Rzecz jasna są to te same liczby, co liczby Catalana (red).

Liczby Katalana (notatki z zajęć w Kolegium)

Małgorzata MIKOŁAJCZYK, Wrocław

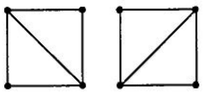
Przez pierwsze 45 min. zajęć uczniowie pracują w sześciu grupach. Każda grupa otrzymuje kartkę z treścią zadania, które ma rozwiązać. Po ok. 10 minutach rozdawane są kolejne kartki z pytaniami pomocniczymi. Osoba prowadząca zajęcia kontroluje pracę wszystkich grup i, w razie potrzeby, udziela dodatkowych wskazówek.

Zadania i wskazówki

GRUPA I – ZADANIE EULERA O TRIANGULACJI

Na ile różnych sposobów można podzielić n-kąt wypukły na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi?

a) Ustal co to znaczy, że dwa podziały są różne.
b) Ile przekątnych potrzeba do dokonania podziału n-kąta?
c) Ile powstaje przy tym trójkątów?
d) Rozwiąż zadanie dla $n = 3, 4, 5, 6$.
e) Spróbuj znaleźć formułę ogólną (rekurencyjną lub nie).



Rys. 1

Podziały mają być różne w sensie mnogościowym. Np. różne triangulacje czworokąta pokazano na rysunku 1. Do dokonania podziału n-kąta potrzebne są i wystarczają $n - 3$ przekątne, co daje $n - 2$ trójkąty w triangulacji.

GRUPA II – ZADANIE KATALANA O NAWIASACH

Mamy ciąg n liter ułożonych w ustalonym porządku. Należy wśród nich rozstawić $n - 1$ par nawiasów tak, aby wewnątrz każdego nawiasu znalazły się dokładnie dwa wyrażenia. Przez „wyrażenie" rozumiemy literę lub dowolny napis zamknięty w nawiasie. Ile jest różnych takich rozstawień?

a) Zauważ, że wystarczy badać położenie nawiasów „otwierających".
b) Rozwiąż zadanie dla $n = 2$, 3, 4, 5.
c) Spróbuj znaleźć formułę ogólną (rekurencyjną lub nie).

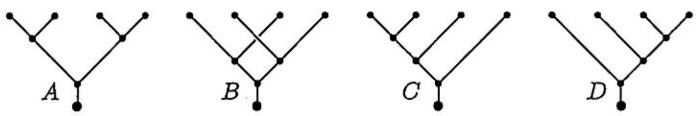
GRUPA III – ZADANIE CAYLEY'A O DRZEWACH BINARNYCH

Ile jest różnych drzew płaskich wyrastających z ustalonego pnia (wierzchołek rzędu 1), o $n + 1$ końcach i pozostałych wierzchołkach rzędu 3 (takie drzewo będzie nazywane binarnym)? Umawiamy się, że rozgałęzienia rysujemy pod kątem prostym, tak aby dwusieczne tych kątów oraz krawędź wychodząca z pnia były pionowe a punkty rozgałęzień znajdowały się na ustalonych poziomach. Wtedy dwa drzewa uważamy za równoważne, gdy jedno z nich można nasunąć na drugie na płaszczyźnie.

Od redakcji
Zapewne Autorka wytłumaczyła uczniom, że „nasuwanie" (użyte w zadaniach dla grupy III i IV) to operacja o definicji – właściwie – indukcyjnej:
1. obrazem pnia jest pień,
2. kolejne gałęzie dorysowyjemy z zachowaniem ORIENTACJI płaszczyzny. Przy tym miejsce, z którego wyrasta gałąź (o ile nie jest to koniec gałęzi poprzedniej generacji) można po gałęzi przesuwać, a same gałęzie rysować dowolnej długości. Ponadto, mimo iż rzecz dzieje się na płaszczyźnie, umawiamy się, że gałęzie mogą się krzyżować bez przecięć.

a) Które z poniższych drzew są równoważne (w sensie podanym w treści zadania)?

• – pień



Rys. 2

b) Rozwiąż zadanie dla $n = 2, 3, 4, 5$.
c) Spróbuj znaleźć formułę ogólną (rekurencyjną lub nie).

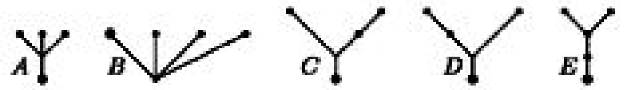
Równoważne są drzewa A i B i tylko one.

GRUPA IV – ZADANIE O DRZEWACH Z USTALONĄ LICZBĄ KRAWĘDZI

Ile jest różnych drzew wyrastających z ustalonego pnia (wierzchołek rzędu 1), o n krawędziach? Dwa drzewa uważamy za równoważne, gdy jedno z nich można nasunąć na drugie na płaszczyźnie naciągając ewentualnie krawędzie.

a) Które z poniższych drzew są równoważne (w sensie podanym w treści zadania)?

• – pień



Rys. 3

b) Ile wierzchołków mają drzewa o n krawędziach?
c) Rozwiąż zadanie dla $n = 2, 3, 4, 5$.
d) Spróbuj znaleźć formułę ogólną (rekurencyjną lub nie).

Równoważne są drzewa A i B i tylko one.

GRUPA V – ZADANIE O ZERACH I JEDYNKACH

Od redakcji
I tu potrzebne jest wyjaśnienie, że ustawiamy od lewej do prawej; słowo „moment" oznacza każde przerwanie ustawiania.

