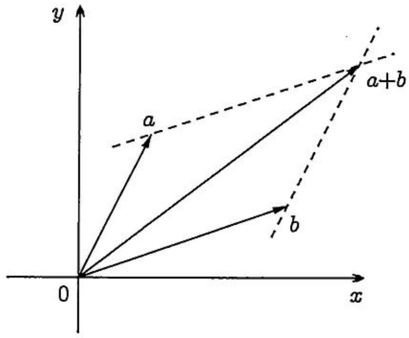
Banach, Cantor i fraktale

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Płaszczyzna, a nawet prosta to bardzo bogate środowisko do prowadzenia obserwacji matematycznych. Dziać się tam mogą dziwne i ciekawe rzeczy. Aby je precyzyjnie opisać i lepiej zrozumieć przypomnimy kilka pojęć.

Naturalne jest, że płaszczyznę utożsamiamy ze zbiorem $\mathbb{R}^2$. W takim zbiorze wiemy (z nauki szkolnej) jak rozumieć stwierdzenia „dodać punkt a do punktu b" (rys. 1), „pomnożyć punkt a przez liczbę λ" (rys. 2). Dzięki umiejętności wyznaczania odległości pomiędzy punktami zbioru $\mathbb{R}^2$, np. za pomocą wzoru



Rys. 1

$$d_2(a,b) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2},$$

gdzie $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y) \in \mathbb{R}^2$, wiemy co to znaczy „blisko", „daleko". Należy w tym miejscu zaznaczyć, że istnieje wiele sposobów mierzenia odległości na płaszczyźnie. Można to robić na przykład za pomocą wzorów:

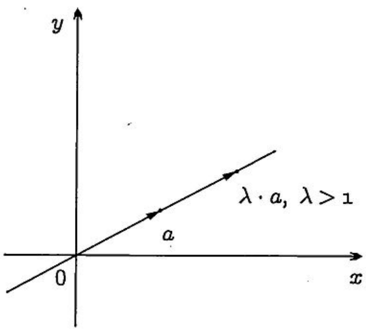
$$d_p(a,b) = (|a_x - b_x|^p + |a_y - b_y|^p)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Wszystkie te funkcje, dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, spełniają następujące naturalne warunki:

(1) $d_p(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,

(2) $d_p(a,b) = d_p(b,a)$,

(3) $d_p(a,b) \leq d_p(a,c) + d_p(c,b)$.



Rys. 2

Funkcje te nazywamy *metrykami*, a parę $(\mathbb{R}^2, d_p)$ nazywamy *przestrzenią metryczną*. W zbiorze M wyposażonym w metrykę d (sposób mierzenia odległości) możemy mówić o granicy ciągu punktów. Wydaje się, że pojęcie to jest intuicyjnie zrozumiałe – *granica* to taki punkt, do którego dążą wyrazy ciągu w miarę wzrostu ich numerów. Precyzyjniej:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} d(a_n, g) < \epsilon.$$

Na przykład w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ciąg punktów $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, $n = 1, 2, \ldots$, jest ciągiem zbieżnym do punktu $(0,0)$, natomiast ciąg punktów $b_n = (n, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \ldots$, nie ma granicy.

Louis Augustin Cauchy (1789–1857) badając ciągi na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ (wyposażonej w metrykę naturalną $d(x,y) = |x - y|$) zauważył, że można tam problem zbieżności ciągu rozstrzygnąć bez konieczności wyznaczania jego granicy (co czasem jest zadaniem dosyć kłopotliwym). Udowodnił on następujące twierdzenie (patrz np. [5]):

TWIERDZENIE 1 (Cauchy). *Ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba n_0, że dla wszystkich $n, m > n_0$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.* ■

Warunek z tego twierdzenia – zwany obecnie *warunkiem Cauchy'ego* – wyrażamy też następująco: końcówka ciągu (czyli wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem skończonej liczby wyrazów początkowych) może mieć dowolnie małą średnicę.

