Twierdzenie Johna

Lesław W. SZCZERBA, Siedlce

§ 1. Kule

Jest to swobodny zapis odczytu wygłoszonego podczas Szkoły Matematyki Poglądowej „Matematyczne perełki" w sierpniu 1996 roku w Siedlcach.

Niech $\mathfrak{A}^n_{\Re}$ będzie *n-wymiarową przestrzenią afiniczną* nad ciałem liczb rzeczywistych, zbiorem punktów tej przestrzeni jest R^n, gdzie $\Re$ oznacza ciało liczb rzeczywistych, a R – zbiór liczb rzeczywistych. Jak wiadomo *metryką* jest dowolna funkcja ϱ przyporządkowująca parze punktów liczbę rzeczywistą (a więc funkcja typu $R^n \times R^n \to R$) spełniająca warunki:

$$\begin{aligned} &\varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}) = \varrho(\mathfrak{b},\, \mathfrak{a}), \\ (1)\qquad &\varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \\ &\varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}) + \varrho(\mathfrak{b},\, \mathfrak{c}) \geq \varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{c}). \end{aligned}$$

Ostatni warunek, zwany *nierównością trójkąta*, w skrajnym przypadku, gdy $\geq$ przechodzi w $=$, definiuje *odcinek metryczny*. Gdy jest to jednocześnie odcinek afiniczny, t.j. gdy jest spełniony warunek

$$(2)\qquad \varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}) + \varrho(\mathfrak{b},\, \mathfrak{c}) = \varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{c}) \longleftrightarrow \exists x \Big(0 \leq x \leq 1 \wedge \mathfrak{b} = x\mathfrak{a} + (1-x)\mathfrak{c}\Big);$$

wówczas mówi się, że metryka jest *zgodna ze strukturą afiniczną*. Jeśli wartość metryki nie zmienia się przy przesunięciach, czyli

$$(3)\qquad \varrho(\mathfrak{a} + \mathfrak{c},\; \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}),$$

to metryka jest *przesuwalna*. Metryki, które są jednocześnie przesuwalne i zgodne ze strukturą afiniczną, nazywane są *metrykami Minkowskiego*.

Najczęściej stosowana jest *metryka kartezjańska*:

$$(4)\qquad \varrho_C(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}.$$

Przyjęto tu konwencję $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i podobnie dla $\mathfrak{b}$ itd. Jest to przykład metryki Minkowskiego.

Inna znana metryka, *metryka miasto*:

$$(5)\qquad \varrho_M(\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|,$$

jest przesuwalna, ale nie jest metryką Minkowskiego, gdyż jej odcinki metryczne są nadzbiorami (na ogół właściwymi) odcinków afinicznych.

Każda metryka Minkowskiego ϱ, dla każdego punktu $\mathfrak{a}$ i dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej r, wyznacza *kulę* o środku w tym punkcie i o promieniu r jako miejsce geometryczne wszystkich punktów odległych od $\mathfrak{a}$ o nie więcej niż r:

$$K^n_\varrho(\mathfrak{a},\, r) = \{\mathfrak{x} :\; \varrho(\mathfrak{a},\, \mathfrak{x}) \leq r\}.$$

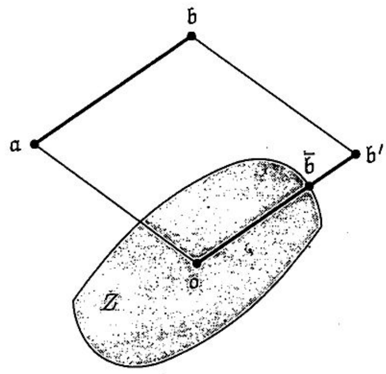
W przypadku metryki kartezjańskiej kule są zwykłymi kulami kartezjańskimi, w przypadku zaś metryki miejskiej – kartezjańskimi kostkami. Dla każdej metryki wszystkie kule są zbiorami ograniczonymi, wypukłymi i symetrycznymi względem swego środka; w przypadku metryk Minkowskiego wszystkie te cechy można rozumieć afinicznie. Co więcej: dla metryk Minkowskiego kule są (afinicznie) mocno wypukłe, co oznacza, iż nie zawierają w brzegu żadnego niezdegenerowanego odcinka.

Przy ustalonej metryce przesuwalnej obrazem kuli przy przesunięciu lub jednokładności jest kula. Co więcej: jeśli dwie kule mają ten sam promień, to można je nałożyć za pomocą przesunięcia; w przeciwnym przypadku – za pomocą jednokładności. Zbiór kul jest zatem jednoznacznie wyznaczony przez dowolny swój element, na przykład przez kulę jednostkową, czyli kulę o środku w początku układu i promieniu 1. W przypadku metryki kartezjańskiej jest to kula $K^n_C = \{\mathfrak{x} :\; |\mathfrak{x}| \leq 1\}$, w przypadku zaś metryki miejskiej K^n_M jest kostką kartezjańską o wierzchołkach w punktach osi układu współrzędnych mających współrzędne 1 lub -1, czyli kostką o krawędzi $\sqrt{n}$.