Na $2n$ miejscach ustawiamy n zer i n jedynek tak, aby w każdym momencie użytych jedynek było nie mniej niż zer. Ile jest różnych takich ustawień?

a) Rozwiąż zadanie dla $n = 1, 2, 3, 4$.
b) Spróbuj znaleźć formułę ogólną (rekurencyjną lub nie).

GRUPA VI – ZADANIE O SZACHOWNICY

Dana jest szachownica $n \times n$ z usuniętymi polami pod główną przekątną. Porusza się po niej „kulawa" wieża (w jednym ruchu może przesunąć się tylko o jedno pole). Wieża ta musi przejść z lewego-dolnego w prawy-górny róg planszy w najkrótszy możliwy sposób. Ile jest różnych takich dróg?

a) Rozwiąż zadanie dla $n = 2, 3, 4, 5$.
b) Spróbuj znaleźć formułę ogólną (rekurencyjną lub nie).

Uczniowie wpisują wyniki pracy w grupach do specjalnych tabelek przygotowanych przez prowadzącego zajęcia. Plansze z tabelkami oraz treściami poszczególnych zadań zostają wywieszone w ogólnodostępnym miejscu. W czasie przerwy uczniowie zapoznają się z rezultatami otrzymanymi przez inne grupy, ewentualnie poprawiają zauważone błędy. Oto przykłady wypełnionych tabelek grup V, I i III.

Tabela 1. Grupa V

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
10	1100 1010	111000 110100 110010 101100 101010	11110000 11101000 11100100 11100010 11011000 11010100 11010010 11001100 11001010 10110100 10110010 10111000 10101100 10101010
$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 5$	$a_4 = 14$

Tabela 2. Grupa I

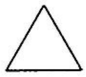
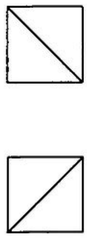
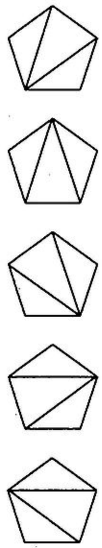
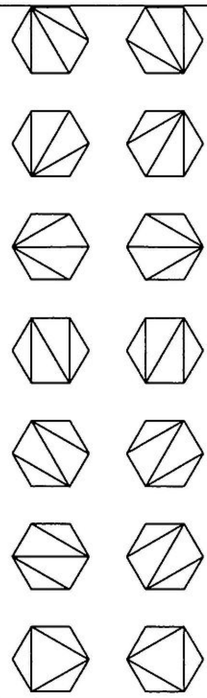
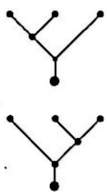
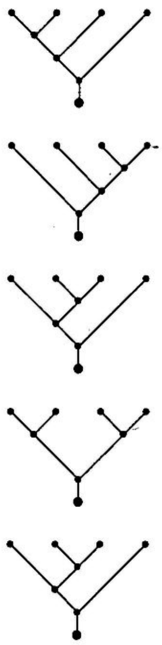
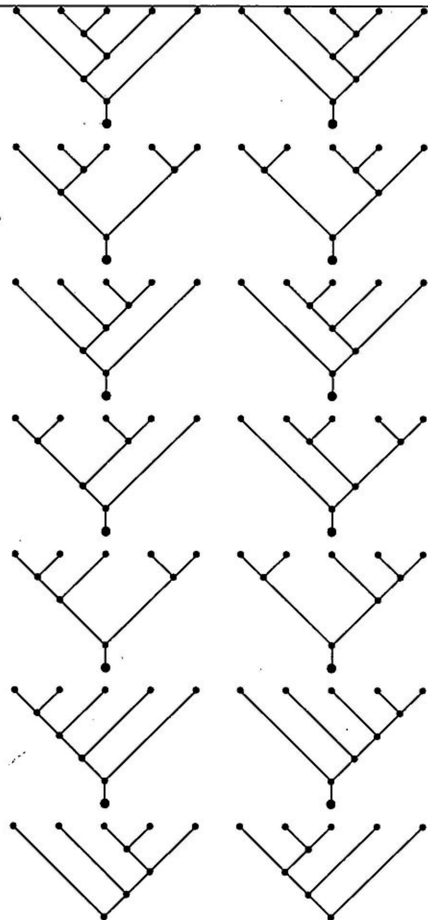
$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
			
$a_1=1$	$a_2=2$	$a3=5$	$a_4=14$

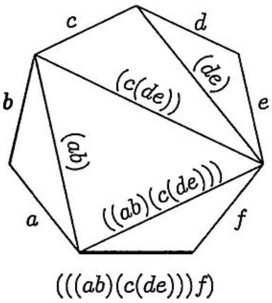
Tabela 3. Grupa III

$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
			
$a_1=1$	$a_2=2$	$a3=5$	$a_4=14$

Jedno zadanie???

Wszyscy zapewne byli zdumieni faktem, że zadania o kompletnie różnych treściach i pozornie nie mające ze sobą nic wspólnego, miały jednakowe rozwiązania. Na dole każdej tabelki widniał bowiem ten sam ciąg liczb: 1, 2, 5, 14. Uczniowie, którzy rozwiązali swoje zadanie także dla większych n (np. w celu sprawdzenia zgodności z zaproponowaną formułą ogólną) otrzymywali zazwyczaj i dalsze wyniki dość zbliżone (ok. 40 i 130). Duża liczba obiektów, które należało w tych przypadkach zliczyć podnosiła ryzyko błędu. Jednak zbieżność danych w tabelkach sześciu grup była na tyle wiarygodna, że nawet jeśli pojawiło się gdzieś odstępstwo od reguły, uczniowie kładli je na karb własnej pomyłki i na ogół, jeszcze w czasie przerwy, znajdowali i poprawiali błąd.

