Ile maksimów ma wielomian?

Arkadiusz PŁOSKI, Kielce

Artykuł składa się z dwóch części: pierwsza jest dostępna dla uczniów starszych klas licealnych, druga wymaga pewnych wiadomości z zakresu analizy matematycznej funkcji wielu zmiennych.

Pojęcie stopnia topologicznego, z którego korzystałem w drugiej części, jest poglądowo opisane w popularnej książce *Zarys podstawowych pojęć topologii* Bołtiańskiego i Jefremowicza (Biblioteczka Matematyczna 22, PZWS, Warszawa 1965). Więcej na ten temat można się dowiedzieć z wykładów Johna Milnora, *Topologia z różniczkowego punktu widzenia*, PWN, Warszawa 1969.

W tym artykule odpowiedź na tytułowe pytanie podajemy w przypadku jednowymiarowym (wielomiany na prostej i ogólniej, na krzywej algebraicznej). Przypadek wielomianu dwóch zmiennych prowadzi do ciekawej problematyki. Dobrym wprowadzeniem jest: Alan Durfee, et al., *Counting Critical Points of Real Polynomials in Two Variables*, Amer. Math. Monthly, March 1993, 255-271.

1. Ekstrema wielomianów jednej zmiennej

Będziemy rozważali wielomiany rzeczywiste jednej zmiennej rzeczywistej. Jeżeli f jest takim wielomianem i $f \neq 0$, to $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$, $c_0 \neq 0$. Liczbę całkowitą $n \geqslant 0$ nazywamy stopniem, a liczbę $c_0 \neq 0$ współczynnikiem kierunkowym wielomianu f. W całym artykule rozważamy wielomiany dodatniego stopnia. Termin "maksimum" względnie "minimum" rozumiemy jako maksimum (minimum) lokalne. Punkty krytyczne wielomianu f to pierwiastki jego pochodnej f'. Punkt krytyczny f nazywamy niezdegenerowanym jeżeli nie jest pierwiastkiem f''. Punkty krytyczne niezdegenerowane są punktami maksimum lub minimum f.

Używane przez Autora oznaczenie

$a \equiv b(c)$

jest często zapisywane jako $a \equiv b \bmod c$.

Twierdzenie 1. *Niech f będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynniku kierunkowym c_0. Oznaczmy $M(f)$ liczbę maksimów oraz $m(f)$ liczbę minimów wielomianu f. Wtedy*

$$M(f) = \begin{cases} m(f) & \textit{jeżeli} \quad n \not\equiv 0(2), \\ m(f) - 1 & \textit{jeżeli} \quad n \equiv 0(2) \quad i \quad c_0 > 0, \\ m(f) + 1 & \textit{jeżeli} \quad n \equiv 0(2) \quad i \quad c_0 < 0. \end{cases}$$

Dowód powyższego twierdzenia podajemy w dalszej części artykułu. Teraz wyprowadzimy z twierdzenia 1 następujące

Twierdzenie 2. *Niech f będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynniku kierunkowym c_0. Wtedy*

$$M(f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \textit{jeżeli} \quad n \not\equiv 0(2), \\ \dfrac{n}{2} - 1 & \textit{jeżeli} \quad n \equiv 0(2) \quad i \quad c_0 > 0, \\ \dfrac{n}{2} & \textit{jeżeli} \quad n \equiv 0(2) \quad i \quad c_0 < 0. \end{cases}$$

Równość w każdym z tych trzech przypadków zachodzi dokładnie wtedy, gdy wielomian f ma $n-1$ punktów krytycznych.

