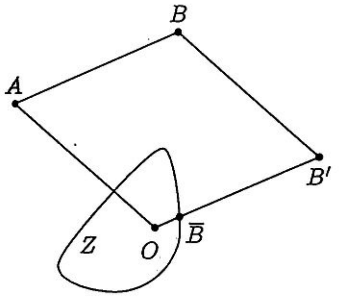
## Suplement dydaktyczny do artykułu L.W. Szczerby

Nauczający tak w „wyczynowych” klasach liceów bądź na kółkach matematycznych, jak też na studiach, jako przykłady przestrzeni metrycznych podają z reguły (poza przestrzenią kartezjańską) przestrzeń z metryką miejską, kolejową, rzeczną, dyskretną i na tym koniec. Bierze się to z przekonania, iż przedstawianie innych metryk jest technicznie kłopotliwe. Chciałbym tu przypomnieć elementarne wprowadzenie i badanie metryk danych przez ciała cechujące, a w szczególności metryk Minkowskiego. Dla podkreślenia dydaktycznego charakteru tych uwag używał będę oznaczeń zbliżonych do szkolnych.



Rys. 1

Zajmować się będziemy zwykłą płaszczyzną. Niech $Z$ będzie zbiorem wypukłym, a $S = \partial Z$ jego brzegiem. Weźmy pod uwagę punkt $O$ z wnętrza $Z$. Interesować nas będzie funkcja $\varrho_{Z,O}$ przyporządkowująca dowolnej parze punktów $A$, $B$ liczbę rzeczywistą nieujemną w następujący sposób (rys. 1):

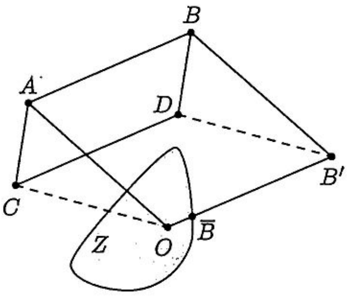
– przesuwamy odcinek $AB$ o wektor $\overrightarrow{AO}$ otrzymując odcinek $OB'$;
– znajdujemy punkt przecięcia półprostej $OB'^{\to}$ z $S$, niech będzie to $\overline{B}$;

$$\varrho_{Z,O}(A,\, B) := \frac{\rho(O,\, B')}{\rho(O,\, \overline{B})},$$

gdzie $\rho$ jest zwykłą metryką euklidesową.

Już w tym miejscu można rozwiązać kilka niekłopotliwych zadań:

**Zadanie 1.** Wykazać, że funkcja $\varrho_{Z,O}$ jest przesuwalna, czyli, że przyjmuje te same wartości dla przeciwległych boków równoległoboku (rys. 2).

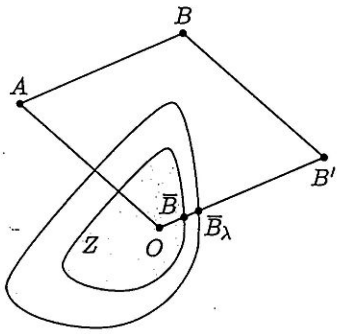


Rys. 2

**Zadanie 2.** Wykazać, że $Z$ jest dla $\varrho_{Z,O}$ kulą jednostkową, czyli składa się z punktów $X$, dla których $\varrho_{Z,O}(O, X) \leq 1$.

**Zadanie 3.** Wykazać, że jeśli $Z'$ jest obrazem zbioru $Z$ przy jednokładności o skali $\lambda > 0$ względem punktu $O$, to dla dowolnych punktów $X$, $Y$ jest (rys. 3)

$$\varrho_{Z',O}(X,\, Y) = \frac{1}{\lambda}\varrho_{Z,O}(X,\, Y).$$



Rys. 3

**Zadanie 4.** Wykazać, że wszystkie kule dla $\varrho_{Z,O}$ są obrazami $Z$ przy przesunięciach i jednokładnościach o skalach dodatnich.
(Nawiasem mówiąc jest to grupa zazwyczaj nazywana dylatacjami zgodnymi.)

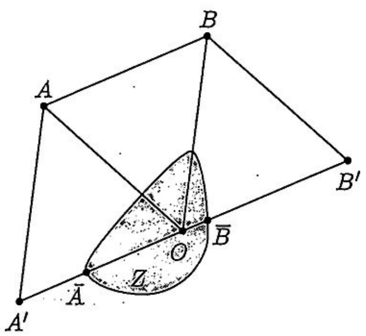
**Zadanie 5.** Sprawdzić (jest tu pewna niezręczność), że

$$\varrho_{Z,O}(X,\, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y.$$

**Zadanie 6.** Sprawdzić, że na ogół (rys. 4)

$$\varrho_{Z,O}(X,\, Y) \neq \varrho_{Z,O}(Y,\, X).$$

W szczególności z tego ostatniego zadania wynika, że $\varrho_{Z,O}$ nie jest na ogół metryką. Widać też jednak, co potrzeba zmienić.