Przekonajmy się, że otrzymana zbieżność wyników nie jest przypadkowa, i że – tak naprawdę – wszyscy rozwiązywali ten sam problem. Kolejno wykażemy równoważność zagadnień rozwiązywanych przez poszczególne grupy.



Rys. 4

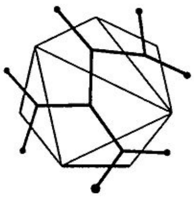
(1 $\Rightarrow$ 2) Każdej triangulacji $(n+1)$-kąta odpowiada pewne ustawienie nawiasów w ciągu n liter.

Niech $n = 6$ i niech dany będzie siedmiokąt z dowolną triangulacją wykonaną nieprzecinającymi się przekątnymi. Ustalamy pewien bok siedmiokąta, a pozostałe opisujemy kolejnymi literami alfabetu. Wszystkie inne odcinki opisujemy umieszczając w nawiasach napisy znajdujące się na dwóch, opisanych wcześniej bokach, które wraz z rozpatrywanym odcinkiem, tworzą trójkąt – patrz rysunek 4.

Podpis uzyskany pod wybranym na początku bokiem siedmiokąta przedstawia rozstawienie nawiasów odpowiadające wybranej triangulacji. Oczywiście różnym triangulacjom odpowiadają różne rozstawienia nawiasów.

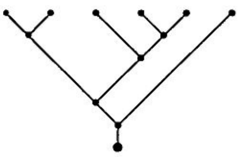
ĆWICZENIE 1

(2 $\Rightarrow$ 1) Jakie triangulacje wielokątów odpowiadają następującym „napisom": $((a(bc))d)$, $(((ab)(cd))e)$, $(a(bc))$, (ab)? Opisz ogólną metodę postępowania.


Rys. 5

(1 $\Rightarrow$ 3) Każdej triangulacji $(n+1)$-kąta odpowiada pewne drzewo binarne o $n+1$ końcach.

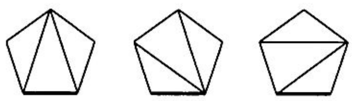
Niech $n = 6$ i niech dany będzie siedmiokąt z dowolną triangulacją wykonaną nieprzecinającymi się przekątnymi. Ustalamy pewien bok siedmiokąta, po czym nad każdym bokiem (na zewnątrz figury) oraz wewnątrz każdego trójkąta triangulacji wybieramy po jednym punkcie. Będą to wierzchołki szukanego drzewa. Krawędzie między nimi prowadzimy w taki sposób, aby w każdym wierzchołku leżącym wewnątrz trójkąta schodziły się trzy krawędzie przecinające boki tego trójkąta – patrz rysunek 5.


Rys. 6

Krawędź przecinająca ustalony bok siedmiokąta stanowi pień konstruowanego drzewa. Zatem triangulacji, którą rozpatrywaliśmy odpowiada drzewo binarne (narysowane na płaszczyźnie w ustalony wcześniej sposób) przedstawione na rysunku 6.

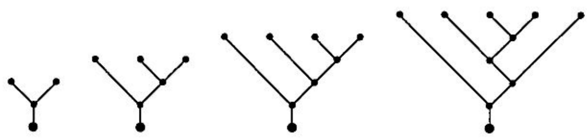
ĆWICZENIE 2

Jakie drzewa odpowiadają poniższym triangulacjom pięciokątów?


Rys. 7

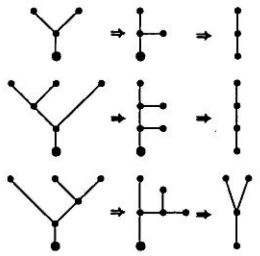
ĆWICZENIE 3

Jakie triangulacje wielokątów odpowiadają następującym drzewom:


Rys. 8

ĆWICZENIE 4

(3 $\Leftrightarrow$ 2) Wykaż, że dla każdego drzewa binarnego o $n+1$ końcach istnieje odpowiadające mu rozstawienie nawiasów w ciągu n liter i na odwrót.



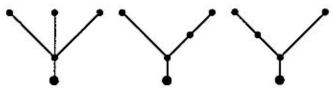
Rys. 9

(3 ⇒ 4) Dla każdego drzewa binarnego o $n+1$ końcach istnieje odpowiadające mu drzewo o n krawędziach.

Bierzemy dowolne drzewo binarne (narysowane w tradycyjny sposób na płaszczyźnie, tzn. z pionową krawędzią wychodzącą z pnia i pionowymi dwusiecznymi kątów prostych między gałęziami) i obracamy jego „koronę” o $-45°$. Teraz wszystkie krawędzie naszego drzewa skierowane są poziomo lub pionowo. Następnie wszystkie krawędzie poziome (i tylko te) ściągamy do punktu otrzymując finalne drzewo o n krawędziach.

ĆWICZENIE 5

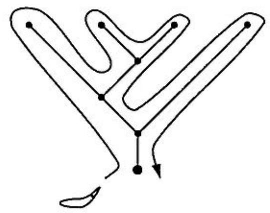
(4 ⇒ 3) Jakie drzewa binarne odpowiadają następującym drzewom:



Rys. 10

Opisz ogólną metodę dokonywania takiej zamiany.

(3 ⇒ 5) Każdemu drzewu binarnemu o $n+1$ końcach odpowiada pewien „napis zero-jedynkowy” długości $2(n-1)$.



