Różnymi sposobami

Elżbieta GÓRNICKA, Rzeszów

Jednym z ważniejszych aspektów nauczania matematyki jest ukazywanie pewnej uniwersalności wskazywanych przez nią metod. W nauczaniu ujawnia się to, gdy przy pomocy jednej obserwacji możemy rozwiązywać różne problemy. Na przykład, korzystając z dobrodziejstw rachunku różniczkowego możemy dowodzić pewnych nierówności, rozwiązywać proste zadania optymalizacyjne (szkolne zadania na ekstrema). Innym przykładem jest możliwość zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta (gdy rozmieszczamy n przedmiotów w k szufladach i $n > k$, to w pewnej szufladzie znajdą się co najmniej dwa przedmioty) do rozwiązywania różnorodnych problemów, [7].

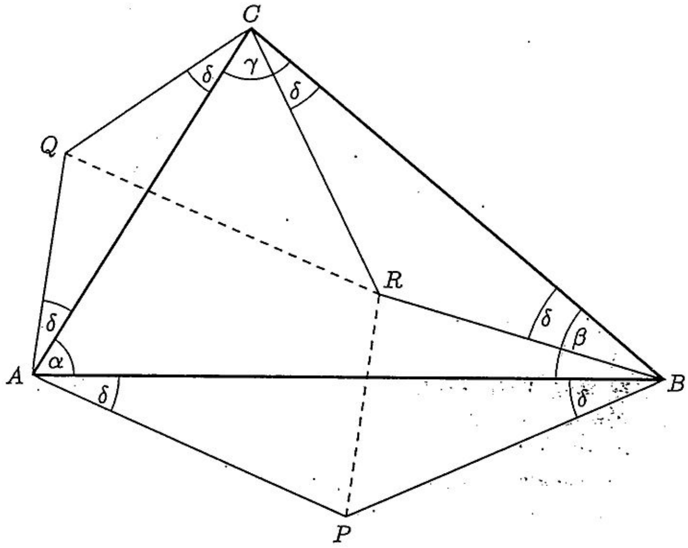
W matematyce występuje również inne, nie mniej ważne zjawisko – ten sam problem (zadanie) możemy rozwiązywać różnymi metodami. Umożliwia to jego głębsze zrozumienie, pozwala łączyć pozornie odległe fragmenty matematyki, odkrywać nowe zależności. Znamy na przykład wiele różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa [1, 3, 5], czy też twierdzenia o istnieniu dokładnie pięciu brył foremnych (platońskich) [1, 2, 8]. Innym aspektem tej sprawy jest chęć znalezienia najprostszego, czy też najbardziej komunikatywnego rozwiązania (uzasadnienia) danego problemu.

Niestety zjawisko to jest marginalnie prezentowane w podręcznikach szkolnych. Nieliczne są też publikacje pokazujące takie możliwości na konkretnym materiale zadaniowym. Na przykład, Marcin E. Kuczma w artykule [4] proponuje zbadać, czy istnieje granica $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$, jeśli istnieje – znaleźć jej wartość. Pokazuje również jak można to zrobić różnymi sposobami używając coraz bardziej zaawansowanych metod. Zadanie to dotyczy jednak materiału z tzw. matematyki wyższej.

Celem tego artykułu jest przedstawienie zadania geometrycznego (dla uczniów szkół średnich), którego rozwiązania mogą być pretekstem do przypomnienia (lub przedstawienia) uczniom różnych fragmentów matematyki szkolnej.

Takie spojrzenie z różnych punktów widzenia połączone z pewną retrospekcją na poznany już materiał może dostarczyć uczniom wielu cennych obserwacji i przyczynić się do ich większej dojrzałości matematycznej.