PRZYKŁAD 1. Aby stwierdzić zbieżność ciągu

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

wystarczy zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej s,

$$|x_{n+s} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+s)^2} <$$
$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+s-1)(n+s)} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+s-1} - \frac{1}{n+s} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} < \frac{1}{n}.$$

Zatem dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, że $|x_m - x_n| < \epsilon$ dla $m, n > n_0$. Gwarantuje to zbieżność ciągu (x_n). Wyznaczenie jego granicy, która wynosi $\frac{\pi^2}{6}$, może nastręczać trudności. □

Przedstawiona tu własność Cauchy'ego nie jest niezmiennikiem topologicznym. Przestrzeń liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest homeomorficzna z przedziałem $(0, 1)$. Ciąg $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ spełnia warunek Cauchy'ego (w metryce naturalnej), ale nie jest zbieżny w przestrzeni $(0, 1)$ – nie ma w tym zbiorze granicy.

Nie mniej we wszystkich przestrzeniach $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$ spełnianie przez ciąg warunku Cauchy'ego gwarantuje jego zbieżność.

Warunek Cauchy'ego zrobił w matematyce oszałamiającą karierę. Za sprawą prac Stefana Banacha (1898–1945) wzrosło znaczenie tzw. przestrzeni zupełnych. Mówimy, że przestrzeń metryczna (M, d) jest *zupełna*, gdy każdy ciąg punktów tej przestrzeni spełniający warunek Cauchy'ego jest w tej przestrzeni zbieżny. W tego typu przestrzeniach udało się wykazać wiele ważnych związków. Jednymi z prostszych, ale zarazem mającymi znaczące następstwa są twierdzenia Georga Cantora (1845–1918):

TWIERDZENIE 2 (dla przestrzeni zupełnej). *Jeżeli w przestrzeni metrycznej zupełnej (M, d) dany jest ciąg zbiorów (F_n), niepustych, domkniętych, o średnicach dążących do zera* $(\mathrm{diam}(F_n) \to 0)$ *oraz spełniających warunek $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, to zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ składa się dokładnie z jednego elementu.*

DOWÓD. Ponieważ średnice zbiorów F_n dążą do zera (ze wzrostem numeru n), więc ciąg (p_n) określony regułą: $p_n \in F_n$, $n = 1, 2, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Przestrzeń jest zupełna, więc istnieje punkt $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. W ciągu (p_n) wszystkie wyrazy o numerach większych od n należą do zbioru F_n, który jako domknięty zawiera granicę p. Ponieważ tak się dzieje dla $n = 1, 2, \ldots$, więc $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Gdyby istniał punkt $q \neq p$ taki, że $q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ to mielibyśmy $0 < d(p, q) \leq \mathrm{diam}(F_n)$ dla każdego n, co jest sprzeczne z założeniem, że średnice zbiorów F_n dążą do zera. ■

Proszę się teraz zastanowić, czy rezultat ten pozostaje prawdziwy, gdy zrezygnujemy z założenia, że średnice zbiorów F_n dążą do zera?

PRZYKŁAD 2. Rozważmy zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych zbieżnych w zwykłym sensie do zera wyposażony w metrykę

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i \geq 1\},$$

gdzie $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots)$. Tak otrzymaną przestrzeń metryczną oznaczamy przez c_0. Można wykazać, że jest to przestrzeń zupełna (patrz [7]). W tej przestrzeni zbiory

$$E_n = \{\mathrm{x} \in c_0 : \max\{|x_i| : i \geq 1\} \leq 1 \text{ i } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1\},$$

$n = 1, 2, \ldots$, są niepuste, domknięte, mają średnicę równą dwa, oraz $E_{n+1} \subset E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Jednak $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Jedynym elementem, który mógłby należeć do tego iloczynu jest ciąg $(1, 1, 1, \ldots) \notin c_0$. □

