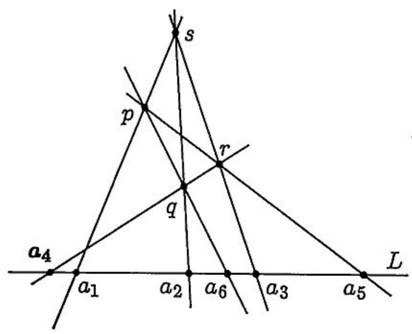
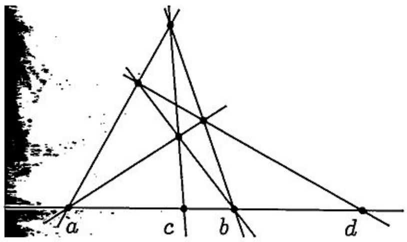
Czworokątowa szóstka punktów

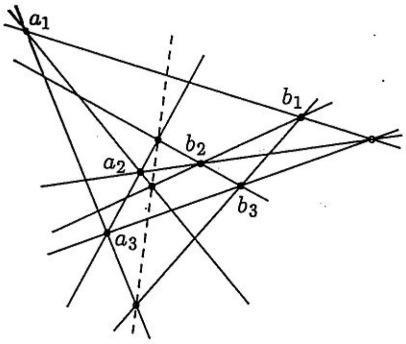
Marek KORDOS, Warszawa



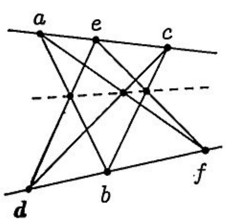
Czworokątowa szóstka punktów.



Czwórka harmoniczna.



Twierdzenie Desarguesa orzeka, że **proste** łączące odpowiednie wierzchołki **dwóch** trójkątów przecinają się w jednym **punkcie** (tzw. *środek perspektywiczny*) **wtedy** i tylko wtedy, gdy proste **zawierające** odpowiednie boki tych **trójkątów** przecinają się na jednej prostej (tzw. *oś perspektywiczna*).



Twierdzenie Pappusa–Pascala **orzeka**, że przeciwległe (1-4, 2-5, 3-6) **boki** sześciokąta mającego wierzchołki **leżące** na przemian na dwóch prostych **przecinają** się na pewnej prostej.

Jest ono równoważne Podstawowemu **Twierdzeniu** Geometrii Rzutowej, które **orzeka**, że przekształcenie rzutowe prostej **na** prostą jest jednoznacznie wyznaczone **przez** swoje wartości w trzech punktach.

Julius Plücker około 1830 roku wykazał, że pojęcie *stosunku anharmonicznego* (jak figlarnie chcą niektórzy: *dwustosunku*) wystarczy do opisu geometrii rzutowej. Około roku 1900 Gaston Darboux wykazał, że wystarczy użyć jedynie czwórki harmonicznej. To bardzo mocne wyniki. Kiedy jednak około 1910 roku Oscar Veblen i John Wesley Young pisali fundamentalną monografię geometrii rzutowej, stwierdzili, że pojęcia te są mało nadające się do sprawnego aksjomatycznego wykładu geometrii rzutowej. Zaproponowali oni nowy niezmiennik wystarczający do opisu geometrii rzutowej. I to nietrywialny – jest to bowiem relacja sześcioargumentowa.

Czworokątowa szóstka punktów, bo tak nazywa się ten niezmiennik (w skrócie będę pisał CSP), ma definicję bardzo, na pozór, luźną.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix},$$

bo tak zapisujemy fakt, że punkty $a_1, \ldots, a_6$ tworzą CSP, ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta L, na której te wszystkie punkty leżą oraz taki czworokąt $pqrs$, że kolejne punkty leżą, odpowiednio, na prostych ps, qs, rs, qr, pr i pq; żaden z wierzchołków czworokąta nie może przy tym leżeć na L.

A oto ciekawsze własności tej relacji.

ZWROTNOŚĆ. Punkty leżące w różnych wierszach muszą być różne (łatwo sprawdzić, że przeciwna sytuacja wymusza, by jeden z wierzchołków czworokąta leżał na L). Do pewnego stopnia egzotyczna jest sytuacja, gdy w CSP są tylko trzy punkty – takie sytuacje bywają tylko w przestrzeniach rzutowych nad ciałami o charakterystyce 2. Gdy w CSP są cztery punkty, zawsze są one czwórką harmoniczną (co daje kreskową i też luźną definicję takiej czwórki).

SYMETRIA. Permutując pierwsze trzy wierzchołki czworokąta $pqrs$ stwierdzamy, że w CSP możliwa jest dowolna permutacja wierszy. Rozpatrzenie czworokąta $qpsr$ wskazuje, że można zmienić porządek równocześnie w pierwszym i drugim wierszu, a więc w dowolnej parze wierszy. Nietrywialny jest fakt, że możliwość zmiany porządku w jednym tylko wierszu jest równoważna twierdzeniu Pappusa–Pascala.