Aby otrzymać twierdzenie 2 z twierdzenia 1 udowodnimy

Lemat. *Jeżeli f jest wielomianem stopnia $n > 0$, to $M(f) + m(f) \leqslant n - 1$. Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy wielomian f ma $n-1$ punktów krytycznych.*

Dowód lematu. Nierówność $M(f) + m(f) \leqslant n - 1$ wynika z lematu Fermata (punkty, w których wielomian osiąga ekstrema są jego punktami krytycznymi) oraz tego, że maksima są różne od minimów (wielomian dodatniego stopnia nie jest stały w żadnym przedziale). Jeżeli $M(f) + m(f) = n - 1$, to oczywiście f ma $n-1$ punktów krytycznych. Odwrotnie, jeżeli f ma $n-1$ punktów krytycznych, to druga pochodna f'' ma, na mocy lematu Rolle'a, wszystkie pierwiastki w przedziałach otwartych wyznaczonych przez punkty krytyczne f, a więc nie zeruje się w punktach krytycznych f. Zatem wszystkie punkty krytyczne są niezdegenerowane i jest $M(f) + m(f) = n - 1$.

Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia 2. Rozważmy pierwszy przypadek (pozostałe dwa sprawdzamy podobnie). Niech więc $n \not\equiv 0(2)$. Wówczas $M(f) = m(f)$ na mocy twierdzenia 1, a więc z lematu otrzymujemy $M(f) \leqslant \frac{n-1}{2}$ z równością dokładnie w przypadku, gdy f ma $n - 1$ punktów krytycznych.

2. Indeks pierwiastka wielomianu

Niech a będzie pierwiastkiem wielomianu f dodatniego stopnia. Indeks $\mathrm{ind}_a f$ definiujemy jako liczbę równą $+1$, gdy f zmienia znak z $-$ na $+$ przechodząc przez a, liczbę równą -1, gdy f zmienia znak z $+$ na $-$ przechodząc przez a, liczbę 0, gdy f ma stały znak w pobliżu a.

Podobnie definiujemy indeks wielomianu w nieskończoności $\mathrm{ind}_\infty f$. Jest on równy $+1$, gdy wielomian f jest ujemny w przedziale postaci $(-\infty, a)$ i dodatni w przedziale postaci $(b, +\infty)$, -1 – gdy jest odwrotnie, 0 – gdy f ma stały znak poza pewnym przedziałem ograniczonym.

Oba pojęcia wiąże następująca

Własność 1. *Dla każdego wielomianu f dodatniego stopnia:*

$$\sum_{a \in f^{-1}(0)} \mathrm{ind}_a f = \mathrm{ind}_\infty f.$$

Dowód. Przyjmujemy konwencję, że suma rozciągnięta na zbiór pusty jest równa zeru. Gdy $f^{-1}(0) = \emptyset$ lub $\mathrm{ind}_a f = 0$ dla wszystkich $a \in f^{-1}(0)$, to f ma stały znak, a więc $\mathrm{ind}_\infty f = 0$ i własność 1 ma miejsce. Załóżmy więc, że f ma pierwiastki o indeksie $\neq 0$ i ustawmy je w ciąg rosnący: $a_1 < a_2 < \ldots < a_s$. W każdym z $s + 1$ przedziałów otwartych, na które rozpada się zbiór $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_s\}$ wielomian f ma stały znak, przy czym w dwóch kolejnych przedziałach znaki f są różne.

Rozważmy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1: $s \equiv 0(2)$. Liczby $\mathrm{ind}_{a_1} f, \mathrm{ind}_{a_2} f, \ldots, \mathrm{ind}_{a_s} f$ tworzą naprzemienny ciąg -1 i $+1$. Ponieważ ciąg ten ma parzystą liczbę wyrazów, zatem $\mathrm{ind}_{a_1} f + \cdots + \mathrm{ind}_{a_s} f = 0$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że w rozważanym przypadku wielomian f ma taki sam znak w przedziałach $(-\infty, a_1)$ oraz $(a_s, +\infty)$, a więc $\mathrm{ind}_\infty f = 0$, co dowodzi rozważanej własności.