⇒ 1101000 ⇒ 110100

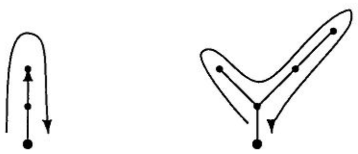
Rys. 11

Niech po naszym drzewie pełznie robaczek startując po lewej stronie pnia, obchodząc całe drzewo i wracając do punktu wyjścia oraz znacząc przy tym wszystkie mijane wierzchołki. Minięcie wierzchołka rzędu 1 oznaczane jest cyfrą zero, a minięcie wierzchołka rzędu 3 – cyfrą jeden. Każdy wierzchołek jest oznaczany w czasie wędrówki tylko jeden raz. Oznacza to, że ponowne przejście robaczka przez pewien wierzchołek nie zmienia już dotychczasowego zapisu. Otrzymany przez robaczka napis zawsze ma na końcu zero (dlaczego?). To ostatnie zero pomijamy.

ĆWICZENIE 6

(5 ⇒ 3) W jaki sposób z „napisu zero-jedynkowego” odtworzyć odpowiadające mu drzewo binarne?

(4 ⇒ 5) Każdemu drzewu o n krawędziach odpowiada pewien „napis zero-jedynkowy” długości $2(n-1)$.



⇒ 100 ⇒ 1011000

Rys. 12

Robaczek pełznie teraz po drzewie zaczynając z lewej strony pierwszego wierzchołka powyżej pnia. Każdy ruch do góry kodowany jest cyfrą jeden, a ruch w dół – cyfrą zero. Tak jak poprzednio pomijamy ostatnie zero w otrzymanym przez robaczka napisie.

ĆWICZENIE 7

(5 ⇒ 4) W jaki sposób z „napisu zero-jedynkowego” odtworzyć odpowiadające mu drzewo o danej liczbie krawędzi.

ĆWICZENIE 8

(2 ⇒ 5) Znajdź przyporządkowanie „napisom zero-jedynkowym” długości $2(n-1)$ odpowiednich rozstawień nawiasów w ciągu n liter i na odwrót.

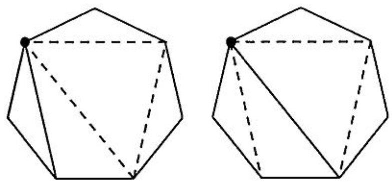
ĆWICZENIE 9

(5 ⇔ 6) Znajdź wzajemną odpowiedniość pomiędzy ruchami wieży na szachownicy $n \times n$ i „napisami zero-jedynkowymi”.

Jak widać wszystkie grupy rozwiązywały problemy równoważne, zatem otrzymana zbieżność wyników nie była przypadkowa. Ciąg zdefiniowany w każdym z zadań I–VI nazywamy ciągiem liczb Katalana. Jego pierwsze wyrazy wynoszą 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429,... Dziwna panuje między nimi zależność. Nie jest ani arytmetyczna, ani geometryczna. Spróbujmy ją odkryć.

Wzory ogólne

Skoro wszystkie grupy rozwiązywały to samo zadanie, zgodność wyników powinna dotyczyć nie tylko kilku pierwszych wyrazów, lecz także ogólnych wzorów opisujących liczby Katalana. Porównajmy je.

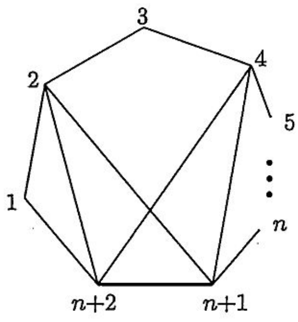

Rys. 13

Podanie ogólnej formuły jest zadaniem bardzo trudnym. Nic dziwnego, że uczniowie mają z tym problemy. Przed wprowadzeniem poprawnych wzorów warto poświęcić kilkanaście minut zajęć na, wspólne z uczniami, obalanie stawianych przez nich hipotez. Na ogół bowiem uczniowie dopasowują wzory jawne do znalezionych czterech pierwszych wyrazów ciągu, ale na dalszych miejscach formuły te zawodzą. Zdarzają się jednak ciekawe wzory rekurencyjne, którym warto przyjrzeć się dokładniej.

Stosunkowo często, w grupie I, pojawia się następujące rozumowanie. Szukamy liczby a_n triangulacji pewnego $(n+2)$-kąta. Powiedzmy, że znamy już rozwiązanie dla wszystkich wielokątów o mniejszej liczbie boków. Podzielmy zatem nasz wielokąt jedną z przekątnych na dwie części. Otrzymujemy dwa wielokąty, z których jeden triangulujemy na a_k sposobów i dla każdej takiej triangulacji mamy a_{n-k} możliwości triangulacji drugiego wielokąta (obie te wielkości już znamy). Po uwzględnieniu różnych możliwości dokonania pierwszego podziału otrzymujemy zależność rekurencyjną:

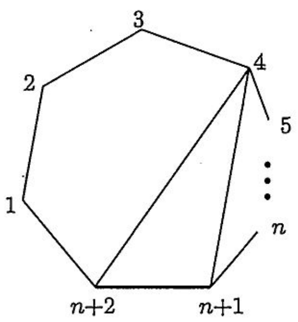
$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + a_3a_{n-3} + \ldots + a_{n-3}a_3 + a_{n-2}a_2 + a_{n-1}a_1,$$



Rys. 14

Łatwo można sprawdzić, że formuła ta nie jest poprawna, jak i wskazać błąd w prowadzącym do niej rozumowaniu. Przyjrzyjmy się bowiem dokładniej opisanemu procesowi triangulacji. Z ustalonego wierzchołka prowadzimy przekątną do wierzchołka oddalonego o jeden; w ten sposób od wielokąta odcinamy trójkąt a pozostałą część triangulujemy na a_{n-1} sposobów. Następnie prowadzimy kolejną przekątną, z tego samego wierzchołka co poprzednio, odcinając od wielokąta czworokąt. Czworokąt, jak wiemy ma dwie różne triangulacje, ale zauważmy, że jedną z nich uwzględniliśmy już w poprzednim przypadku (rysunek 13). W ten sposób, w naszym wzorze a_{n-2} triangulacje liczymy dwukrotnie. Dalej sytuacja jest podobna.



