O zliczaniu
Kilka zadań kombinatorycznych – Część I

Wojciech GUZICKI, Warszawa

Zobaczmy najpierw kilka dowodów znanej i prostej tożsamości kombinatorycznej. Udowodnimy mianowicie, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.}$$

Dowód 1.
Zastosujemy znane wzory. Wiemy, że:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

skąd natychmiast wynika wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

dla $n \geq k > 0$. Wiemy również, że suma wszystkich współczynników Newtona dla danego n (czyli suma wszystkich liczb z jednego wiersza trójkąta Pascala) wynosi 2^n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Teraz możemy przeprowadzić obliczenia:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \\ &= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \\ &= n2^{n-1}.\end{aligned}$$

Dowód 2.
Prowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n. Sprawdzenie warunku początkowego dla $n = 1$ jest trywialne, toteż opuścimy je. Udowodnimy tylko krok indukcyjny. Załóżmy więc, że nasza równość zachodzi dla pewnej liczby n. Wykażemy, że zachodzi ona też dla liczby $n+1$. W dowodzie korzystamy ze znanej równości

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

prawdziwej dla liczb n i k takich, że $n \geq k > 0$. A oto obliczenia:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k} + n + 1 = \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} + n + 1 = \\ &= n \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\binom{n}{k} + n + 1 = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + n \cdot 2^{n-1} + n + 1 = \\ &= n \cdot 2^{n-1} - n + 2^n - 1 + n \cdot 2^{n-1} + n + 1 = \\ &= (n+1) \cdot 2^n.\end{aligned}$$

Dowód 3.
Skorzystamy z prostego wniosku ze wzoru dwumianowego Newtona. Mianowicie dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Po obu stronach znaku równości mamy więc dwie funkcje, których wartości w każdym punkcie są równe. Są to wielomiany, a więc funkcje różniczkowalne. Ich pochodne są zatem też równe. Popatrzmy więc na te pochodne:

$$((1+x)^n)' = n \cdot (1+x)^{n-1}$$

oraz

$$\left(1+\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Zatem mamy równość

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1},$$

w której wystarczy podstawić $x = 1$.

Dowód 4.
Jest to tzw. dowód kombinatoryczny. Polega on na tym, że na dwa sposoby zliczamy elementy pewnego zbioru. Obie strony dowodzonej równości będą otrzymanymi w taki sposób wynikami. Ponieważ liczba elementów zbioru nie może zależeć od sposobu zliczania jego elementów, więc oba wyniki są równe, czyli zostanie udowodniona nasza równość.

Dowód ten wykorzystuje kombinatoryczną interpretację współczynników Newtona (zwanych także współczynnikami dwumianowymi). Otóż liczba $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie sposobów wybrania k elementów ze zbioru n-elementowego, bez uwzględniania kolejności wybierania. Inaczej mówiąc, $\binom{n}{k}$ jest liczbą k-elementowych podzbiorów pewnego zbioru n-elementowego. Stąd wynikają podstawowe własności współczynników Newtona. Na przykład $\binom{n}{k} = 0$ dla $k > n$ oraz dla $k < 0$. Nie można bowiem wybrać więcej niż n elementów ze zbioru n-elementowego i nie można wybrać ujemnej liczby elementów. Następnie $\binom{n}{n} = 1$, bo zbiór n-elementowy ma tylko jeden podzbiór n-elementowy. Podobnie, łatwo zauważyć, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: wybrać k elementów ze zbioru n-elementowego możemy odrzucając $n-k$ niepotrzebnych nam elementów. Po tych wyjaśnieniach dotyczących współczynników Newtona możemy przejść do dowodu.