W węższej klasie przestrzeni metrycznych, tzw. przestrzeniach *zwartych* (patrz [6]) nie musimy zakładać, że średnice zbiorów F_n dążą do zera. W tych przestrzeniach mamy następującą wersję twierdzenia Cantora (jego uzasadnienie jest analogiczne do dowodu poprzedniej wersji – zamiast zupełności wykorzystujemy zwartość):

TWIERDZENIE 3 (dla przestrzeni zwartych). *Jeżeli w przestrzeni zwartej M dany jest ciąg zbiorów (F_n), niepustych, domkniętych, spełniających warunek $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.* ■

W tym przypadku nie twierdzimy, że iloczyn mnogościowy zbiorów F_n jest jednoelementowy, choć może tak być, gdy np. dodatkowo założymy, że średnice zbiorów F_n dążą do zera.

Z warunku zwartości możemy zrezygnować (na rzecz słabej zwartości) w jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha [3]:

Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha i (F_n) jest ciągiem zbiorów niepustych, domkniętych, ograniczonych, wypukłych oraz takich, że $F_{n+1} \subset F_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. ■

Wróćmy teraz do rozważań na płaszczyźnie i zastanówmy się nad prawdziwością następującej obserwacji: gdy z lecącego nad Polską samolotu zrzucimy mapę naszego kraju, to zawsze upadnie ona tak, że jeden punkt na mapie będzie leżał dokładnie na punkcie terenu, który ten punkt mapy przedstawia.

Stwierdzenie to jest poglądową ilustracją ważnego twierdzenia, tzw. zasady odwzorowań zwężających, którą Banach ogłosił w 1922 roku.

TWIERDZENE 4 (Banach). *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeżeli $T : M \to M$ jest odwzorowaniem zwężającym (kontrakcją), tzn.*

$$\exists_{L<1} \forall_{x,y \in M} d(Tx, Ty) \leq L \cdot d(x, y),$$

to istnieje dokładnie jeden punkt $x_\infty \in M$ taki, że $Tx_\infty = x_\infty$ (x_∞ nazywamy punktem stałym odwzorowania T).

Twierdzenie to doczekało się wielu rozmaitych uzasadnień. Oto dwa całkowicie różne jego dowody.

DOWÓD I (niekonstruktywny). Niech $a = \inf\{d(x, Tx) : x \in M\}$. Wykażemy, że $a = 0$. Niech $\epsilon > 0$. Wybieramy punkt $x \in M$ taki, że $d(x, Tx) \leq a + \epsilon$. Wtedy

$$a \leq d(Tx, T^2x) \leq L \cdot d(x, Tx) \leq L \cdot (a + \epsilon).$$

Ponieważ $L < 1$, a ϵ może być dowolnie małe, więc musi być $a = 0$. Wykażemy teraz, że infimum to jest osiągane. W tym celu określamy zbiory

$$M_n = \{x \in M : d(x, Tx) \leq \frac{1}{n}\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Są one niepuste, domknięte, $M_{n+1} \subset M_n$, a ponadto dla $x, y \in M_n$:

$$d(x, y) \leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) + d(Ty, y) \leq 2 \cdot \frac{1}{n} + L \cdot d(x, y),$$

czyli $d(x, y) \leq \frac{2 \cdot \frac{1}{n}}{1 - L}$. Stąd wynika, że średnice zbiorów M_n dążą do zera. Zatem na podstawie twierdzenia Cantora $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \{x_\infty\}$ i $Tx_\infty = x_\infty$. ■