Rys. 15

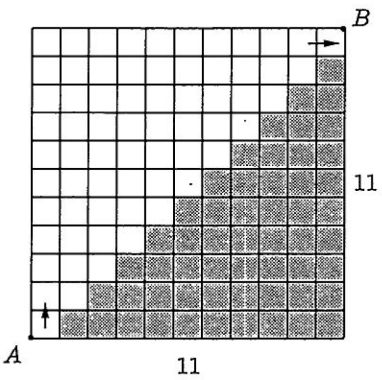
Spróbujmy poprawić powyższe błędne rozumowanie. Ustalmy jeden z boków wielokąta, np. $(n+1, n+2)$. Po dokonaniu triangulacji będzie on bokiem jednego z n możliwych trójkątów (trzeci wierzchołek – rys. 14 – może leżeć w każdym z punktów $1, 2, \ldots, n$).

Ustalmy, w którym trójkącie leży wybrany bok. Niech będzie to $\Delta(4, n+1, n+2)$ – rys. 15. Aby otrzymać wszystkie triangulacje wielokąta zawierające ten właśnie trójkąt musimy dokonać osobno triangulacji pięciokąta $(1, 2, 3, 4, n+2)$ oraz $(n-2)$-kąta $(4, 5, \ldots, n, n+1)$. Zatem wszystkich triangulacji $(n+2)$-kąta zawierających wyróżniony trójkąt jest a_3a_{n-4}.

Uwzględniając teraz różne możliwości zbudowania trójkąta na boku $(n+1, n+2)$ otrzymujemy następującą zależność:

$$(*)\qquad a_n = a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + \ldots + a_{n-3}a_2 + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}.$$

Rachunkowe sprawdzenie potwierdza jej słuszność dla początkowych wyrazów ciągu, ale doświadczenie uczy, że powinniśmy być ostrożni. Jak upewnić się,



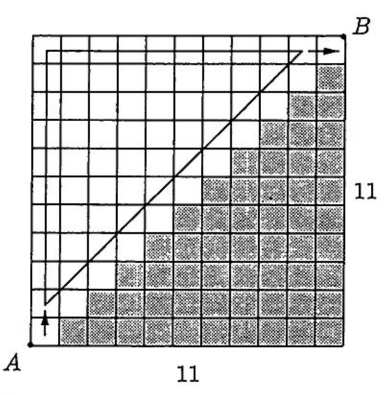
Rys. 16

czy formuła ta jest zawsze poprawna?

Mamy na szczęście do dyspozycji jeszcze pięć równoważnych wersji omawianego zadania. Spróbujmy ten sam wzór uzasadnić zliczając drogi wieży na szachownicy.

ĆWICZENIE 10

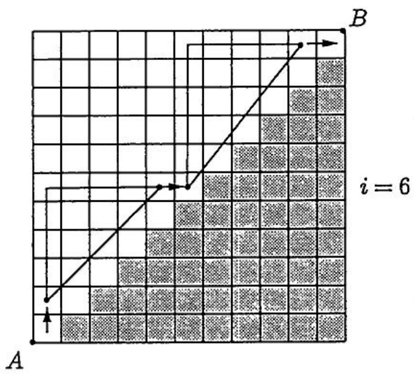
Wieża porusza się po szachownicy nie schodząc poniżej przekątnej i przesuwając się w danym ruchu tylko o jedno pole. Ile najmniej ruchów musi wykonać na planszy o wymiarach 11×11 aby przejść z lewego–dolnego w prawy–górny róg? Ile w tej liczbie jest ruchów „w prawo"? Odpowiedz na te same pytania w przypadku szachownicy 5×7, $n \times n$, $m \times n$.



Rys. 17

Rozważmy szachownicę o rozmiarach 11×11. Mamy znaleźć liczbę a_{10} dróg wieży od punktu A do B, które „nie schodzą" poniżej przekątnej AB. Każda z takich dróg ma ustalone dwa ruchy – pierwszy i ostatni (rys. 16).

Wśród wszystkich dróg od A do B możemy wydzielić te, które nie zahaczają o przekątną. Jest ich tyle ile wszystkich dróg na szachownicy o rozmiarze o jeden mniejszym (czyli a_9 – rys. 17).



Rys. 18

Pozostałe drogi – prędzej czy później – dotykają przekątnej. Policzmy te, które po raz pierwszy robią to w punkcie o współrzędnych (i, i), gdzie $i \in \{2, 3, \ldots, 10\}$. Aby dostać się z punktu A do punktu (i, i) trzeba przejść jedną z dróg jak na szachownicy $(i-1) \times (i-1)$ (jest ich a_{i-2}). Dalszą drogę (od punktu (i, i) do B) można pokonać w dowolny sposób byle nie zejść poniżej przekątnej. Odpowiada to wyborowi drogi wieży na szachownicy o wymiarach $(11-(i-1)) \times (11-(i-1))$ (takich dróg jest $a_{11-(i-1)-1}$).

