j: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Analogicznie forma całkowana po prawej stronie (28) jest obrazem wstecznym formy  $\omega$  przy odwzorowaniu tożsamościowym  $j: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## 5. Twierdzenie całkowe S. Langa

**5.1. Zbiory zaniedbywalne.** Jak pokazał S. Lang, założenie  $\text{supp } \omega \cap sM = \emptyset$ , występujące w twierdzeniu 1, można osłabić wprowadzając pojęcie zbioru zaniedbywalnego. Zwarty zbiór  $K \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy *zaniedbywalnym* (względem  $M$ ), jeśli istnieje baza otoczeń  $W_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) dla zbioru  $K$  oraz funkcje  $g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq g_k \leq 1$ , takie że

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \notin W_k, \\ 0 & \text{dla } x \text{ bliskich } K, \end{cases}$$

a ponadto dla każdej formy  $\omega \in A_1^{s-1}(K)$  i dla  $k \rightarrow \infty$

$$(30) \quad |(dg_k)\omega|(M \cap W_k) \rightarrow 0.$$

Uwaga. Łatwo sprawdza się, że suma  $K$  zaniedbywalnych zbiorów  $K'$  i  $K''$  jest zbiorem zaniedbywalnym. Rzeczywiście, niech  $W'_k, g'_k$  będą dobrane do  $K'$ , a  $W''_k, g''_k$  do  $K''$ . Wystarczy przyjąć  $W_k = W'_k \cup W''_k$  oraz  $g_k := g'_k \cdot g''_k$ . Warunek (30) wynika wówczas z równości

$$(31) \quad (dg_k)\omega = (dg'_k)(g''_k\omega) + (dg''_k)(g'_k\omega).$$

**5.2. Twierdzenie Langa.** Niech  $M$  będzie gładką, zorientowaną  $s$ -wymiarową podrozmaitością w  $\mathbb{R}^n$  ( $1 \leq s \leq n$ ). Rozpatrzmy formę  $\omega \in A^{s-1}(\mathbb{R}^n)$  o zwartym nośniku, taką że

$$1^\circ |\omega|(\partial M) < +\infty,$$

$$2^\circ |d\omega|(M) < +\infty,$$

$$3^\circ sM \cap \text{supp } \omega \text{ jest zaniedbywalny.}$$

Z założeń tych wynika, że

$$(32) \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dowód. Idea jest prosta: do formy  $g_k\omega$  można zastosować twierdzenie 1, następnie należy przejść do granicy w otrzymanym wzorze. Stwierdzamy, że

$$(33) \quad \int_{\partial M} g_k\omega = \int_M (dg_k)\omega + \int_M g_k(d\omega).$$

Pierwszy składnik po prawej stronie dąży do zera zgodnie z określeniem ciągu  $g_k$ . W pozostałych całkach można przejść do granicy na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej. W rezultacie otrzymujemy równość (32), Q.E.D.

**5.3. Kryterium zaniedbywalności.** Właściwe znaczenie twierdzenia Langa jest nieodłączne od kryteriów zaniedbywalności. Ograniczymy się do przedstawienia kryterium podanego przez Langa w przypadku  $s = n$ . Będziemy korzystać z lematu, który stwierdza (mówiąc obrazowo), że gładkie wyjście z dołka nie musi być szczególnie strome.

**Lemat Langa.** Rozpatrzmy zwarty podzbiór  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Rozpatrując  $\mathbb{R}^n$  z normą  $|x| := \max |x_i|$  przyjmujemy  $W_k := \{d(x, K) < 1/k\}$ . Dla  $k = 1, 2, \dots$  istnieje wówczas gładka funkcja  $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , równa 1 poza  $W_k$ , równa 0 w otoczeniu zbioru  $K$  i taka, że

$$(34) \quad |D_j g_k|_{\mathbb{R}^n} \leq Ck$$

(stała  $C$  zależy tylko od  $n$ ).