DOWÓD II (konstruktywny). Wybieramy dowolnie punkt $x_0 \in M$. Jeżeli $Tx_0 = x_0$, to wykazujemy, że jest to jedyny punkt stały. W przypadku, gdy $Tx_0 \neq x_0$, określamy ciąg $\{x_n\}$ w następujący sposób: $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wówczas dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$ mamy oszacowanie:

$$(*) \qquad d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot d(x_0, Tx_0),$$

co oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ przestrzeń M jest zupełna, więc istnieje $x_\infty \in M$ taki, że $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$. Wobec ciągłości odwzorowania T, mamy:

$$Tx_\infty = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

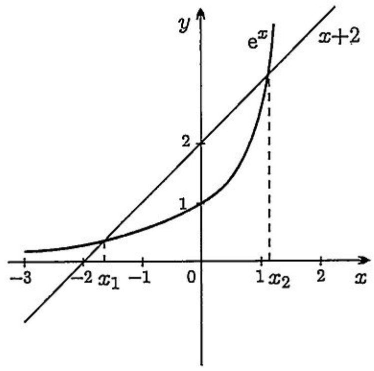
Taki punkt stały jest dokładnie jeden. Gdyby $x \neq y$ i $Tx = x$ i $Ty = y$, to wówczas

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq L \cdot d(x, y) < d(x, y),$$

co jest niemożliwe. ■

Z powyższego uzasadnienia wynika, że za pomocą ciągu iteracyjnego $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie punkt $x_0 \in M$ jest wybierany dowolnie, można aproksymować punkt stały kontrakcji Tz zadaną dokładnością. Skuteczność tego przybliżenia pokazuje wzór (we wzorze $(*)$ przechodzimy z p do ∞):

$$d(x_n, x_\infty) \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot d(x_0, Tx_0).$$



Rys. 3

Zasada odwzorowań zwężających jest wykorzystywana do rozwiązywania wielu problemów. Przy jej pomocy można np. przybliżać rozwiązania równań, które nie poddają się żadnym standardowym metodom.

PRZYKŁAD 3. Poniższe równanie

$$(**) \qquad e^x = x + 2.$$

ma dwa pierwiastki, co stwierdzamy po narysowaniu odpowiednich wykresów (rys. 3). Do przybliżenia pierwiastka x_1 można wykorzystać funkcję $T(x) = e^x - 2$ (jak to zrobić?). Niestety za pomocą tej funkcji nie możemy aproksymować punktu x_2 (dlaczego?). Aby przybliżyć punkt x_2 wykorzystamy prostą obserwację: przekształcenie dane T i odwrotne do niego T^{-1} (gdy takie istnieje) mają te same punkty stałe. Ponieważ

$$y = e^x - 2 \Leftrightarrow y + 2 = e^x \Leftrightarrow \ln(y+2) = x,$$

więc funkcją odwrotną do T jest funkcja $T^{-1}(x) = \ln(x+2)$. Równanie $x = \ln(x+2)$ jest więc równoważne równaniu $(**)$ i ma te same rozwiązania. Korzystając z funkcji $T_1(x) = T^{-1}(x) = \ln(x+2)$ możemy aproksymować punkt x_2. □

Szersze omówienie zastosowań twierdzenia Banacha w klasycznej analizie można znaleźć w monografii [10].

My zwrócimy teraz uwagę na związek idei zawartej w zasadzie odwzorowań zwężających z pewnymi obiektami geometrycznymi zwanymi fraktalami. Wzbudzają one w ostatnich latach duże zainteresowanie.

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Tworzymy nowy zbiór $\mathcal{F}(X)$, którego elementami są niepuste, zwarte podzbiory przestrzeni X. W zbiorze $\mathcal{F}(X)$ zdefinujemy metrykę. Przypomnijmy, że δ-otoczeniem zbioru $A \in \mathcal{F}(X)$ nazywamy zbiór

$$A_\delta = \{x \in X : d(a,x) \le \delta \text{ dla pewnego } a \in A\}.$$

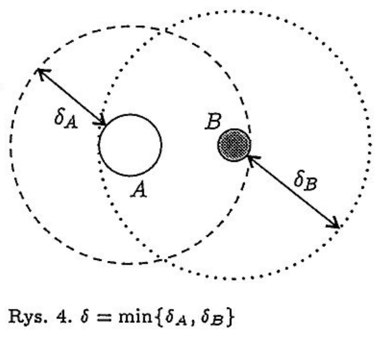
Wówczas proste rozumowanie przekonuje nas, że funkcja