CSP JAKO FUNKCJA. Fakt, że CSP jest funkcją dowolnych pięciu swoich argumentów (dziedzina nie może być w sprzeczności jedynie z wyżej podanymi warunkami zwrotności) jest równoważny twierdzeniu Desarguesa. Dokładniej: istnienie punktu dopełniającego odpowiednią piątkę do CSP to trywialne spostrzeżenie (tym bardziej, że wystarczy – wobec symetrii – wykazać istnienie tylko np. szóstego punktu); to, co jest nietrywialne, to jedyność owego dopełniającego – tu przeciw nam pracuje prawie kompletna dowolność realizującego CSP czworokąta.

NIEZMIENNICZOŚĆ CSP. Obraz rzutowy CSP jest CSP. W tej kwestii etapem pośrednim jest niezmiernie eleganckie Twierdzenie Veblena–Younga, które (również dla jego dowodu) przytoczę dalej.

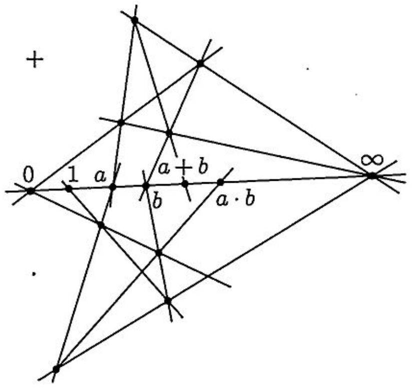
PRZECHODNIOŚĆ CSP. Tu, wobec liczby argumentów, jest tyle możliwości, że sprawa jest prawie kompletnie otwarta. W tym, co wiadomo, warto zwrócić uwagę na trzy przechodniości (dwie z nich mają wspólny dowód !):

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_2 \\ b_2 & a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_3 & a_4 \\ b_2 & a_5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_2 & a_4 \\ b_2 & a_6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_6 \\ b_2 & a_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_2 \\ b_2 & a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_4 \\ b_2 & a_5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_6 \\ b_2 & a_7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_3 & b_3 \\ a_2 & a_4 \\ b_1 & a_6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_3 & b_3 \\ a_3 & a_5 \\ b_1 & a_7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_2 \\ b_2 & a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_4 \\ b_2 & a_5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_6 \\ b_2 & a_7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 & b_1 \\ a_2 & a_4 \\ b_3 & a_6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & b_1 \\ a_3 & a_5 \\ b_3 & a_7 \end{pmatrix}.$$

Niezrozumiałą treść tych przechodniości wyjaśni, nieco niżej, opis algebraicznych własności CSP.



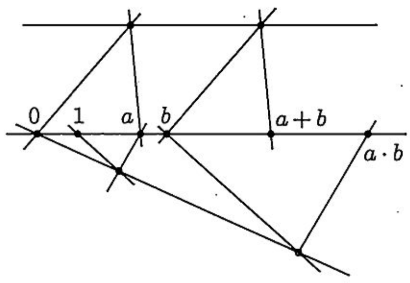
Działania w ciele liczbowym; czworokąty nie zostały oznaczone, bo są dowolne.

CIAŁO LICZBOWE. Jak wiadomo prosta rzutowa jest homeomorficzna z okręgiem. Rozcinając w wybranym punkcie zwanym zazwyczaj ∞ i spośród pozostałych punktów wybierając 0 i 1 możemy uczynić z niej ciało liczbowe. Działania, odpowiadające w przypadku przestrzeni rzutowej na $\mathbf{R}$ „zwykłym" działaniom arytmetycznym, dane są geometrycznie jako:

$$a + b = c \leftrightarrow (a = 0 \wedge b = c) \vee (b = 0 \wedge a = c) \vee \begin{pmatrix} \infty & \infty \\ a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$a \cdot b = c \leftrightarrow (a = c = 0) \vee (b = c = 0) \vee$$

$$\vee (a = 1 \wedge b = c) \vee (b = 1 \wedge a = c) \vee \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}.$$



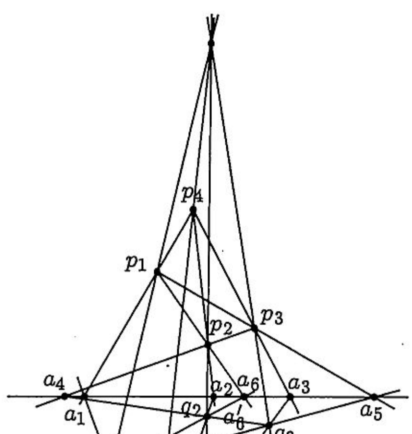
To samo z ∞ narysowanym w nieskończoności.