Stąd wszystkich dróg, które po raz pierwszy dotykają przekątnej w punkcie (i, i) jest $a_{i-2}a_{11-i}$. Uwzględniając teraz różne możliwości wyboru i mamy:

$$a_{10} = a_9 + \sum_{i=2}^{10} a_{i-2}a_{11-i}$$

Trzeba jeszcze zauważyć, że drobny kłopot wystąpi w przypadku $i = 2$. Nie rozważaliśmy do tej pory szachownicy 1×1 odpowiadającej wyrazowi a_0. Rozsądnie jest przyjąć w tym wypadku wartość 1. Nasz wzór przybiera więc postać:

$$a_{10} = a_9 + a_1a_8 + a_2a_7 + a_3a_6 + \ldots + a_6a_3 + a_7a_2 + a_8a_1 + a_9$$

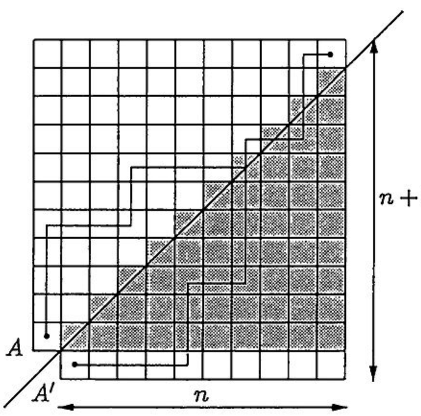
co jest zgodne ze wzorem $(*)$.

Udowodniony wzór rekurencyjny nie jest zbyt praktyczny, gdyż odwołuje się do wszystkich poprzednich wyrazów co, w przypadku obliczania wyrazów bardzo odległych, może być uciążliwe. Istnieje, co prawda, prosty sposób obliczania kolejnych liczb – wystarczy podpisać obliczone już wyrazy dwukrotnie pod sobą, w odwróconym porządku, z drugim wierszem wysuniętym o jeden wyraz, pomnożyć liczby znajdujące się w tych samych kolumnach (uzupełniając zapis jedynkami) i otrzymane wyniki dodać, np.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 5 & 14 \\ 14 & 5 & 2 & 1 & \\ \hline \end{array}$$
$$14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$$

– ale dobrze byłoby znaleźć bardziej praktyczny opis.

Stosunkowo łatwo możemy odkryć jawny wzór na n-tą liczbę Katalana. Raz jeszcze odwołajmy się do zadania o szachownicy. Rozważmy planszę o wymiarach $(n+1) \times (n+1)$ i obliczmy ile jest **wszystkich** możliwych dróg wieży (o minimalnej długości) pomiędzy punktami A i B. Każda taka droga ma długość $2n$ (gdy mierzymy ją liczbą ruchów wykonanych „kulawą" wieżą – patrz ćwiczenie 9.10). Zauważmy, że wystarczy ustalić kiedy wykonujemy ruchy „w prawo", pozostałe są ich konsekwencją, zatem wybór drogi to wybór n spośród $2n$ ruchów. Różnych takich możliwości jest $\binom{2n}{n}$.



Rys. 19

Oczywiście nie wszystkie te drogi spełniają warunki zadania. Musimy więc otrzymany wynik pomniejszyć o liczbę dróg „złych" (tzn. przechodzących poniżej przekątnej). Każda „zła" droga dotyka w pewnym miejscu linii l. Jej odcinek zawarty pomiędzy A i pierwszym punktem zetknięcia z l odbijamy symetrycznie względem l. Każdą drogę „złą" możemy teraz traktować jako pewną drogę pomiędzy punktami A' i B (niezależnie od miejsca pierwszego zetknięcia tej drogi z l). Takich dróg jest $\binom{2n}{n-1}$. Interesująca nas liczba dróg „dobrych" to różnica liczby wszystkich dróg oraz dróg „złych", tzn.

$$(**) \qquad a_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \\ = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Otrzymaliśmy bardzo ładny i prosty wzór!

Euler, rozwiązując zadanie o triangulacjach, odkrył inny jawny wzór opisujący kolejne liczby Katalana:

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!} \text{ dla } n \in \{3, 4, 5 \ldots\}$$

Wzór ten udowodnił indukcyjnie, jednak jego rozumowanie jest trudne. My uzasadnimy ten wzór inaczej. Na początek zauważmy, że wzór odkryty przez Eulera pozwala na wyprowadzenie nowej zależności rekurencyjnej opisującej liczby Katalana. Mamy bowiem:

$$a_1 = \frac{(4 \cdot 3 - 10)}{2!}$$

$$a_2 = \frac{(4 \cdot 3 - 10)(4 \cdot 4 - 10)}{3!} = a_1 \frac{(4 \cdot 4 - 10)}{3}$$

$$a_3 = \frac{(4 \cdot 3 - 10)(4 \cdot 4 - 10)(4 \cdot 5 - 10)}{4!} = a_2 \frac{(4 \cdot 5 - 10)}{4}$$

i ogólnie

$$a_n = a_{n-1} \frac{(4(n+2) - 10}{(n+1)} = a_{n-1} \frac{(4n-2)}{(n+1)}$$

Ta formuła jest „przyjemniejsza" niż wzór (*), gdyż odwołuje się tylko do poprzedniego wyrazu. Sprawdzimy teraz, że wyprowadzony wcześniej wzór (**) spełnia ten związek rekurencyjny (co dowodzi, że zarówno sama rekurencja jak i wzór podany przez Eulera opisują poprawnie liczby Katalana). Mamy:

$$a_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

oraz

$$a_{n-1} \frac{(4n-2)}{n+1} = \frac{(2n-2)! 2(2n-1)}{n(n-1)!(n-1)!(n+1)} = \frac{(2n-2)!(2n-1)2n}{n!n!(n+1)} =$$

$$= \frac{2n!}{(n+1)n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = a_n$$

ĆWICZENIE 11

Sprawdź, że nieparzyste liczby Katalana (większe niż jeden) stoją w ciągu na miejscach o jeden większych niż potęgi dwójki.