$$D : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, +\infty)$$

dana wzorem

$$D(A,B) = \inf\{\delta \ge 0 : A \subset B_\delta \wedge B \subset A_\delta\}$$

(rys. 4) spełnia warunki (1), (2) i (3). Jest to tzw. *metryka Hausdorffa* na zbiorze $\mathcal{F}(X)$. Można również wykazać, że przestrzeń $(\mathcal{F}(X), D)$ jest zupełna [2].



Rys. 4. $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$

Nasze rozważania ograniczymy teraz do przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^2$ (choć można je prowadzić w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$). Wyobraźmy sobie, że danych mamy m kontrakcji $T_1, T_2, \ldots, T_m : E \to E$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^2$. Możemy wówczas zdefiniować operację $T : \mathcal{F}(E) \to \mathcal{F}(E)$ w następujący sposób:

$$T(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \ldots \cup T_m(A), \quad A \in \mathcal{F}(E),$$

gdzie $T_i(A) = \{T_i(x) : x \in A\}$. Dla tak określonego odwzorowania mamy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 5. *Dla danych kontrakcji $T_1, T_2, \ldots, T_m : E \to E$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^2$ i $L_i < 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$, istnieje dokładnie jeden niepusty, zwarty zbiór F taki, że $F = T(F) = \bigcup_{i=1}^m T_i(F)$. Ponadto:*

(i) *dla dowolnego $A \in \mathcal{F}(E)$ takiego, że $T_i(A) \subset A$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $F = \bigcap_{k=1}^\infty T^k(A)$;*

(ii) *dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(E)$ iteracje $T^k(B)$ są zbieżne do E w metryce Hausdorffa przy k dążącym do ∞.*

DOWÓD. Niech A będzie dowolnym zbiorem w $\mathcal{F}(E)$ takim, że $T_i(A) \subset A$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, m$ (np. takim zbiorem jest E). Wtedy $T^k(A) \subset T^{k-1}(A)$, więc $\{T^k(A)\}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów zwartych, które zgodnie z twierdzeniem Cantora mają niepustą, zwartą część wspólną $F = \bigcap_{k=1}^\infty T^k(A)$.

Ponieważ $\{T^k(A)\}$ jest ciągiem zstępującym, więc $T(F) = F$. Aby sprawdzić, że taki zbiór jest dokładnie jeden zauważmy, że dla $A, B \in \mathcal{F}(E)$ mamy:

$$(***) \quad D(T(A), T(B)) = D\Big(\bigcup_{i=1}^{m} T_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} T_i(B)\Big) \leq$$
$$\leq \max\{D(T_i(A), T_i(B)) : 1 \leq i \leq m\} \leq$$
$$\leq \max\{L_i : 1 \leq i \leq m\} \cdot D(A, B) < D(A, B).$$

Gdyby zatem istniały zbiory $A, B \in \mathcal{F}(E)$ takie, że $T(A) = A$ i $T(B) = B$, to musiałoby być $D(A, B) = 0$, co implikuje $A = B$. Ponadto, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(E)$,

$$D(T(B), F) = D(T(B), T(F)) \leq \max\{L_i : 1 \leq i \leq m\} \cdot D(B, F),$$
$$D(T^k(B), F) \leq c^k \cdot D(B, F) \to 0,$$

przy k dążącym ∞, gdyż $c = \max\{L_i : 1 \leq i \leq m\} < 1$. ■

Inny dowód tego faktu, oparty na twierdzeniu wyboru Blaschke'go można znaleźć w pracy [1].

Zobaczmy teraz jak „działa" powyższe twierdzenie.