Przypuśćmy zatem, że kierujemy przedsiębiorstwem, w którym pracuje n osób. Chcemy nagrodzić pewne osoby i jedną z nagrodzonych osób dodatkowo chcemy awansować. Na ile sposobów możemy to uczynić? Możemy popatrzeć na to zadanie z dwóch stron. Po pierwsze, możemy najpierw zdecydować, ile osób nagradzamy, potem wybrać osoby, które nagrodzimy i na końcu wybierzemy jedną z tych nagrodzonych osób, by ją awansować. Przypuśćmy więc, że zdecydowaliśmy się nagrodzić k osób. Oczywiście k jest jedną z liczb od 0 (wtedy, gdy wszystkich naszych pracowników uważamy za leni i brakorobów...) do n (gdy mamy naprawdę wspaniałą załogę...). Osoby do nagrody możemy teraz wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów. Przy każdym takim wyborze jedną osobę do awansu możemy wybrać na k sposobów. Zwróćmy szczególną uwagę na przypadek $k = 0$. Wtedy mamy wybrać zero osób do nagrody i spośród nich jedną osobę awansować. Osoby do nagrody wybieramy na jeden sposób (taki mianowicie, że nikogo nie nagradzamy – to też jest sposób postępowania). Nikogo też nie awansujemy – to możemy zrobić na zero sposobów. Zwróćmy uwagę na różnicę: zero osób można wybrać na jeden sposób – nic nie robiąc – także z zera osób; jednak jednej osoby z zera osób nie można wybrać nawet nic nie robiąc, stąd zero sposobów. Dla danej liczby k mamy więc $k \cdot \binom{n}{k}$ sposobów wykonania zadania. Łącznie więc tych sposobów będzie:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Możemy jednak popatrzeć na to samo zadanie z drugiej strony. Najpierw wybierzmy jedną osobę do awansu, a potem z pozostałych $n-1$ osób wybierzmy niektóre do nagrody. Tę jedną osobę do awansu możemy oczywiście wybrać na n sposobów. A pewną liczbę pozostałych osób do nagrody możemy wybrać na 2^{n-1} sposobów – bo tyle jest podzbiorów zbioru liczącego $n-1$ elementów. Łącznie mamy zatem $n \cdot 2^{n-1}$ sposobów wykonania zadania. To kończy dowód naszej równości.

Ktoś niezadowolony z takiego „nieformalnego" sposobu dowodzenia może to rozumowanie uściślić. Rozważmy zbiór A mający n elementów. Interesuje nas liczba par postaci $\langle a, B\rangle$ takich, że $a \in B$. Inaczej mówiąc, interesuje nas liczba elementów zbioru

$$X = \{\langle a, B\rangle : a \in B\}.$$

Z jednej strony, zbiór X jest sumą zbiorów X_k:

$$X = \bigcup_{k=0}^{n} X_k,$$

gdzie

$$X_k = \{\langle a, B\rangle : a \in B \land |B| = k\}$$

($|B|$ oznacza liczbę elementów zbioru B). Następnie

$$|X_k| = \sum_{B\subset A} |B| = \sum_{B\subset A} k = k\binom{n}{k},$$

skąd wynika, że

$$|X| = \sum_{k=0}^{n} |X_k| = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Z drugiej strony

$$X = \bigcup_{a\in A} X^a,$$

gdzie

$$X^a = \{\langle a, B\rangle : a \in B\}.$$

Teraz zauważamy, że $|X^a| = 2^{n-1}$ i stąd

$$|X| = \sum_{a\in A} |X^a| = \sum_{a\in A} 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

W dalszym ciągu wykładu nie będziemy już tak bardzo formalizować dowodów kombinatorycznych.

Możemy teraz przedstawić podobne dowody kombinatoryczne wzorów, z których korzystaliśmy w poprzednich dowodach. Weźmy najpierw wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

dla $n \geq k > 0$. Ten wzór możemy zapisać w postaci równoważnej, mnożąc obie strony przez k:

$$\boxed{k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.}$$

Dowód jest bardzo prosty. W naszym przedsiębiorstwie nagradzamy k osób i jedną z nich awansujemy. Zliczając na dwa sposoby liczbę możliwości wykonania tego zadania (dokładnie tak samo jak w poprzednim dowodzie), otrzymujemy żądaną równość.

W pierwszym dowodzie korzystaliśmy też z następującej równości:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Może ona być udowodniona poprzez zliczenie liczby sposobów nagrodzenia niektórych spośród pracowników naszego przedsiębiorstwa. Oczywiście te nagrody możemy przyznać na 2^n sposobów, bo tyle jest podzbiorów zbioru n-elementowego. Z drugiej strony, dla danej liczby k możemy przyznać k nagród na $\binom{n}{k}$ sposobów i wystarczy te liczby dodać, by otrzymać łączną liczbę sposobów nagrodzenia naszych pracowników.