Rys. 4

**Zadanie 7.** Wykazać, że jeśli $O$ jest środkiem symetrii zbioru $Z$, to dla dowolnych $X$, $Y$

$$\varrho_{Z,O}(X,\, Y) = \varrho_{Z,O}(Y,\, X).$$

Nie dowodzi to, rzecz jasna, że ta funkcja jest wtedy metryką, ale że nią może być. Gdy $O$ jest środkiem symetrii zbioru $Z$, będziemy tę funkcję oznaczać prościej: $\varrho_Z$.

**Zadanie 8 - lemat.** Wykazać, że jeśli punkt $X$ należy do euklidesowego odcinka $AB$, to

$$\varrho_Z(A,\, X) + \varrho_Z(X,\, B) = \varrho_Z(A,\, B).$$

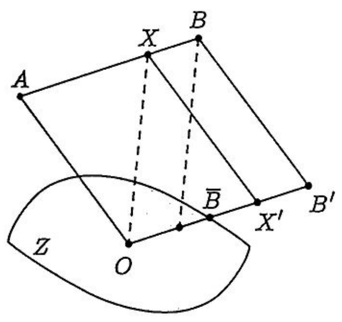
Dla dowodu wystarczy zauważyć (rys. 5), że równość

$$\rho(A,\, X) + \rho(X,\, B) = \rho(A,\, B),$$

charakteryzująca odcinki, dzięki przesuwalności metryki euklidesowej daje

$$\rho(O,\, X') + \rho(X',\, B') = \rho(O,\, B'),$$

podzielić tę równość przez $\rho(O,\, \overline{B})$ i chwilę podumać nad drugim składnikiem po lewej stronie.



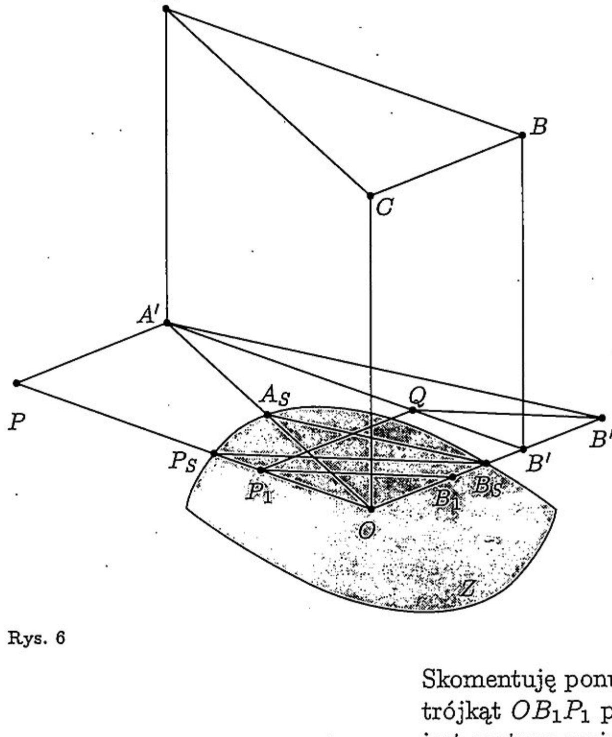
Rys. 5

**Zadanie 9.** Wykazać, że gdy punkt $X$ leży na euklidesowej prostej $AB$, to leży na prostej metrycznej zdefiniowanej za pomocą funkcji $\varrho_Z$.

Daje się to zrobić, mimo, iż nie wiemy jeszcze, czy $\varrho_Z$ jest metryką – jest to prościutki wniosek z zadania 8. Jednak następne zadanie powinien raczej rozwiązać prowadzący zajęcia.