Ponieważ stosunek podziału odcinka jest pojęciem afinicznym, więc w przypadku metryki Minkowskiego każda kula o znanym promieniu wyznacza odległości od swojego środka. W rezultacie każda kula jednostkowa wyznacza metrykę, w której jest kulą o promieniu 1.

Konstrukcję tę można przedstawić w przypadku przestrzeni kartezjańskiej w następujący sposób: aby zmierzyć odcinek $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ przesuwamy go równolegle do początku układu współrzędnych, otrzymując odcinek $\mathfrak{o}\mathfrak{b}'$, i jako wartość metryki przyjmujemy afiniczny stosunek $\mathfrak{o}\mathfrak{b}'$ do $\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{b}}$, gdzie $\bar{\mathfrak{b}}$ to przecięcie półprostej $\mathfrak{o}\mathfrak{b}'$ z brzegiem jednostkowej kuli (czyli ze sferą jednostkową) – poprawność rezultatu jest tu oczywista.

Możliwe jest powtórzenie tej konstrukcji nie tylko w przypadku kul otrzymanych w innych metrykach Minkowskiego, lecz także w przypadku, gdy obierzemy dowolnie w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ pewien zbiór ograniczony, wypukły i środkowo symetryczny jako mający pełnić rolę kuli jednostkowej – otrzymamy wówczas przesuwalną metrykę, w której odcinki metryczne będą nadzbiorami (niekoniecznie właściwymi, jak pokazuje przypadek kartezjańskiej kuli jednostkowej) odcinków afinicznych. O tak obranym zbiorze mówimy, że jest *ciałem cechującym* otrzymanej metryki; istotnie pełni ono w niej rolę kuli jednostkowej. Dalej będziemy, dla danego ciała cechującego Z, oznaczali odpowiadającą mu metrykę przez ϱ^Z; dla metryki ϱ danej przez ciało cechujące będziemy to ciało oznaczali przez K^ϱ (jest ono dane z dokładnością do przesunięcia, ale tu nie będzie to prowadzić do nieporozumień). Przykładem metryki danej przez ciało cechujące jest każda metryka Minkowskiego (odtąd mówiąc o metryce Minkowskiego zawsze będziemy ją traktowali jak daną przez ciało cechujące), a także np. metryka miejska.



$$\varrho^Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\varrho_C(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}')}{\varrho_C(\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{b}})}$$

Ważnym przykładem ciała cechującego w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ jest też sympleks n-wymiarowy. Wszystkie takie sympleksy są afiniczne, a więc i wyznaczone przez nie metryki są afiniczne. Istotną dla nas dalej grupą metryk będą metryki afiniczne z metryką kartezjańską ϱ_C – takie metryki nazywa się *metrykami euklidesowymi*. Zatem metryki euklidesowe można też określić jako dane w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ przez wzięte jako ciała cechujące „pełne elipsoidy", tj. elipsoidy maksymalnego wymiaru plus wycięte przez nie ograniczone części przestrzeni.

Zgodność podziału afinicznego z metryką kartezjańską pozwala spojrzeć na metryki dane przez ciało cechujące jako na metryki w pewien sposób z nią związane (rysunek). Twierdzenie Johna podaje jednorodny sposób oszacowania metryk danych przez ciała cechujące za pomocą metryk euklidesowych.

Zanim przejdziemy do tego twierdzenia warto przytoczyć kilka rezultatów dotyczących metryk danych przez ciała cechujące. Do końca tego paragrafu rozpatrywać będziemy jedynie takie metryki (nie zawsze to podkreślając). Rezultaty te relacjonują historię kilkudziesięciu lat badań nad tym, jak (naturalne) warunki geometryczne nakładane na ciała cechujące implikują własności otrzymanych przestrzeni metrycznych.

Można dowieść, że

metryka dana przez ciało cechujące jest metryką Minkowskiego wtedy i tylko wtedy, gdy definiujący ją zbiór jest mocno wypukły.

Zdefiniujemy teraz *prostopadłość metryczną*. To, i wszystkie inne pojęcia, definiuje się w przestrzeniach o metryce danej przez ciało cechujące tak, by w przypadku, gdy metryka ta jest euklidesowa, otrzymać znane euklidesowe pojęcie.