PRZYKŁAD 4. Rozważymy zbiór $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ z naturalną metryką i dwa odwzorowania zwężające $T_1, T_2 : E \to E$ dane wzorami:

$$T_1(x) = \frac{1}{3} \cdot x, \quad T_2(x) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3}.$$

Wówczas

$$T(E) = T_1(E) \cup T_2(E) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$
$$T^2(E) = T(T(E)) = T_1(T(E)) \cup T_2(T(E)) =$$
$$= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \text{ itd.}$$

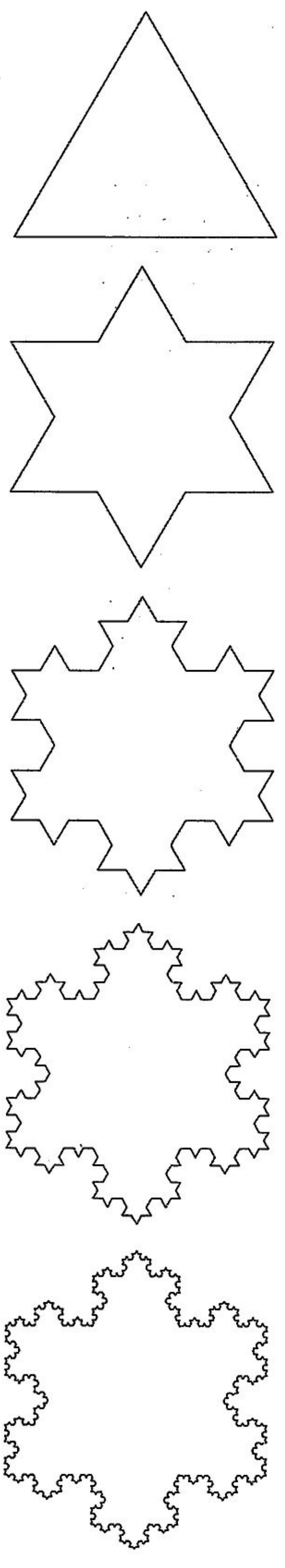
Ogólnie, zbiór $T^k(E)$ składa się z 2^k odcinków o długościach równych 3^{-k}, $k = 1, 2, \ldots$. Zbiór graniczny $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(E)$ jest dobrze znanym *zbiorem Cantora*. Otrzymaliśmy go tutaj jako zbiór niezmienniczy wyżej określonej operacji T. □

Warto zatrzymać się na chwilę przy zbiorze Cantora, który ma szereg interesujących własności (ich uzasadnienie jest kształcącym ćwiczeniem, patrz np. [6,7]):
– jest zbiorem nieprzeliczalnym;
– jest zbiorem miary Lebesgue'a zero;
– jest zbiorem doskonałym;
– jest zbiorem w sobie gęstym;
– jest zbiorem brzegowym;
– jest zbiorem I kategorii;
– wykorzystując zbiór $\mathcal{C}$ można określić tzw. „diabelskie schody Lebesgue'a" – funkcję $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ciągłą, słabo rosnącą, której pochodna istnieje wszędzie z wyjątkiem punktów zbioru Cantora.

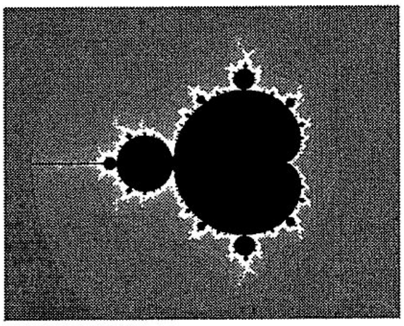
ZADANIE. Pokazać, że odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$ ma 0 jako punkt stały i zbiór Cantora $\mathcal{C}$ jest zbiorem niezmienniczym względem tego odwzorowania $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Ponadto, jeżeli $x \in \mathcal{C} - \{0\}$, to iteracje $f^m(x)$ są gęste w $\mathcal{C}$, a jeżeli $x - \mathcal{C}$, to $f^m(x) \to -\infty$, gdy m dąży do ∞. □

Wyżej opisany zbiór podał Cantor w 1883 roku w pracy *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Podstawy ogólnej teorii mnogości) jako ilustrację faktu, że doskonałość zbioru nie wystarczy do jego „ciągłości".