Dowód przedstawimy w następnym punkcie. Obecnie sformułujemy

**Kryterium Langa.** Niech  $\sigma : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^1$  określonym w jednostkowej kostce  $Q = [0, 1]^m$ , gdzie  $m \leq n - 2$ . Wówczas  $\sigma(Q)$  jest zbiorem zaniedbywalnym względem każdej otwartej podrozmaitości  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Dowód. Bez straty ogólności można przyjąć, że  $Q = [0, 1]^{n-2}$  (tę ostatnią kostkę można rzutować na kostkę  $[0, 1]^m$ ). Dzieliąc krawędź kostki  $Q$  na  $k$  równych części otrzymujemy  $k^{n-2}$  mniejszych kostek. Obraz każdej z tych kostek zawiera się w  $n$ -wymiarowej kostce o krawędzi  $c/k$  i mierze  $(c/k)^n$  (konsekwencja twierdzenia o wartości średniej). Łączna miara tych obrazów jest nie większa niż

$$(35) \quad k^{n-2} \cdot \left(\frac{c}{k}\right)^n = \frac{c^n}{k^2}.$$

Każdy punkt zbioru  $W_k := \{d(x, \sigma(Q)) < 1/k\}$  jest odległy od jednego z tych obrazów o mniej niż  $1/k$ , zatem

$$(36) \quad m(W_k) \leq k^{n-2} \left(\frac{c+2}{k}\right)^n = \frac{(c+2)^n}{k^2}.$$

Niech  $g_k$  będzie ciągiem funkcji dobranych do ciągu  $W_k$  zbiorów zgodnie z lematem Langa. Z (34) wynika, że każdy z  $n$  współczynników formy  $(dg_k)\omega$  jest ograniczony przez  $k\hat{c}$ , gdzie  $\hat{c}$  zależy tylko od  $n$ . Stąd i z (36) wynika, że

$$(37) \quad |(dg_k)\omega|(W_k) \leq \frac{\text{const}}{k} \rightarrow 0.$$

To zaś implikuje natychmiast (30). Tak więc zbiór  $\sigma(Q)$  jest zaniedbywalny, Q.E.D.

## 6. Dowód lematu Langa

Dowód ten jest interesujący niezależnie od zastosowań do wzorów całkowych. W istocie mamy tu do czynienia z bardzo elegancką konstrukcją analityczną.

**6.1. Konstrukcja funkcji  $g_k$ .** Wychodzimy od dowolnej funkcji  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  o wartościach w  $[0, 1]$ , takiej że

$$(38) \quad \begin{aligned} \phi(x) &= 0 \text{ gdy } |x| \leq 1/2, \\ \phi(x) &= 1 \text{ gdy } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

i przyjmujemy  $\phi_k(x) := \phi(kx)$ . Wówczas

$$(39) \quad |D_j \phi_k|_{\mathbb{R}^n} \leq k |D_j \phi|_{\mathbb{R}^n} \leq ck,$$

gdzie  $c$  jest stałą zależną tylko od  $n$ .

Niech  $L \subset \mathbb{R}^n$  będzie kratą punktów całkowitych. Rozpatrzmy „gęstsza” kratę  $L/2k$  i, dla każdego  $l \in L$ , przesuniętą funkcję  $\phi_k$

$$(40) \quad x \rightarrow \phi_k \left( x - \frac{l}{2k} \right).$$

Funkcję  $g_k$  określamy za pomocą iloczynu skończonego

$$(41) \quad g_k(x) := \prod_{d(\frac{1}{2k}, K) < \frac{1}{k}} \phi_k \left( x - \frac{l}{2k} \right).$$

## 6.2 Własności funkcji $g_k$

(a) Znikanie w otoczeniu zbioru  $K$ , mianowicie, dla  $x$  spełniających warunek  $d(x, K) < \frac{1}{4k}$ .

W siatce  $L$  można znaleźć węzeł odległy od  $x$  co najwyżej o 1, np.