Przypadek 2: $s \not\equiv 0(2)$. Niech $\sigma \in \{-1, +1\}$ będzie znakiem wielomianu f w przedziale $(-\infty, a_1)$. Zatem $\mathrm{ind}_{a_1} f = -\sigma$, a więc

$$\mathrm{ind}_{a_1} f + \cdots + \mathrm{ind}_{a_s} f = -\sigma + (\mathrm{ind}_{a_2} f + \cdots + \mathrm{ind}_{a_s} f) = -\sigma,$$

bo liczba $s - 1$ jest parzysta. Wystarczy zauważyć, że w przedziale $(a_s, +\infty)$ wielomian f ma znak $-\sigma$, zatem $\mathrm{ind}_\infty f = -\sigma$.

Własność 2. *Niech a będzie punktem krytycznym wielomianu f stopnia $n > 1$. Wtedy*

$$\mathrm{ind}_a f' = \begin{cases} +1 & \textit{jeżeli } f \textit{ ma minimum w punkcie } a, \\ -1 & \textit{jeżeli } f \textit{ ma maksimum w punkcie } a, \\ 0 & \textit{jeżeli } f \textit{ nie ma ekstremum w } a. \end{cases}$$

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że jeśli $\mathrm{ind}_a f' = +1$ (odpowiednio -1, 0), to f ma minimum (odpowiednio: ma maksimum, nie ma ekstremum) w punkcie a. Niech więc $\mathrm{ind}_a f' = +1$. Wtedy pochodna f' jest ujemna w pewnym przedziale na lewo od a oraz dodatnia w przedziale na prawo od a. Zatem f w dostatecznie małym otoczeniu a jest malejąca na lewo od a i rosnąca na prawo od a. Oznacza to, że f ma minimum lokalne w rozważanym punkcie. Podobnie rozumujemy w pozostałych przypadkach. Obliczenie indeksu w nieskończoności pozostawiam Czytelnikowi:

Własność 3. *Niech f będzie wielomianem stopnia $n > 0$. Wtedy*

$$\operatorname{ind}_\infty f = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } n \equiv 0(2), \\ +1 & \text{jeżeli } n \not\equiv 0(2) \quad i \quad c_0 > 0, \\ -1 & \text{jeżeli } n \equiv 0(2) \quad i \quad c_0 < 0. \end{cases}$$

Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia 1. Niech f będzie wielomianem stopnia $n > 1$ o współczynniku kierunkowym c_0. Mamy

$$m(f) - M(f) = \sum \operatorname{ind}_a f' = \operatorname{ind}_\infty f',$$

gdzie sumowanie rozciągnięte jest na punkty krytyczne f. Pierwsza równość wynika z własności 2, a druga z własności 1 zastosowanej do pochodnej f'. Pochodna f' ma stopień $n-1$ i współczynnik kierunkowy nc_0. Stosując własność 3 do f' stwierdzamy, że

$$\operatorname{ind}_\infty f' = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } n \not\equiv 0(2), \\ +1 & \text{jeżeli } n \equiv 0(2) \quad \text{oraz} \quad c_0 > 0, \\ -1 & \text{jeżeli } n \equiv 0(2) \quad \text{oraz} \quad c_0 < 0. \end{cases}$$

Łącząc powyższe obliczenia z udowodnioną już równością $m(f) - M(f) = \operatorname{ind}_\infty f'$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

Ćwiczenia

1. Załóżmy, że $f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0$. Sprawdzić, że

$$\operatorname{ind}_a f = \begin{cases} \operatorname{sgn} f^{(k)}(a) & \text{jeżeli } k \not\equiv 0(2), \\ 0 & \text{jeżeli } k \equiv 0(2). \end{cases}$$

2. Sprawdzić, że punkty przegięcia wielomianu f są to ekstrema jego pochodnej f'.

3. Podać oszacowania dla $M(f)$ w zależności od stopnia, znaku współczynnika kierunkowego i liczby punktów krytycznych wielomianu f.