ĆWICZENIE 12

W zadaniu Katalana o nawiasach napis (ab), możemy interpretować jako iloczyn liczb a i b. Wtedy zmiana sposobu rozstawienia nawiasów w danym ciągu liter nie zmienia wartości wyrażenia. Czy podobnie jest, gdy przez (ab) będziemy rozumieli iloraz (sumę, różnicę) liczb a i b? A jeśli nawias zastąpimy znakiem modułu?

ĆWICZENIE 13

$2n$ żołnierzy, z których każdy jest innego wzrostu, ustawiamy w dwuszeregu tak, aby od lewej do prawej w każdym szeregu, żołnierze stali „wg wzrostu" oraz by niższego żołnierza zawsze krył wyższy. Dowódca twierdzi, że jest możliwe tylko jedno takie ustawienie. Czy ma rację?

Liczby Bella

W górach jest wszystko co kocham
Wszystkie wiersze są w bukach
Zawsze kiedy tam wracam
Biorą mnie klony za wnuka Jerzy Harasymowicz „*W górach*"

Każdy wiersz ma charakterystyczny dla siebie układ rymów. W powyższym fragmencie wiersza Jerzego Harasymowicza mamy do czynienia z rymem typu abcb. Taki układ rymów spotykamy u tego poety bardzo często, ale stosuje on też inne typy rymów.

Przyjaciele drodzy którzy jemioły czcicie
Dobrze że chodzicie światem
Wkrótce jodełkę zieloną spalicie
Aby darzyła was ciepłym latem Jerzy Harasymowicz „*W lesie listopadowym*"

Stukają strychu stare grzechy
I bierze góra – cerkiew na rogi
I siecze siecze w ganek nasz
Ulewy chmiel zielony Jerzy Harasymowicz „*Wierchomla*"

W powyższych fragmentach wierszy mamy do czynienia z układem rymów typu *abab* oraz *abcd*.

ĆWICZENIE 14
Jakie inne typy rymów mogą występować w 4-wersowych zwrotkach? Podaj odpowiednie przykłady.

Ile różnych układów rymów może wystąpić w wierszu o n-wersowych zwrotkach?

Policzmy dla kilku wartości n:
zwrotka 1-wersowa $\{a\}$,
zwrotka 2-wersowa $\{aa, ab\}$,
zwrotka 3-wersowa $\{aaa, aab, aba, abb, abc\}$,
zwrotka 4-wersowa $\{aaaa, aaab, aaba, abaa, aabb, abab, abba, abbb, aabc, abac, abca, abbc, abcb, abcc, abcd\}$.

Uczniowie zasugerowani liczbami Katalana, na ogół, znajdują tylko 14 przykładów rymów dla zwrotki 4-wersowej.

Otrzymany ciąg wartości wygląda dość znajomo: 1, 2, 5, 15. Trzy pierwsze wyrazy zgadzają się z liczbami Katalana. Na czwartym miejscu wszystko się psuje – zamiast 14 mamy 15. Dalej rozbieżności są jeszcze większe. Dla zwrotek 5-wersowych dostajemy 52 rymy, a dalej 203 i 877. Otrzymany ciąg liczb nazywamy liczbami Bella od nazwiska amerykańskiego matematyka Erica Bella, który kilka swoich prac poświęcił tym liczbom.

Początkowa zbieżność liczb Bella z liczbami Katalana wcale nie jest przypadkowa. Połączmy kreską te wersy wiersza, które się rymują. W naszym zapisie symbolicznym wygląda to następująco:

$$a,\ aa,\ ab,\ aaa,\ aab,\ aba,\ \ldots \text{ itd.}$$

Czasem narysowane w ten sposób łuki mogą się przecinać. Otrzymujemy wtedy **rymy krzyżowe**. Pozostałe nazywamy **rymami prostymi**. Zwrotka 3-wersowa nie dopuszcza oczywiście rymów krzyżowych. Ile typów rymów krzyżowych może wystąpić w zwrotce 4-wersowej?

Liczba Katalana o numerze n podaje liczbę rymów prostych dla n-wersowej zwrotki. Dowód tego faktu jest jednak skomplikowany.

ĆWICZENIE 15
Pisanie sonetów jest niezwykle trudnym zadaniem. Poetę obowiązują bowiem sztywne rygory co do rymu i rytmu wiersza. Gdyby jednak machnąć na nie ręką, ile różnych typów rymów uzyskalibyśmy w sonecie?

ĆWICZENIE 16
Uzupełnij definicję:

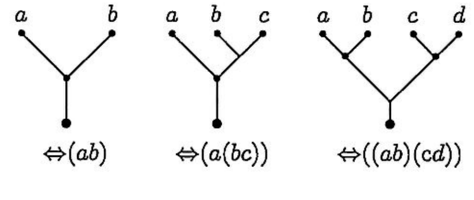
n-ta liczba Bella, to liczba wszystkich .... zbioru n-elementowego.