Zadanie. *Na bokach trójkąta ABC budujemy podobne trójkąty równoramienne APB ($|AP| = |PB|$), AQC ($|AQ| = |QC|$), BRC ($|BR| = |RC|$) w ten sposób, że punkty P i Q leżą na zewnątrz trójkąta ABC, natomiast punkt R leży w półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą BC i zawierającą trójkąt ABC. Udowodnić, że czworokąt $APRQ$ jest równoległobokiem.*

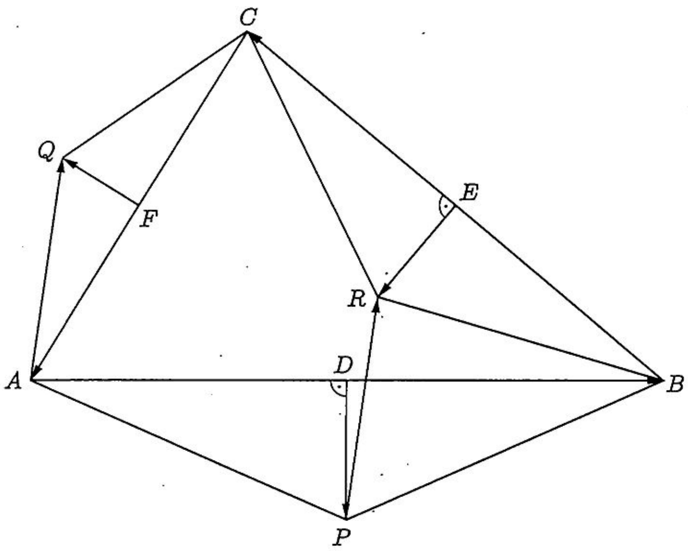


Rys. 1

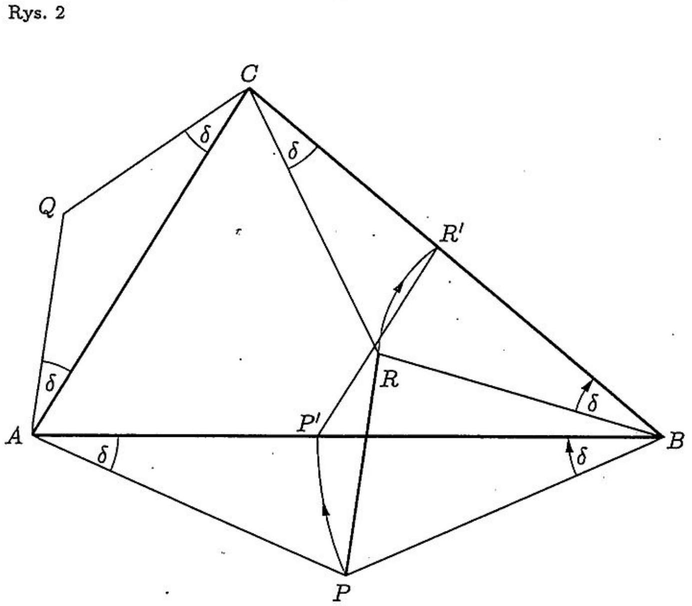
Aby stwiedzić, że czworokąt $APRQ$ jest równoległobokiem musimy wykazać jedną z następujących zależności:
1) przeciwległe boki są równoległe;
2) przeciwległe boki są sobie równe;
3) w parze przeciwległych boków boki są równoległe i równej długości;
4) przeciwległe kąty są równe.

Rozwiązanie I (*geometria elementarna*).
Wykażemy, że przeciwległe boki są równej długości. Przy oznaczeniach takich jak na rysunku 1, mamy: $\triangle APB \sim \triangle BRC$, więc $\frac{|PB|}{|RB|} = \frac{|AB|}{|CB|}$. Ponadto $|\angle PBR| = \delta + (\beta - \delta) = \beta = |\angle ABC|$. Stąd wynika, że