3. Wielomianowe pola wektorowe

Tak będziemy nazywać odwzorowania $F = (\phi, \psi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, których składowe są wielomianami dwóch zmiennych. Zerem pola $F = (\phi, \psi)$ nazywamy punkt $P \in \mathbb{R}^2$ taki, że $\phi(P) = \psi(P) = 0$. Będziemy dalej rozważali wielomianowe pola wektorowe o skończonej liczbie zer. Pole (ϕ, ψ) spełnia ten warunek dokładnie wtedy, gdy zbiór zer największego wspólnego podzielnika wielomianów ϕ, ψ jest zbiorem skończonym. W szczególności, gdy wielomiany ϕ, ψ są względnie pierwsze, to pole (ϕ, ψ) ma skończoną liczbę zer. Niech P_0 będzie zerem pola F i niech $\epsilon > 0$ będzie liczbą tak małą, że w kuli o środku P_0 i promieniu ϵ nie ma innych zer pola F.

Definiujemy indeks $\operatorname{ind}_{P_0} F$ jako stopień topologiczny odwzorowania

$$\mathbb{S}_\epsilon \ni P \to \frac{F(P)}{\|F(P)\|} \in \mathbb{S}_1,$$

gdzie $\mathbb{S}_\epsilon$ jest okręgiem o środku P_0 i promieniu ϵ, a $\mathbb{S}_1$ jest okręgiem jednostkowym o środku w początku układu. Podobnie definiujemy indeks w nieskończoności $\operatorname{ind}_\infty f$. Jest to stopień topologiczny odwzorowania

$$\mathbb{S}_R \ni P \to \frac{F(P)}{\|F(P)\|} \in \mathbb{S}_1,$$

gdzie $\mathbb{S}_R$ jest okręgiem o promieniu R obejmującym wszystkie zera pola F.

Oba pojęcia nie zależą od wyboru promieni ϵ i R pomocniczych okręgów. Zachodzą własności odpowiadające już znanym nam własnościom indeksu wielomianu jednej zmiennej.

Własność 1'. („zasada argumentu"). *Jeżeli $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest polem wektorowym o skończonym zbiorze zer $F^{-1}(0)$, to*

$$\sum_{P \in F^{-1}(0)} \operatorname{ind}_P F = \operatorname{ind}_\infty F.$$

Aby podać własność analogiczną do własności 2 przypomnijmy, że dwuwymiarowym analogonem pochodnej wielomianu jest jakobian $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(X,Y)} = = \frac{\partial\phi}{\partial X}\frac{\partial\psi}{\partial Y} - \frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial\psi}{\partial X}$ pary wielomianów ϕ, ψ. Mamy

Własność 2'. *Jeżeli $\phi(P) = 0$, ale $\operatorname{grad}\phi(P) \neq 0$, to*

$$\operatorname{ind}_P\left(\phi, \frac{\partial(\phi, f)}{\partial(X,Y)}\right) = \begin{cases} +1 & \text{jeżeli } f \text{ ma na } \phi = 0 \text{ minimum w punkcie } P, \\ -1 & \text{jeżeli } f \text{ ma na } \phi = 0 \text{ maksimum w punkcie } P, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dowód własności 2' nie jest trudny: stosując twierdzenie o funkcjach uwikłanych możemy „wyprostować krzywą $\phi = 0$ w pobliżu P" i zredukować sytuację do przypadku jednowymiarowego.

W przypadku pól wektorowych nie ma prostej metody obliczenia $\operatorname{ind}_\infty F$; zadowolimy się rozpoznaniem przypadku, w którym indeks jest równy zeru.

Własność 3'. *Jeżeli krzywa o równaniu $\phi = 0$ (lub $\psi = 0$) jest zwarta, to* $\operatorname{ind}_\infty(\phi, \psi) = 0$.

Aby dowieść ostatniej własności wystarczy zauważyć, że odwzorowanie

$$\frac{F}{\|F\|} : \mathbb{S}_R \to \mathbb{S}_1$$

($R > 0$ dostatecznie duże) nie jest „na". Zatem stopień jego jest równy zeru.