$(E(x_1), \dots, E(x_n))$ , więc w siatce  $\frac{L}{2k}$  można znaleźć węzeł  $\frac{l}{2k}$  odległy od  $x$  co

najwyżej o  $\frac{1}{2k}$

$$(42) \quad d\left(\frac{l}{2k}, x\right) \leq \frac{1}{2k}.$$

Węzeł ten jest odległy od  $K$  o mniej niż  $\frac{1}{K}$ . W istocie

$$(43) \quad d\left(\frac{l}{2k}, K\right) \leq d\left(\frac{l}{2k}, x\right) + d(x, K) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} < \frac{1}{k}$$

W konsekwencji w iloczynie definiującym  $g_k(x)$  występuje czynnik

$$(44) \quad \phi_k\left(x - \frac{l}{2k}\right) = \phi\left(k\left(x - \frac{l}{2k}\right)\right).$$

Z określenia  $\phi$  i z (42) wynika, że czynnik ten jest równy zero. W istocie

$$(45) \quad \left|k\left(x - \frac{l}{2k}\right)\right| = kd\left(x, \frac{l}{2k}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Zatem  $g_k(x)$ .

(b) Równość  $g_k(x) = 1$  dla  $x \notin W_k$ .

Rozpatrujemy punkt  $x$ , taki że

$$(46) \quad d(x, K) \geq \frac{2}{k}.$$

Zauważmy, że jeśli czynnik

$$\phi_k\left(x - \frac{l}{2k}\right) = \phi\left(k\left(x - \frac{l}{2k}\right)\right)$$

występuje w iloczynie definiującym  $g_k(x)$ , to

$$(48) \quad d\left(x, \frac{l}{2k}\right) \geq \frac{1}{k}.$$

Rzeczywiście, w przeciwnym przypadku byłoby

$$(49) \quad d(x, K) \leq d\left(x, \frac{l}{2k}\right) + d\left(\frac{l}{2k}, K\right) < \frac{1}{k} + d\left(\frac{l}{2k}, K\right) \leq \frac{2}{k},$$

wbrew założeniu (46). Z (48) wynika, że czynnik (47) jest równy 1. Rzeczywiście

$$(50) \quad \left|k\left(x - \frac{l}{2k}\right)\right| = kd\left(x, \frac{l}{2k}\right) \geq 1.$$

Zatem  $g_k(x) = 1$ .

(c) Oszacowanie  $|D_j g_k|_{\mathbb{R}^n} \leq Ck$ .

Oszacujemy  $D_j g_k$  w punkcie  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy istnieje  $l_0 \in L$ , takie że  $d(x^0, \frac{l_0}{2k}) \leq \frac{1}{k}$ . Rzeczywiście, w przeciwnym przypadku nierówność

$$(51) \quad \left|k\left(x^0 - \frac{l}{2k}\right)\right| = kd\left(x^0, \frac{l}{2k}\right) > 1$$

zachodzi dla każdego  $l \in L$ . W konsekwencji  $\phi_k(x - \frac{l}{2k}) = 1$  w otoczeniu punktu  $x^0$ , a więc  $(D_j g_k)(x^0) = 0$ .

Widać teraz, że w iloczynie definiującym  $g_k(x)$  wystarczy rozpatrzyć czynniki odpowiadające indeksom  $l$ , dla których  $d(x^0, \frac{l}{2k}) < \frac{1}{k}$  (pozostałe czynniki są równe 1 w otoczeniu punktu  $x^0$ ). Takich indeksów  $l$  jest skończenie wiele. Rzeczywiście, z nierówności

$$(52) \quad \left|x^0 - \frac{l}{2k}\right| \leq \frac{1}{k}, \quad \left|x^0 - \frac{l}{2k}\right| \leq \frac{1}{k}$$

wynika, że  $|l - l_0| \leq 4$ . (Takich  $l$  jest co najwyżej  $9^n$ .)

Obliczając pochodną  $D_j g_k$  w punkcie  $x^0$  otrzymujemy sumę co najwyżej  $9^n$  składników, z których każdy, zgodnie z (39), szacuje się przez  $ck$  (stała  $c$  zależy tylko od  $n$ ). Wynika stąd nierówność (34) ze stałą  $C := 9^n c$ .