Zbiór ten był elementem „nowego świata" w obrębie matematyki. Świat odkryty przez Cantora wymagał nowej wrażliwości i wyobraźni. W bardzo krótkim czasie okazało się, że ma on ogromny wpływ na język matematyki i dalszy jej rozwój.



Rys. 5. Pięć początkowych przybliżeń tzw. gwiazdki Kocha. Proszę opisać zbiór, od którego startujemy i (również dwa) odwzorowania zwężające.


Rys. 6. Żuk Mandelbrota

Zbiór Cantora jest nietrywialnym przykładem jeszcze jednego zjawiska z jakim spotykamy się w matematyce – *samopodobieństwa* (część zbioru jest podobna do całego). Na wszechobecność takich zbiorów i ich przydatność do matematycznego opisu otaczającej nas rzeczywistości zwrócił uwagę w 1975 roku współczeny matematyk francuski pracujący w USA, Benoit B. Mandelbrot (urodzony w 1924 roku w Warszawie). Zbiory takie nazwał *fraktalami* (od łacińskiego słowa *fractus* – złamany, składający się z kawałków). Obecnie fraktale intensywnie wykorzystuje się w geometrycznej teorii równań różniczkowych. Dzięki możliwościom badawczym stworzonym przez komputery oraz zastosowaniu fraktali do opisu zjawisk przyrody i techniki, np. turbulencji i chaosu, można przypuszczać, że ich zastosowanie w matematyce będzie coraz większe (patrz [2]).

Mimo, że istnieje wiele cech, które wyróżniają fraktale spośród innych obiektów geometrycznych (np. wspomniane już samopodobieństwo, niecałkowity wymiar, określenie fraktala głównie przy pomocy zależności rekurencyjnej), to wygodnie jest przyjąć następującą definicję:

fraktalem nazywamy każdy niepusty, zwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$.

W szczególności zbiory niezmiennicze uzyskane w wyniku konstrukcji opisanej w twierdzeniu 5 nazywamy *fraktalami deterministycznymi* lub *atraktorami*. Używając tego języka możemy powiedzieć, że zbiór Cantora C jest atraktorem, którego wymiar Hausdorffa–Besicovitcha wynosi $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309$, [4, 9].

Fraktale, a dokładniej twierdzenie 5, można wykorzystywać do „zapamiętywania" i tworzenia obrazów „wziętych z natury", oczywiście przy wykorzystaniu komputerów. Twórcami tej metody są M. Barnsley, S. Demko, L. Hodges, B. Naylor z Georgia Institute of Technology (USA). Istotne w tym procesie jest tzw. twierdzenie o collage'u (kolażu).

TWIERDZENIE 6. *Niech* $T_1, T_2, \ldots, T_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *będą kontrakcjami takimi, że* $\max\{L_i : 1 \le i \le m\} = c < 1$ *oraz* $E \subset \mathbb{R}^2$ *będzie niepustym, zwartym podzbiorem. Wtedy*

$$D(E,F) \le \frac{1}{1-c} \cdot D\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} T_i(E)\Big),$$

gdzie F *jest zbiorem niezmienniczym dla* T_i, *tj.* $T_i(F) = F$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$.