ĆWICZENIE 17
Pokaż, że $(n+1)$-szą liczbę Bella możemy obliczyć za pomocą wcześniejszych używając następującego wzoru:

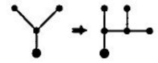
$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

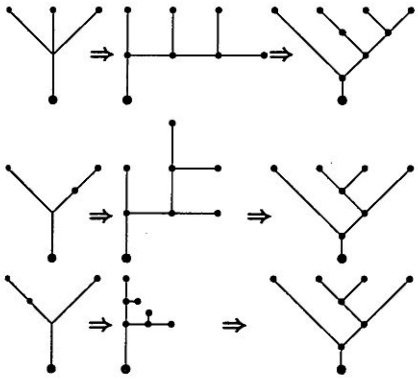
Odpowiedzi – podpowiedzi

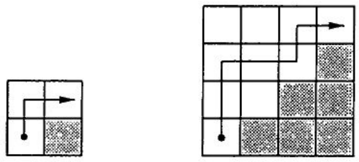
ĆWICZENIE 4



Rys. 20 $\Leftrightarrow(ab)$ $\Leftrightarrow(a(bc))$ $\Leftrightarrow((ab)(cd))$


Rys. 21


Rys. 22


⇔ 10 ⇔ 110010

Rys. 23

ĆWICZENIE 5
Wierzchołki rzędu jeden pozostawiamy bez zmian; w wierzchołkach rzędu dwa, z prawej strony pnia, dodajemy prostopadłą krawędź; w wierzchołkach wyższych rzędów krawędzie wychodzące z danego wierzchołka rozsuwamy tak, jak pokazano na rysunku obok.

Na koniec koronę otrzymanego drzewa obracamy o 45° (patrz rys. 22).

ĆWICZENIE 8
W ciągu liter z rozstawionymi nawiasami, nawiasy zamykające możemy zaniedbać. Są one konsekwencją rozstawienia nawiasów otwierających i reguł dotyczących ustawiania nawiasów. Mając dany n-literowy napis z rozstawionymi nawiasami, każdy nawias otwierający zastępujemy jedynką, a każdą literę – zerem. Przy zamienianiu „napisu zero-jedynkowego" na ciąg liter i nawiasów postępujemy odwrotnie dostawiając jeszcze, w odpowiednich miejscach, nawiasy zamykające.

$$
\begin{array}{c}
(\,(\,(\,a\,b\,)\,c\,)\;d\,)\\
1\,1\,1\,0\,0\;\;0\;\;\cancel{0}
\end{array}
$$

ĆWICZENIE 9
1 – ruch w pionie, 0 – ruch w poziomie (patrz rys. 23).

Użytych jedynek jest zawsze nie mniej niż zer, więc każda tak zakodowana droga, mieści się w dostępnej nam części szachownicy.

ĆWICZENIE 10
Na szachownicy $n \times n$ każda droga „kulawej" wieży z lewego-dolnego do prawego-górnego rogu ma długość $2n-2$ (w tym $n-1$ ruchów wykonywanych jest „w górę"). Dla szachownicy $m \times n$ długość ta wynosi $m+n-2$.

ĆWICZENIE 12
Wartość wyrażenia nie zależy od sposobu rozstawienia nawiasów, gdy działanie (ab) jest łączne. Znak modułu nie pozwala na odróżnienie kreski otwierającej i zamykającej. Czy w tym przypadku tracimy jednoznaczność odczytania napisu?

ĆWICZENIE 13
Dowódca ma zawsze rację (!?). Ustawiamy żołnierzy w szeregu „wg wzrostu" i nadajemy im kolejne numery od 1 do $2n$. W „napisach zero-jedynkowych" długości $2n$ zawierających tyle samo zer co jedynek i mających dodatkowo tę własność, że w każdym momencie użytych zer jest nie więcej niż jedynek, również numerujemy wszystkie cyfry liczbami od 1 do $2n$. Zaczynamy teraz ustawiać żołnierzy w dwuszeregu od prawej strony (od najniższego). Jeżeli numerowi danego żołnierza odpowiada w „napisie" cyfra 1, to ustawiamy go w I rzędzie, a jeśli 0 – to w II (zawsze na pierwszym z prawej wolnym miejscu). Wtedy każde ustawienie spełnia wymogi regulaminu musztry (dlaczego?), zatem ich liczbę opisuje n-ta liczba Katalana.

ĆWICZENIE 15
Sonet jest wierszem 14 wersowym, zatem liczbę różnych rymów podaje 14 liczba Bella, tj. 190 899 322.

ĆWICZENIE 16
n-ta liczba Bella to liczba różnych podziałów zbioru n-elementowego (czyli liczba różnych relacji równoważności, które można wprowadzić w tym zbiorze).

ĆWICZENIE 17
Niech B_n oznacza n-tą liczbę Bella. Dokonujemy pewnego podziału zbioru $(n+1)$-elementowego i patrzymy na grupę, w której znalazł się $(n+1)$-szy element. Niech grupa ta liczy poza nim jeszcze i elementów ($i \in \{0, \dots, n\}$). Taką grupę możemy wybrać na $\binom{n}{i}$ sposobów. Po każdym takim wyborze pozostaje jeszcze $n-i$ elementów, które dzielimy na grupy na B_{n-i} sposobów. Zatem wszystkich możliwych podziałów jest

$$
B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} B_{n-i} = \binom{n}{n} B_n + \binom{n}{n-1} B_{n-1} + \binom{n}{n-2} B_{n-2} +
$$

$$
\dots + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{0} B_0 = \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i
$$

odwracamy kolejność sumowania.

Literatura

[1] Bryant V., *Aspects of Combinatorics*, Cambridge University Press, 1993
[2] Gardner M., Mathematical Games, *Catalan numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places*, Scientific American, June 1976, 120–125
[3] Lipski W., Marek W., *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986