Przy okazji warto wspomnieć, że prosty dowód tej tożsamości otrzymamy podstawiając $a = b = 1$ we wzorze Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Sam wzór Newtona też ma prosty dowód kombinatoryczny. Po lewej stronie tego wzoru mamy iloczyn n identycznych dwumianów $a+b$. Ten iloczyn jest zatem sumą wyrażeń postaci $a^{n-k}b^k$ dla wszystkich k od 0 do n. Problemem jest tylko to, ile składników tej postaci dla danego k pojawi się po wykonaniu mnożenia. Otóż składnik $a^{n-k}b^k$ powstaje z pomnożenia czynnika a wziętego z $n-k$ dwumianów i czynnika b wziętego z k dwumianów. Zatem powstanie on tyle razy, na ile sposobów możemy wybrać k czynników b z n dwumianów, czyli na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Weźmy teraz równość

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Nasze przedsiębiorstwo rozrosło się tymczasem do $n+1$ osób (zatrudniliśmy nową sekretarkę) i chcemy znów nagrodzić k osób. Możemy to oczywiście zrobić na $\binom{n+1}{k}$ sposobów. Ale możemy spojrzeć na problem od innej strony. Czy dać nagrodę nowej sekretarce? Jeśli nie damy, to trzeba będzie dać nagrodę k osobom spośród pozostałych n osób – na $\binom{n}{k}$ sposobów. A jeśli damy, to pozostałe $k-1$ nagród damy $k-1$ osobom spośród pozostałych n osób – na $\binom{n}{k-1}$ sposobów. Stąd wynika dowodzona równość.

Zajmiemy się teraz następną tożsamością. Znów zaczniemy od dowodów „rachunkowych", po których zobaczymy dowód kombinatoryczny. Udowodnimy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dowód 1.
Udowodnimy tożsamość ogólniejszą. Mianowicie pokażemy przez indukcję względem p, że dla dowolnych m i n takich, że $n \geq m$, zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{m-k} = \binom{p+n}{m}.$$

Sprawdzenie warunku początkowego tym razem też jest proste i dlatego opuścimy je. Przeprowadzimy tylko krok indukcyjny. Przypuśćmy więc, że równość zachodzi dla pewnej liczby p i wszystkich liczb n i m takich, że $n \geq m$. Pokażemy, że wtedy dla dowolnych liczb $n \geq m$ zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k}\binom{n}{m-k} = \binom{p+n+1}{m}.$$

A oto obliczenia:

$$\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}\binom{n}{m-k} = \binom{n}{m} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}\binom{n}{m-k} + \binom{n}{m-p-1} =$$
$$= \binom{n}{m} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}\binom{n}{m-k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{m-k} + \binom{n}{m-p-1} =$$
$$= \binom{n}{m} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\binom{n}{m-k-1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{m-k} + \binom{n}{m-p-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{m-k-1} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{m-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left[\binom{n}{m-k-1} + \binom{n}{m-k}\right] = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n+1}{m-k} =$$
$$= \binom{p+n+1}{m}.$$

Podstawiając $p = m = n$ otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dowód 2.

Jeszcze raz wykorzystamy równość

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Podniesiemy obie strony do kwadratu:

$$(1+x)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right).$$

Po lewej stronie równości mamy oczywiście wielomian stopnia $2n$. Po prawej stronie mamy iloczyn dwóch wielomianów n-tego stopnia, a więc jest to także wielomian stopnia $2n$. Porównajmy współczynniki stojące przy x^n w obu wielomianach. Po lewej stronie mamy zgodnie ze wzorem dwumianowym $\binom{2n}{n}x^n$. Po prawej stronie mamy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot\binom{n}{n-k}x^{n-k},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}x^n.$$

Porównując te współczynniki otrzymamy dowodzoną równość.

Dowód 3.