Niech K i L będą dwiema prostymi na płaszczyźnie afinicznej $\mathfrak{A}^2_{\mathfrak{R}}$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Niech dalej ϱ będzie metryką Minkowskiego na tej płaszczyźnie. Prosta K *jest prostopadła* do prostej L (symbolicznie $K \perp L$) wówczas, gdy L jest podpierającą pewnej kuli o środku leżącym na K.

Płaszczyznę z metryką Minkowskiego, w której przez dowolny punkt istnieje dokładnie jedna prosta prostopadła do danej prostej, nazywamy *płaszczyzną z prostopadłością*. Nietrudno zauważyć, że

na to, by płaszczyzna z metryką Minkowskiego była płaszczyzną z prostopadłością potrzeba i wystarcza, by określające tę metrykę ciało cechujące miało gładki brzeg.

Jeśli π jest płaszczyzną, a ϱ metryką Minkowskiego w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$, to ograniczając ϱ do π otrzymuje się metrykę Minkowskiego w π. Łatwo więc przenieść pojęcie prostopadłości na przypadek wielowymiarowy – odpowiednie określenie *przestrzeni z prostopadłością* i charakteryzujący ją warunek na ciało cechujące jest prostym analogonem podanych wyżej dla wymiaru 2.

Zdefiniowana w ten sposób prostopadłość nie musi być symetryczna; jeśli jest, to tak metryka, jak i odpowiadającą jej przestrzeń z prostopadłością nazywa się *symetryczną*, przy czym zachodzi równoważność:

na to by metryka dana przez ciało Z była symetryczna potrzeba i wystarcza, by dla każdego punktu $\mathfrak{a}$ na brzegu ciała Z istniał równoległościan opisany na Z w ten sposób, by prosta $\mathfrak{o}\mathfrak{a}$ (gdzie $\mathfrak{o}$ jest środkiem symetrii Z) była równoległa do wszystkich ścian tego równoległościanu z wyjątkiem dwóch: tej, która zawiera $\mathfrak{a}$ i równoległej do niej.

Wbrew oczekiwaniom samego Minkowskiego okazało się, że powyższy *warunek równoległościanu* nie ogranicza klasy metryk do metryk euklidesowych. Radon [3] udowodnił, że już na płaszczyźnie istnieją różne od elipsy krzywe gładkie, środkowo symetryczne, ograniczające zbiory mocno wypukłe i spełniające ten warunek.

Metryczna definicja *symetrii osiowej* (w symetrycznej przestrzeni z prostopadłością) jest następująca: obraz $\mathfrak{a}'$ danego punktu $\mathfrak{a}$ względem prostej L to punkt leżący na tej samej co punkt $\mathfrak{a}$ prostej K prostopadłej do L i w taki sposób, że punkt przecięcia K i L jest środkiem odcinka $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$. Okazuje się, że

symetryczna metryka Minkowskiego jest euklidesowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje symetria względem każdej prostej w wyznaczonej przez tę metrykę przestrzeni.

Warunek konieczny i dostateczny odniesiony do ciała cechującego brzmi:

dla każdej prostej przechodzącej przez środek ciała cechującego istnieje kierunek o tej własności, że przez każdy punkt tej prostej przechodzi cięciwa ciała cechującego mająca ten właśnie kierunek i mająca środek w tym właśnie punkcie.

Przytoczone wyżej warunki wskazują, że wśród stosowanych dość szeroko metryk Minkowskiego (np. w analizie funkcjonalnej) metryki euklidesowe są zjawiskiem wyjątkowym. Z drugiej strony doświadczenie każdego badacza jest znacznie większe przy obcowaniu z metrykami euklidesowymi, niż jakimikolwiek innymi. Pożądane byłoby więc, zasugerowane już wyżej, znalezienie jakiegoś dobrego oszacowania dowolnej metryki Minkowskiego za pomocą metryki euklidesowej. Taka jest motywacja i takie jest środowisko twierdzenia Johna.

§ 2. Twierdzenie Johna

Dane są w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ dwie metryki Minkowskiego: ϱ_1 i ϱ_2. Jeśli istnieje taka liczba rzeczywista s, że dla dowolnych dwu punktów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ przestrzeni $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ zachodzi $\varrho_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leq s\varrho_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, to pisze się krótko $\varrho_1 \leq s\varrho_2$.

Celem relacjonowanego tu odczytu było udowodnienie następującego twierdzenia.

(7) **Twierdzenie Johna.** *Dla dowolnej metryki ϱ danej przez ciało cechujące w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ istnieje afiniczna z nią taka metryka ϱ', że*

$$\frac{\varrho_C}{\sqrt{n}} \leq \varrho' \leq \varrho_C.$$

Dla dowodu (7) wygodnie jest najpierw udowodnić dwa lematy.