Możemy teraz podać zastosowanie pojęcia indeksu do badania ekstremów warunkowych wielomianów dwóch zmiennych.

4. Ekstrema wielomianu na krzywej algebraicznej.

Zajmiemy się teraz odpowiedzią na postawione w tytule pytanie w przypadku wielomianu dwóch zmiennych $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, który będziemy rozważać na krzywej algebraicznej $\phi = 0$.

Będziemy zakładać, że $\phi = 0$ jest nieosobliwą krzywą algebraiczną, to znaczy, że spełnione są warunki:

1) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest wielomianem,

2) zbiór rozwiązań równania $\phi(x, y) = 0$ jest niepusty,

3) gradient $\operatorname{grad}\phi$ nie zeruje się w punktach krzywej $\phi(x, y)$.

Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że krzywa $\phi = 0$ jest lokalnie wykresem funkcji dowolnie różniczkowalnej. Możemy więc mówić o punktach krytycznych wielomianu f na krzywej ϕ. Wyznaczamy je jako rozwiązania układu równań $\phi = \frac{\partial(\phi,f)}{\partial(X,Y)} = 0$. Niezdegenerowane punkty krytyczne to (jak można sprawdzić) dokładnie te, które spełniają nierówność $\frac{\partial(\phi,J)}{\partial(X,Y)} \neq 0$, gdzie J jest jakobianem wielomianów ϕ, f.

Podstawowym twierdzeniem o liczbie rozwiązań układu równań algebraicznych (o liczbie punktów przecięcia krzywych algebraicznych) jest twierdzenie Bézouta, które zacytujemy tutaj w następującej formie:

Twierdzenie Bézouta. *Jeżeli krzywe algebraiczne $\phi = 0, \psi = 0$ stopni $a, b > 0$ mają skończoną liczbę N punktów przecięcia na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, to $N \leqslant ab$. Jeżeli $N = ab$ to krzywe te przecinają się transwersalnie tzn. gradienty $\operatorname{grad}\phi(P)$, $\operatorname{grad}\psi(P)$ są liniowo niezależne w każdym punkcie przecięcia P.*

W oparciu o zacytowane wyżej twierdzenie Bézouta łatwo można sprawdzić następujące

Twierdzenie 3. *Zakładamy, że wielomian f stopnia $n > 0$ nie jest stały na żadnej z komponent spójnych krzywej nieosobliwej $\phi = 0$ o równaniu stopnia $m > 0$. Wtedy f ma co najwyżej $m(m+n-2)$ punktów krytycznych. Jeżeli f ma dokładnie $m(m+n-2)$ punktów krytycznych, to są one niezdegenerowane, a więc są wyłącznie punktami maksimum lub minimum.*

Z twierdzenia 3 bezpośrednio wynika, że jeśli wielomian f nie jest stały na składowych krzywej $\phi = 0$, to ma skończoną liczbę maksimów (minimów) i możemy zapytać o odpowiedniki twierdzeń 1 i 2. Ograniczymy się do przypadku krzywej zwartej.

Twierdzenie 4. *Zatrzymajmy założenia twierdzenia 3 i przypuśćmy, że krzywa $\phi = 0$ jest zwarta. Wtedy liczba maksimów wielomianu f na krzywej $\phi = 0$ jest równa liczbie minimów tego wielomianu na tej samej krzywej.*

Dowód. Oznaczmy $M_\phi(f)$ oraz $m_\phi(f)$ liczbę maksimów (minimów) wielomianu f na krzywej $\phi = 0$. Postępujemy jak w dowodzie twierdzenia 1; stosując własności 1' oraz 2' stwierdzamy, że

$$m_\phi(f) - M_\phi(f) = \sum \mathrm{ind}_P \left(\phi, \frac{\partial(\phi, f)}{\partial(X,Y)}\right) = \mathrm{ind}_\infty \left(\phi, \frac{\partial(\phi, f)}{\partial(X,Y)}\right).$$

Z własności 3' wynika, wobec zwartości krzywej $\phi = 0$, że indeks w nieskończoności jest równy zeru, a więc $m_\phi(f) = M_\phi(f)$.