DOWÓD. Korzystając z nierówności trójkąta dla metryki Hausdorffa, niezmienniczości zbioru F oraz nierówności (***), mamy:

$$\begin{aligned} D(E,F) &\le D\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} T_i(E)\Big) + D\Big(\bigcup_{i=1}^{m} T_i(E), F\Big) = \\ &= D\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} T_i(E)\Big) + D\Big(\bigcup_{i=1}^{m} T_i(E), \bigcup_{i=1}^{m} T_i(F)\Big) \le \\ &\le D\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} T_i(E)\Big) + c \cdot D(E,F), \end{aligned}$$

skąd wynika teza. ■

Konsekwencją tego twierdzenia jest fakt, że zadany niepusty, zwarty podzbiór $\mathbb{R}^2$ może być dowolnie dokładnie aproksymowany przez zbiory niezmiennicze względem pewnych kontrakcji.

WNIOSEK 1. *Niech* $E \subset \mathbb{R}^2$ *będzie niepustym, zwartym podzbiorem. Dla danego* $\delta > 0$ *istnieją kontrakcje* $T_1, T_2, \ldots, T_k$, *których zbiór niezmienniczy* F *spełnia warunek* $D(E,F) < \delta$.

DOWÓD. Dzięki zwartości zbioru E istnieje skończona rodzina kul $B_1, B_2, \ldots, B_k$ pokrywających zbiór E, których środki leżą w zbiorze E i promienie są nie większe niż $\frac{\delta}{4}$. Wtedy $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset E_{\delta/4}$, gdzie $E_{\delta/4}$ jest $\frac{\delta}{4}$ – otoczeniem zbioru E. Dla każdego i, niech T_i będzie kontrakcją o stałej mniejszej od $\frac{1}{2}$ odwzorowującą E na B_i. Wtedy $T_i(E) \subset B_i \subset (T_i(E))_{\delta/2}$, więc

$(\bigcup_{i=1}^k T_i(E)) \subset E_{\delta/4}$ oraz $E \subset \bigcup_{i=1}^k (T_i(E))_{\delta/2}$. Wobec tego z definicji metryki Hausdorffa

$$D\Big(E, \bigcup_{i=1}^k T_i(E)\Big) < \frac{\delta}{2},$$

co wobec twierdzenia 5 gwarantuje, że $D(E, F) < \delta$, gdzie F jest zbiorem niezmienniczym dla T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. ■

Przedstawione wyżej twierdzenia gwarantują tylko możliwość realizacji naszej idei. Trudności pojawiają się, gdy dla danego obrazu chcemy wyznaczyć (odgadnąć?) układ odwzorowań, którego artaktor byłby dostatecznie bliski oczekiwanemu obrazowi. Poza bardzo ogólnymi wskazówkami (atraktor A otrzymany za pomocą k odwzorowań „dekomponuje" się na k części, z których każda jest obrazem całego atraktora przekształconego przez jedno z odwzorowań T_i) decyduje tu nabyte doświadczenie i „eksperymenty komputerowe". W przypadku płaszczyzny, odwzorowań T_i możemy poszukiwać wśród przekształceń afinicznych płaszczyzny, które bardzo dobrze nadają się do badań komputerowych [8]. Aby zmniejszyć liczbę pamiętanych przez program komputerowy szczegółów wykorzystuje się algorytmy probabilistyczne. Gdy zamiast przekształceń afinicznych będziemy rozpatrywać przekształcenia nieliniowe, to zwiększą się nasze możliwości dokonywania dynamicznych zmian w uzyskiwanych obrazach. Omówienie tych zagadnień wykracza jednak poza ramy tego artykułu. Ich wstępne omówienie można znaleźć w pracy [4].

Literatura

1. K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Math. 85, Cambridge University Press, 1985.
2. K. J. Falconer, *Fractal geometry, mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, Chichester 1990.
3. K. Goebel, S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, M. Dekker, New York - Basel 1984.
4. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 1993.
5. K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy, funkcje jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1973.
6. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1977.
7. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1989.
8. K. S. Nowiński, *Jak pamiętać obrazy ?*, Delta 10/1989.
9. J. Ryll, *Ułamkowy wymiar*, Delta 2/1985.
10. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and applications, I: Fixed point theorems*, Springer-Verlag, New York 1986.