(8) **Lemat.** *Spośród wszystkich równoległościanów opisanych na kuli jednostkowej tylko kostka ma najmniejszą miarę.*

Dowód. Nie zmniejszając ogólności rozważań wystarczy wziąć pod uwagę równoległościany o podstawie leżącej na tej samej płaszczyźnie. Ponieważ wszystkie one mają wspólną wysokość równą 2, wystarczy zatem badać miarę podstawy. Podstawą jest równoległościan $(n-1)$-wymiarowy opisany na elipsoidzie stycznej do ścian w ich środkach ciężkości. Jest on zatem obrazem kuli jednostkowej przy przekształceniu kostki jednostkowej $(n-1)$-wymiarowej na rozpatrywany równoległościan. Elipsoida ta jest rzutem równoległym n-wymiarowej kuli jednostkowej, zatem wszystkie jej osie są nie krótsze niż 2. Wszystkie osie mają długość 2 tylko w przypadku, gdy rzutowanie było prostopadłe. Oznacza to, że równoległościan jest minimalny, gdy jest prostopadłościanem. Równocześnie jest to prostopadłościan opisany na kuli. Musi więc być to kostka. □

(9) **Lemat.** *Jeśli w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ największą elipsoidą zawartą w zbiorze Z, domkniętym, ograniczonym, środkowo symetrycznym względem początku układu współrzędnych $\mathfrak{o}$ i wypukłym, jest kula K^n_C, to Z zawiera się w pewnej n-wymiarowej kuli o promieniu $\sqrt{n}$ i środku w $\mathfrak{o}$.*

Dowód. Ponieważ Z jest zbiorem ograniczonym i domkniętym, więc istnieje w nim punkt $\mathfrak{a}$ najbardziej odległy od $\mathfrak{o}$.

Przypuśćmy, że $|\mathfrak{a}| > \sqrt{n}$. Wówczas wewnątrz odcinka łączącego punkty $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{o}$ istnieje punkt $\mathfrak{b}$ odległy od początku układu o $\sqrt{n}$. Możemy założyć, że kostka jednostkowa ma wierzchołek w tym punkcie. Niech z kolei φ będzie przekształceniem afinicznym przeprowadzającym kostkę jednostkową na równoległościan opisany na K^n_C tak, że $\varphi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$. Ponieważ Z jest zbiorem wypukłym, więc $\vec{\varphi}(K^n_C) \subset P \subseteq Z$, gdzie P jest uwypukleniem punktów $\mathfrak{a}$, $-\mathfrak{a}$ i K^n_C. Wobec lematu (8)

$$|\vec{\varphi}(K^n_C)| > |K^n_C|$$

wbrew założeniu. □

Dowód Twierdzenia (7). Niech ϱ będzie metryką w $\mathfrak{A}^n_{\mathfrak{R}}$ daną przez ciało cechujące Z. Istnieje największa elipsoida E zawarta w Z. Niech φ będzie przekształceniem afinicznym przeprowadzającym E na kulę K^n_C. Wobec lematu (9) metryka $\varrho' = \varrho^{\vec{\varphi}(Z)}$ spełnia warunki twierdzenia. □

W istocie Fritz John (por. [2]) udowodnił, wynikające bezpośrednio z (9), następujące twierdzenie.

(10) **Wniosek.** *Dla każdej metryki ϱ^Z istnieje taka metryka euklidesowa ϱ_E, że*

$$\varrho_E \le \varrho^Z \le \sqrt{n}\varrho_E.$$

Warto zauważyć, iż – równoważnie – chodzi tu o istnienie takiej elipsoidy E, że

$$\varrho^E \le \varrho^Z \le \sqrt{n}\varrho^E.$$

Idąc dalej tą drogą stwierdzamy, że każdy zbiór ograniczony, wypukły i środkowo symetryczny mieści się między dwiema elipsami jednokładnymi w skali $\sqrt{n}$.

Na zakończenie warto dodać, że opuszczenie w poprzednim zdaniu zwrotu „środkowo symetryczny" powoduje, dla zachowania prawdziwości zdania, jedynie konieczność opuszczenia symbolu pierwiastka.

Bibliografia

[1] Buseman, H.; Kelly, P.J. **Projective geometry and projective metrics**, Academic Press Inc., Publ., New York, 1953.

[2] John, F. *Extremum Problem with Inequalities as Subsidiary Conditions* [in:] **Studies and Essays presented to R. Courant...**, Interscience Publ. Inc., New York, 1948.

[3] Radon, J. *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Ber.Vehr.Sachs.Akad., 68(1916) 123–128.