Stosując twierdzenia 3 i 4 otrzymujemy łatwo

Twierdzenie 5. *Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia 4 liczba maksimów wielomianu f na krzywej $\phi = 0$ jest równa co najwyżej $\frac{1}{2}m(m+n-2)$. Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy wielomian f ma $m(m+n-2)$ punktów krytycznych na krzywej $\phi = 0$.*

Opisanymi wyżej metodami można również oszacować liczbę maksimów wielomianu na krzywej niekoniecznie zwartej. Mówimy, że krzywa $\phi = 0$ ma r gałęzi w nieskończoności, jeżeli jej przecięcie z dopełnieniem dostatecznie dużego koła ma $2r$ spójnych składowych. Definicja jest poprawna, bo można dowieść, że liczba składowych spójnych wyżej określonego zbioru jest zawsze parzysta. Co więcej, $r \leqslant$ stopień ϕ.

Zgodnie z podaną definicją elipsa nie ma gałęzi w nieskończoności ($r = 0$), parabola ma jedną ($r = 1$) a hiperbola dwie ($r = 2$). Dokładniejsza analiza pojęcia indeksu w nieskończoności pozwala udowodnić, że

$$|M_\phi(f) - m_\phi(f)| \leqslant \text{liczba gałęzi w nieskończoności krzywej } \phi = 0.$$

W przypadku prostej jest $r = 1$ i odnajdujemy oszacowanie otrzymane w twierdzeniu 1.

Ćwiczenia

1. Oznaczmy $J_\phi(f) = \frac{\partial(\phi,f)}{\partial(X,Y)}$ i zdefiniujmy indukcyjnie jakobiany wyższych rzędów $J_\phi^k(f)$ przyjmując $J_\phi^{k+1}(f) = J_\phi^k(J_\phi(f))$. Niech k_0 będzie taką liczbą, że

$$J_\phi(f)(P) = \cdots = J_\phi^{k_0-1}(f)(P) = 0, \text{ ale } J_\phi^{k_0}(f)(P) \neq 0.$$

Wykazać, że jeśli $k_0 \equiv 0(2)$, to f ma w punkcie P ekstremum na $\phi = 0$, minimum gdy $J_\phi^{k_0}(f)(P) > 0$, maksimum w przeciwnym przypadku. Jeżeli $k_0 \not\equiv 0(2)$, to f nie ma ekstremum na $\phi = 0$ (w punkcie P).

2. Oznaczmy $H(f)(P) = f_{XX}(P)f_Y(P)^2 - 2f_{XY}(P)f_X(P)f_Y(P) + +f_{YY}(P)f_X(P)^2$. Wykazać, że jeśli $J_\phi(f)(P) = 0$, a $\lambda(P)$ jest mnożnikiem Lagrange'a wyznaczonym jednoznacznie z równości $\mathrm{grad}\, f(P) = \lambda(P)\, \mathrm{grad}\, \phi(P)$, to

$$J_\phi^2(f)(P) = -\lambda(P)H(\phi)(P) + \frac{1}{\lambda(P)^2}H(f)(P) \text{ o ile } \lambda(P) \neq 0.$$

3. Jeżeli krzywa $\phi = 0$ jest zwarta, to jej stopień jest liczbą parzystą.

4. Udowodnić, że jeżeli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest zwartą i orientowalną rozmaitością 1-wymiarową, a $f : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką posiadającą wyłącznie punkty krytyczne skończonego rzędu, to liczba maksimów f = liczba minimów f.

Uwaga. Rozwinięcie tematu ćwiczeń 1 i 2 zainteresowany Czytelnik znajdzie w pracy autora: Univ. Iag. Acta Math. Fasc XXII (1995), str. 29–35. Ćwiczenie 4 przeznaczone jest dla Czytelników wspomnianej we wstępie książki Milnora.