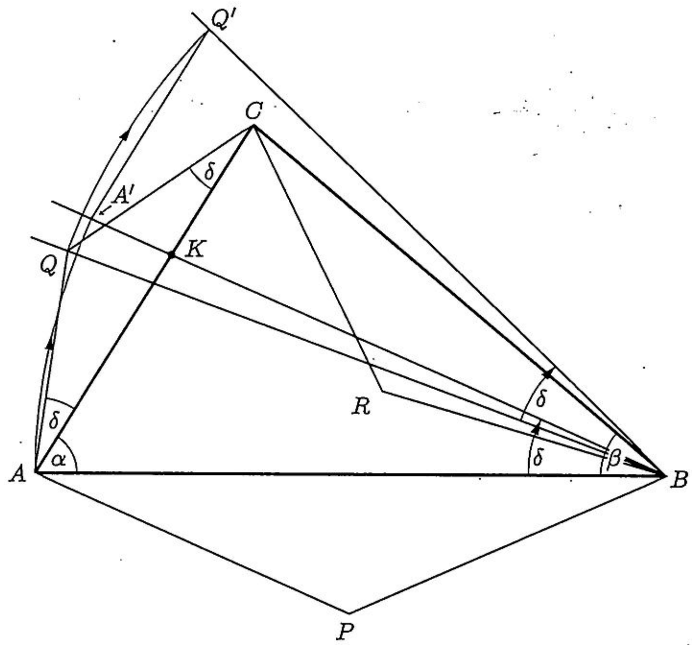
(1) $$\triangle PBR \sim \triangle ABC$$



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

(gwarantuje to cecha podobieństwa trójkątów: dwa trójkąty są podobne, jeżeli mają po jednym kącie równym i boki tworzące ten kąt są odpowiednio proporcjonalne). Analogicznie wykazujemy, że

$$(2) \qquad \triangle PBR \sim \triangle QRC.$$

Z (1) i (2) wynika, że $\triangle PBR \sim \triangle QRC$. Ponieważ $|BR| = |CR|$, więc trójkąty PBR i QRC są przystające: $|PR| = |QC|$ i $|QR| = |PB|$. Skoro $|AQ| = |QC|$, $|AP| = |PB|$, więc $|AQ| = |PR|$ i $|AP| = |QR|$. Oznacza to, że czworokąt APRQ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie II (*rachunek wektorowy*). Ponieważ trójkąty ACQ, ABP, BCR (rys. 2) są podobne, więc stały jest stosunek

$$\frac{|QF|}{|AC|} = \frac{|PD|}{|AB|} = \frac{|RE|}{|BC|} = k.$$

Zauważmy, że wektory $\overrightarrow{DP}$, $-\overrightarrow{ER}$ i $\overrightarrow{FQ}$ otrzymuje się odpowiednio z wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ przez pomnożenie ich przez k oraz obrót o ten sam kąt prosty. Wobec tego również suma tych wektorów powstaje z sumy wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ przez pomnożenie przez k i tenże obrót. Skoro jednak

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0},$$

więc także

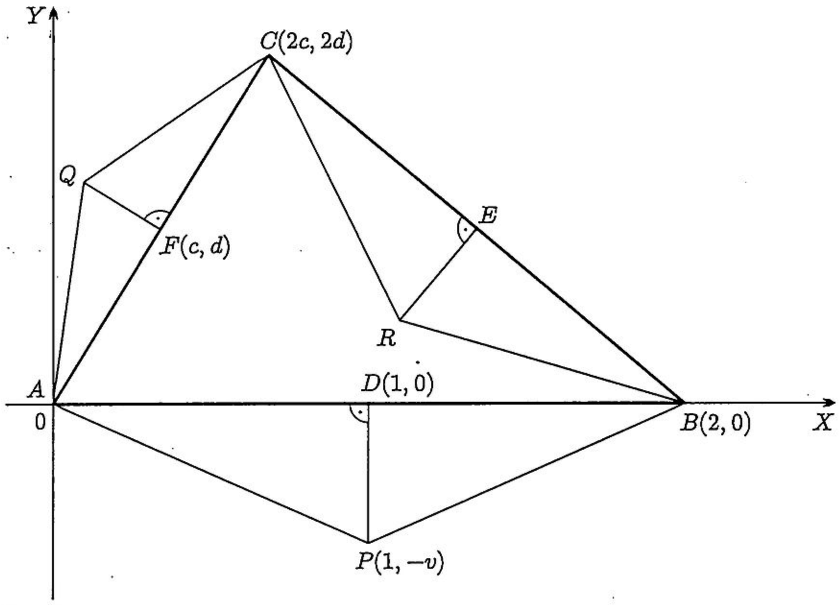
$$\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{ER} + \overrightarrow{FQ} = \vec{0}.$$