Wobec faktu, iż w definicjach występuje jedynie $=$ i CSP – wszystkie tak zbudowane ciała są izomorficzne. Sprawdzenie zaś, że struktura złożona z prostej bez punktu i tak na niej określonych działań jest ciałem sprowadza się do mechanicznego zastosowania wyżej przytoczonych własności CSP; w szczególności pierwsza z przechodniości daje, jak łatwo zauważyć, łączność obu działań (dla $+$ podstawiamy $b_1 = b_3 = \infty$, $b_2 = 0$, dla $\cdot$ podstawiamy $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = \infty$), dwie pozostałe to prawostronna i lewostronna rozdzielność (o ile nie ma twierdzenia Pappusa–Pascala, równoważnego tu – patrz wyżej – przemienności).

Podstawowy wdzięk opisanej sytuacji tkwi w tym, że na drodze do tych wszystkich konstatacji (poza pierwszą uwagą o aksjomacie Pappusa–Pascala) są jedynie cztery i to bardzo eleganckie dowody, które przytoczę niżej.

Tymczasem, na zakończenie listy, kolejna mocna własność CSP – ZWIĄZEK Z INWOLUCJAMI RZUTOWYMI. Dla każdej inwolucji rzutowej prostej na nią samą dowolne trzy rozłączne pary punkt-obraz tworzą CSP. Pozwala to na szybkie dowody wielu twierdzeń o przekształceniach rzutowych. Tego akurat Veblen i Young nie wiedzieli. Fakt ten wymaga zastosowania Podstawowego Twierdzenia Geometrii Rzutowej, czyli twierdzenia Pappusa–Pascala i też nie będę tego faktu tu dowodził.

A teraz kolejno zapowiedziane cztery dowody.



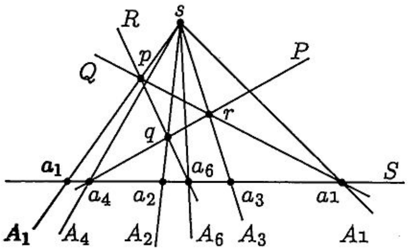
Dowód jedyności szóstego punktu w CSP.

JEDYNOŚĆ SZÓSTEGO PUNKTU W CSP, czyli

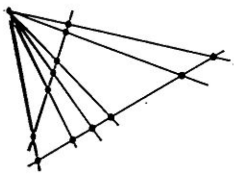
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6' \end{pmatrix} \rightarrow a_6 = a_6'.$$

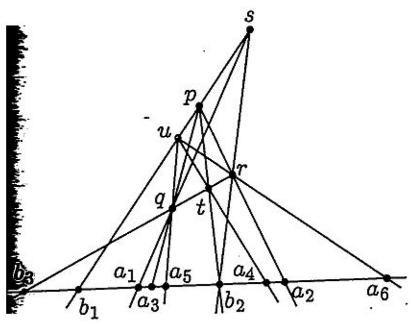
Niech pierwszą CSP realizuje na prostej L czworokąt $p_1p_2p_3p_4$, a drugą czworokąt $q_1q_2q_3q_4$. Będziemy trzykrotnie stosowali twierdzenie Desarguesa. Trójkąty $p_3p_1p_4$ oraz $q_3q_1q_4$ mają z założenia oś perspektywiczną (odpowiednie ich boki przecinają się w punktach a_5, a_1, a_3), podobnie trójkąty $p_3p_2p_4$ oraz $q_3q_2q_4$ (punkty a_4, a_2, a_3). Obie pary mają więc środek perspektywiczny (w pierwszym przypadku jest to wspólny punkt prostych p_3q_3, p_1q_1 i p_4q_4, w drugim p_3q_3, p_2q_2 i p_4q_4), co więcej, jest to ten sam punkt. Z faktu, że proste p_1q_1, p_2q_2 i p_1q_3 przecinają się w jednym punkcie wynika, że trójkąty $p_1p_2p_3$ oraz $q_1q_2q_3$ mają oś perspektywiczną. Ponieważ proste p_1p_3 i q_1q_3 przecinają się w punkcie a_5, a proste p_2p_3 i q_2q_3 przecinają się w punkcie a_4, więc osią tą jest prosta L, zatem proste p_1p_2 i q_1q_2 przecinają się też na tej prostej, co kończy dowód.

Dualność – własność geometrii **płaszczyzny** rzutowej polegająca na **tym, że** gdy w jakimś jej twierdzeniu **zamieni** się symbole punktów na symbole **prostych**, a symbole prostych na symbole **punktów**, to otrzymane zdanie jest **również** twierdzeniem tej geometrii. **Twierdzenie** takie nazywa się dualnym, **podobnie** definiuje się pojęcia dualne.