**Zadanie ⋆.** Wykazać, że jeśli $Z$ jest zbiorem mocno wypukłym, a punkty $A$, $B$, $C$ są (euklidesowo) niewspółliniowe, to

$$\varrho_Z(A, B) + \varrho_Z(B, C) > \varrho_Z(A, C).$$




Rys. 6

Dowód. Mamy $\rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C)$. Możemy też założyć, że $\varrho_Z(B, C) < \varrho_Z(A, C)$ – prawda? Narysujmy zbiór $Z$ i dane punkty (rys. 6) oraz wprowadźmy oznaczenia:

$A'$, $B'$ – obrazy $A$ i $B$ w przesunięciu o $\overrightarrow{CO}$,
$A_S$, $B_S$ – przecięcia $OA'^{\mapsto}$ i $OB'^{\mapsto}$ z $S(= \partial Z)$,
$B''$ – taki punkt półprostej $OB'^{\mapsto}$, że $A_SB_S \parallel A'B''$,
$P$, $P_S$ – czwarty wierzchołek równoległoboku $A'B'OP$ i przecięcie $OP^{\mapsto}$ z $S$,
$Q$ – taki punkt prostej $A'B'$, że $B_SP_S \parallel B''Q$,
$P_1$, $B_1$ – czwarte wierzchołki równoległoboków $QB'OP_1$ i $B''QP_1B_1$.

Reszta jest rachunkiem:

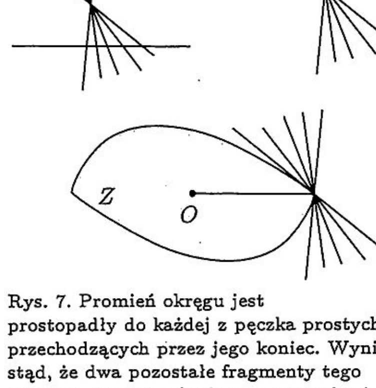
$$\begin{aligned}\varrho_Z(A, C) - \varrho_Z(C, B) &= \varrho_Z(O, A') - \varrho_Z(O, B') = \\ &= \varrho_Z(O, B'') - \varrho_Z(O, B') = \varrho_Z(B', B'') = \\ &=_{(1)} \varrho_Z(O, B_1) =_{(2)} \varrho_Z(O, P_1) = \\ &= \varrho_Z(B', Q) <_{(3)} \varrho_Z(B', A') = \\ &= \varrho_Z(A, B).\end{aligned}$$

Skomentuję ponumerowane relacje. Równość (1) to konsekwencja tego, iż trójkąt $OB_1P_1$ powstaje z trójkąta $B'B''Q$ przez przesunięcie. Równość (2) jest zastosowaniem twierdzenia Talesa (proszę przypomnieć tu definicję $\varrho_Z$). Nierówność (3) to wykorzystanie mocnej wypukłości – dzięki mocnej wypukłości zachodzi mianowicie nierówność (4):

$$\angle OB''Q = \angle OB_SP_S <_{(4)} \angle OB_SA_S = \angle OB''A'.$$

Dalej już znów mogą sobie dać radę sami uczniowie. Jako proste konsekwencje zadania ⋆ można rozwiązać

**Zadanie 10.** Wykazać, że jeśli zbiór $Z$ jest mocno wypukły, to funkcja $\varrho_Z$ jest metryką i jej proste metryczne są prostymi euklidesowymi (czyli jest metryką Minkowskiego).



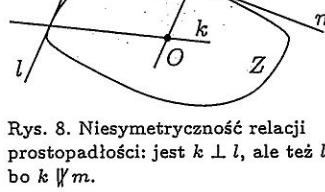

Rys. 7. Promień okręgu jest prostopadły do każdej z pęczka prostych przechodzących przez jego koniec. Wynika stąd, że dwa pozostałe fragmenty tego rysunku pokazują (wobec przesuwalności) niejednoznaczność podnoszenia i opuszczania prostopadłej.

**Zadanie 11.** Wykazać, że jeśli zbiór $Z$ nie jest mocno wypukły, to $\varrho_Z$ również jest metryką (daną przez ciało cechujące $Z$), ale dopuszcza obszerniejsze proste metryczne.

Tu wystarczy zauważyć, że nierówność (4), a w konsekwencji i (3), może się stać nieostra.

Problem prostopadłości też jest elementarny, choć pierwszy krok należeć tu musi do nauczyciela. Należy nieznacznie zmodyfikować podaną w poprzednim artykule definicję prostopadłości: jeżeli odcinek $AA_1$ jest najkrótszym odcinkiem łączącym $A$ z prostą $k$, to $AA_1 \perp k$.

Nie będę tej problematyki przedstawiał w formie zadań – to, co jest do udowodnienia, zostało wyliczone w poprzednim artykule. Tu postąpię „po grecku": zaproponuję interpretację rysunków.




Rys. 8. Niesymetryczność relacji prostopadłości: jest $k \perp l$, ale też $l \not\perp k$, bo $k \not\parallel m$.

Rysunki 7 i 8 pokazują możliwe anomalie relacji prostopadłości. Dalsze rysunki trzeba już samemu narysować.

*Marek KORDOS*