Korzystając z tej zależności obliczamy

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{PR} = \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FQ}\right) - \left(\overrightarrow{PB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ER}\right) = \\
&= -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FQ} - \left(-\overrightarrow{DP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ER} = \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{ER} + \overrightarrow{FQ}\right) = \\
&= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Zatem $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PR}$, a to oznacza, że $|AQ| = |PR|$ i $AQ \parallel PR$, co kończy uzasadnienie.

Rozwiązanie III (*kinematyczne*). Ponieważ $\triangle APB \sim \triangle CRB$, więc $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{|RB|}{|CB|}$ (rys. 3). Wykonujemy teraz obrót (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) punktu P i R wokół punktu B o kąt δ. Punkty te przejdą na punkty $P' \in$ p. AB, $R' \in$ p. CB i mamy: $|PB| = |P'B|$, $|RB| = |R'B|$. Zatem $\frac{|P'B|}{|AB|} = \frac{|R'B|}{|CB|}$, co wobec twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa oznacza, że $AC \parallel P'R'$. Jeżeli obrócimy w taki sam sposób punkty A i Q (rys. 4), to wówczas prosta $A'Q'$ będzie równoległa do prostej AC. Aby się o tym przekonać wystarczy zauważyć, że $|\angle Q'A'B| = |\angle QAB| = |\angle CKB|$. Istotnie: pierwsza równość wynika z zachowania rozwartości kątów przy obrocie, druga zaś z twierdzenia o kącie zewnętrznym zastosowanego do $\triangle AKB$. Gwarantuje to, że $A'Q' \parallel AC$, a z przechodniości relacji równoległości, $A'Q' \parallel P'R'$. Jeżeli teraz dla punktów P', R', A', Q' obrót wokół punktu B o kąt $-\delta$, to punkty te przejdą