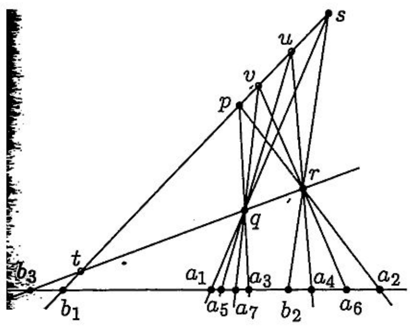


Twierdzenie Veblena i Younga.


Zachowywanie CSP przez przekształcenie perspektywiczne.



Przechodniość pierwsza.



Przechodniość druga i trzecia.

TWIERDZENIE VEBLENA i YOUNGA: proste współpękowe przechodzące odpowiednio przez poszczególne punkty CSP tworzą czworobokową szóstkę prostych (relacja dualna do czworokątowej szóstki prostych, też dalej oznaczana jako CSP).

Dowód. Wobec dowolności wyboru czworokąta realizującego CSP $a_1, \dots, a_6$ na prostej S, obierzmy taki czworokąt $pqrs$, w którym s będzie wierzchołkiem pęku prostych wymienionego w założeniach twierdzenia. Oznaczmy prostą $a_i s$ przez A_i dla $i = 1, \dots, 6$, a ponadto proste qr, pr, pq odpowiednio przez P, Q, R. Czworobok $PQRS$ z definicji realizuje CSP

$$\begin{pmatrix} A_4 & A_1 \\ A_5 & A_2 \\ A_6 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Bezpośrednio wynika stąd zachowywanie CSP przez przekształcenia perspektywiczne (co widać na rysunku – należy zastosować twierdzenie Veblena i Younga, a potem twierdzenie dualne), a więc również przez wszelkie przekształcenia rzutowe prostej na prostą.

Dowód pierwszej z wypisanych PRZECHODNIOŚCI CSP. Niech czworokąt $pqrs$ relizuje pierwszą CSP w założeniu. Dorysujemy dwa punkty: t jest przecięciem prostych qr i pb_2, u jest przecięciem prostych ps i ta_4. Wobec jedyności szóstego punktu w CSP, drugą CSP w założeniu realizuje zatem $uqtp$, a trzecią – $urtp$. W szczególności współliniowe są punkty q, u, a_5, jak i r, u, a_6. Ale w tej sytuacji czworokąt $uqrs$ realizuje CSP w tezie.

Dowód drugiej i trzeciej PRZECHODNIOŚCI CSP. Niech czworokąt $pqrs$ realizuje na prostej L pierwszą CSP w założeniu. Tym razem dorysujemy trzy punkty, wszystkie na prostej ps: t leży ponadto na prostej qr, u – na a_4r i v – na a_6r. Wobec jedyności szóstego punktu CSP czworokąty $uqrs$ i $vqrs$ relizują odpowiednio drugą i trzecią CSP w założeniu (dla obu dowodzonych przechodniości są one jednakowe). Rozpatrzmy teraz dwa przekształcenia perspektywiczne: o środku r z prostej L na prostą ps i o środku q – z powrotem. Punkty b_1, b_3, a_2, a_4, a_6 przechodzą w pierwszym przekształceniu na punkty b_1, t, p, u, v, te zaś w drugim na b_1, b_3, a_3, a_5, a_7. Na mocy wniosku z twierdzenia Veblena i Younga relacja czworokątowej szóstki punktów wiąże każdą z tych piątek w dokładnie ten sam sposób, co daje nie tylko drugą i trzecią przechodniość, ale również wiele innych.

I tyle wstępnej reklamy czworokątowej szóstki punktów.

Moje zauroczenie tym pojęciem nie jest czymś wyjątkowym – jeszcze bardziej entuzjastyczną opinię o CSP ma np. Coxeter. Dziś, w czasach, gdy problematyka podstaw w ogólności, a podstaw geometrii w szczególności jest – wierzę, że chwilowo – na marginesie matematyki, być może nieliczni matematycy mogą dostrzec piękno CSP w geometrycznym kontekście. Tym polecić mogę zastanowienie się, z jak wielu relacji sześcioargumentowych w swoim matematycznym życiu korzystali – może spojrzenie na CSP, jak na swoistego dinozaura – niesłychanie długiej, a sensownej relacji – pochodzącego aż z pierwszej połowy kończącego się stulecia, pozwoli dostrzec egzotyczne piękno tego pojęcia.

Prawdę powiedziawszy, z sensownych długich relacji można wymienić jeszcze tylko n-argumentowe relacje równoważności. Ale to już zupełnie inna (choć też z koneksjami geometrycznymi) historia.