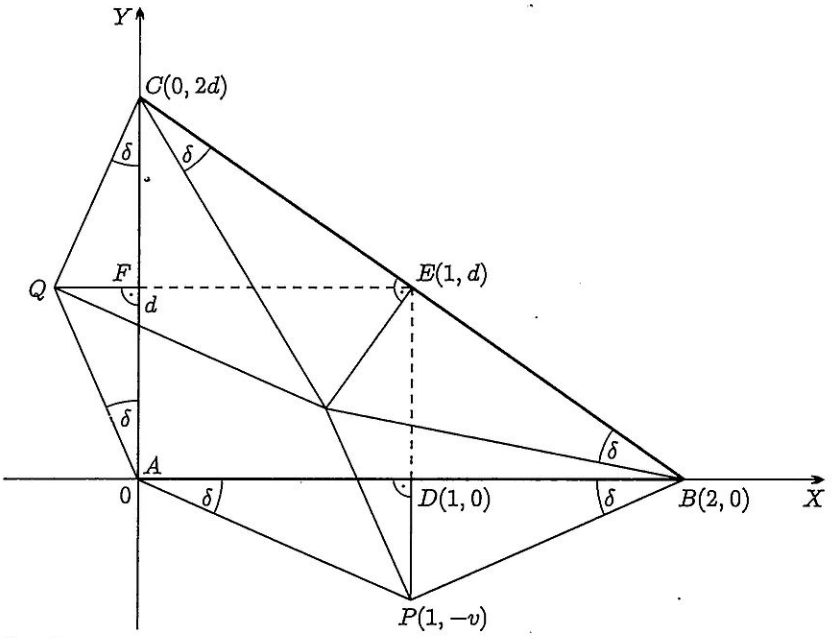
Rys. 5

na punkty P, R, A, Q, odpowiednio. Ponieważ obrót płaszczyzny wokół ustalonego punktu o ustalony kąt nie zmienia równoległości prostych, więc $AQ \parallel PR$. Analogicznie wykazujemy równoległość odcinków AP i QR. Zatem czworokąt $APRQ$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie IV (*geometria analityczna*). Na płaszczyźnie, w której leży trójkąt ABC wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych tak, że jego wierzchołki mają współrzędne $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2c,2d)$, gdzie $d>0$ (rys. 5). W trójkątach podobnych AQC, APB, BRC stosunek wysokości do podstawy jest stały (i, powiedzmy, równy $\frac{v}{2}$):

$$(*) \qquad \frac{|QF|}{|AC|} = \frac{|DP|}{|AB|} = \frac{|ER|}{|BC|} = \frac{v}{2}.$$

Wówczas punkt P ma współrzędne $P(1,-v)$.



Rys. 6

Gdy $c=0$, tzn. punkt C należy do osi OY (rys. 6), punkt Q ma współrzędne $Q(-vd,d)$. Musimy jeszcze wyznaczyć współrzędne punktu R. W tym celu wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty B i C:

$$y = (2-x)d = -dx + 2d,$$

i prostej do niej prostopadłej przechodącej przez punkt $E(1,d)$:

$$y_{\perp} = \frac{1}{d}\cdot x + d - \frac{1}{d}.$$

Następnie za pomocą standardowych rachunków (korzystając z $(*)$) wyznaczamy współrzędne punktu $R(1-vd, d-v)$. Porównując współczynniki kierunkowe prostych przechodzących przez punkty A i Q oraz P i R, a następnie przez A i P oraz Q i R stwierdzamy, że czworokąt $APRQ$ jest równoległobokiem.

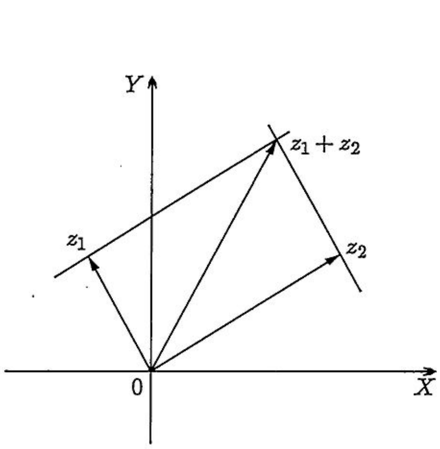
Podobnie postępujemy, gdy $c \neq 0$. Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i C jest następujące: $y = \frac{d}{c}\cdot x$, a równanie prostej przechodzącej przez punkty F i Q (rys. 5) ma postać

$$(**) \qquad y = -\frac{c}{d}(x-c) + d.$$

Ponieważ

$$\frac{x_F - x_Q}{y_C - y_A} = \frac{|QF|}{|AC|} = \frac{v}{2},$$

więc $x_Q = -vd + c$. Z równania $(**)$ wyznaczamy $y_Q = vc + d$. Mamy więc współrzędne punktu Q. Analogicznie wyznaczamy współrzędne punktu $R(c+1-vd, vc-d-v)$, po czym przy pomocy wyżej opisanej metody stwierdzamy, że czworokąt $APRQ$ jest równoległobokiem.



Rys. 7

Rozwiązanie V (*liczby zespolone*).
Na płaszczyznę, w której leży trójkąt ABC będziemy teraz patrzeć jak na zbiór liczb zespolonych. Wówczas dodawanie liczb zespolonych to nic innego jak dodawanie odpowiednich wektorów (rys. 7), natomiast przekształcenie

$z \mapsto z \cdot e^{i \cdot \phi}$ jest obrotem płaszczyzny wokół ustalonego punktu (środka układu współrzędnych) o kąt ϕ (rys. 8), [6]. Z podobieństwa trójkątów ACQ, ABP, BCR, mamy:

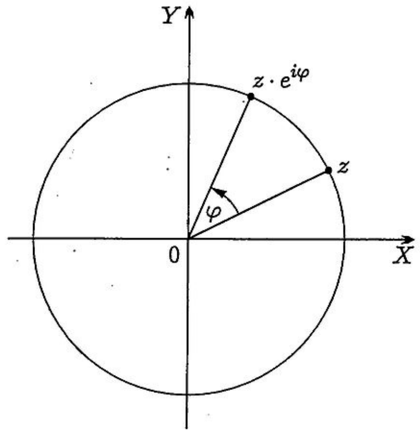
$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BR|}{|BC|} = \frac{|CQ|}{|CA|} = s.$$

Wówczas punkty P, Q, R możemy przedstawić następująco (rys. 9):

$$P = B + (A - B) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta},$$
$$R = B + (C - B) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta},$$
$$Q = A + (C - A) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta}.$$

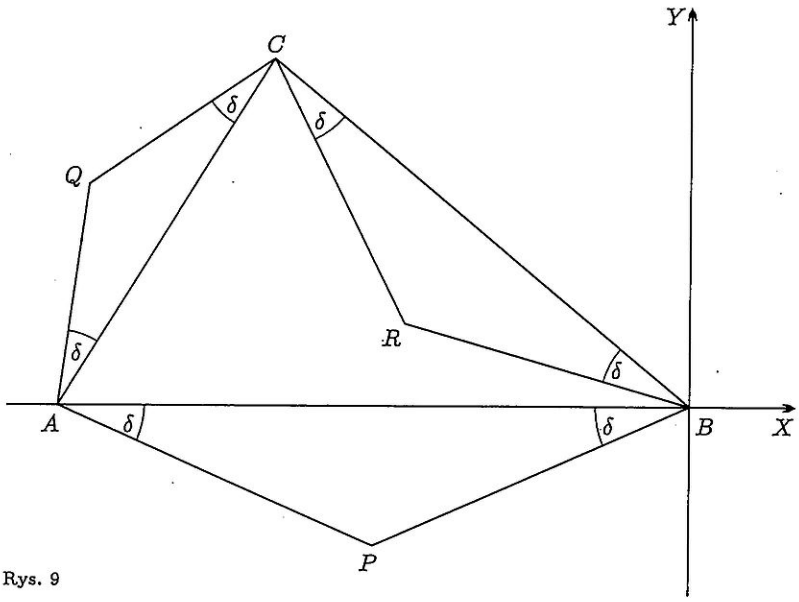
Wtedy

$$\begin{aligned} R - P &= [B + (C - B) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta}] - [B + (A - B) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta}] = \\ &= (C - A) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta} = \\ &= [A + (C - A) \cdot s \cdot e^{i \cdot \delta}] - A = \\ &= Q - A, \end{aligned}$$



Rys. 8

co oznacza, że czworokąt APRQ jest równoległobokiem.



Rys. 9

Literatura

1. Euklides, *Elementy*.
2. D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria poglądowa*, PWN, Warszawa 1956.
3. S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, WSiP, Warszawa 1974.
4. M.E. Kuczma, *Granica pewnego ciągu*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 2 (I 1989).
5. W. Leitzmann, *Der Pythagorische Lehrsatz*, B.G. Taubner, Leipzig 1926.
6. F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1977.
7. A. Mąkowski, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, Biblioteczka Delty 3, WSiP, Warszawa 1980.
8. H. Rademacher, O.Toeplitz, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956.