Znów kończymy dowodem kombinatorycznym. Nasza firma rozrosła się do $2n$ osób: n kobiet i n mężczyzn. Tym razem chcemy nagrodzić dokładnie połowę naszych pracowników, tj. n osób. Oczywiście możemy to zrobić na $\binom{2n}{n}$ sposobów. Tę liczbę sposobów możemy jednak otrzymać w wyniku innego rozumowania. Najpierw zdecydujmy, ile kobiet powinno dostać nagrodę. Niech k oznacza liczbę nagrodzonych kobiet. Oczywiście k jest jedną z liczb od 0 (gdy nie nagrodzimy żadnej kobiety) do n (gdy nagrodzimy same kobiety). Dla każdej wartości k kobietom możemy przyznać nagrody na $\binom{n}{k}$ sposobów. Gdy rozdzielimy już nagrody między kobiety, zostanie nam $n-k$ „wolnych" nagród do rozdziału między mężczyzn lub, co na jedno wychodzi, będziemy musieli wskazać k mężczyzn, którym nie zamierzamy dać nagrody. To oczywiście możemy zrobić też na $\binom{n}{k}$ sposobów. Łącznie, dla każdej wartości k mamy $\binom{n}{k}^2$

sposobów przydziału k nagród. Teraz wystarczy zsumować otrzymane liczby sposobów ze względu na k, by otrzymać dowodzony wzór.

Bardzo często zagadnienia kombinatoryczne prowadzą do tzw. zależności rekurencyjnych. Przypuśćmy, że mamy obliczyć liczbę sposobów wykonania jakiegoś zadania, zależnego od liczby n. Tę liczbę sposobów oznaczmy przez a_n. Ułożenie zależności rekurencyjnej polega na tym, że nie potrafimy od razu podać wzoru wyrażającego liczbę a_n w zależności od n, ale potrafimy podać wzór wyrażający liczbę a_{n+1} w zależności od liczby a_n. Korzystając z tego wzoru będziemy mogli kolejno obliczać wartości a_n. Czasami potrafimy też „rozwiązać" otrzymane równanie rekurencyjne, czyli podać wzór ogólny wyrażający a_n tylko w zależności od n. Następne zadanie będzie prowadziło do takiej właśnie zależności rekurencyjnej. Tym razem nie będziemy mieli wzoru do udowodnienia, trzeba będzie go dopiero „wyznaczyć". Obliczmy zatem dla danej liczby naturalnej n następującą sumę:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = ?}$$

Dowód 1.
Jeszcze raz zaczniemy od dowodu algebraicznego. W tym celu weźmy zespolony pierwiastek trzeciego stopnia z jedności:

$$\varepsilon^3 = 1.$$

Wtedy ε jest pierwiastkiem równania $x^3 - 1 = 0$, czyli $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Stąd wynika, że nierzeczywisty pierwiastek tego równania spełnia równanie

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Obliczymy teraz dwoma sposobami sumę

$$(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n}.$$

Najpierw skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{0\cdot k} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{1\cdot k} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{2\cdot k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (\varepsilon^0 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}).$$

Popatrzmy teraz, jak wyglądają sumy

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}$$

dla różnych k. Oczywiście dla liczb k podzielnych przez 3 dodajemy trzy jedynki. Zatem suma jest równa 3. Niech teraz $k = 3l + 1$. Wtedy

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 1 + \varepsilon^{3l} \cdot \varepsilon + \varepsilon^{6l} \cdot \varepsilon^2 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Podobnie dla $k = 3l + 2$ stwierdzimy, że ta suma równa jest 0. Zatem, kontynuując przerwane obliczenia, dostajemy

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (\varepsilon^0 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}) = \sum_{k=0}^{n} 3 \binom{3n}{3k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}.$$

Następnie obliczymy tę samą sumę bez odwoływania się do wzoru Newtona. Mamy wtedy:

$$(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} =$$
$$= (1+1)^{3n} + (1+\varepsilon)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} =$$
$$= 2^{3n} + (-\varepsilon^2)^{3n} + (-\varepsilon)^{3n} =$$
$$= 2^{3n} + (-1)^{3n}\varepsilon^{6n} + (-1)^{3n}\varepsilon^{3n} =$$
$$= 2^{3n} + (-1)^n(\varepsilon^3)^n + (-1)^n(\varepsilon^3)^n =$$
$$= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n = 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n.$$

W tym dowodzie korzystaliśmy z oczywistych równości:

$$(-1)^{3n} = (-1)^n, \quad 1+\varepsilon = -\varepsilon^2, \quad 1+\varepsilon^2 = -\varepsilon.$$

Porównując wyniki obu obliczeń, otrzymamy:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = 8^n + 2 \cdot (-1)^n,$$

czyli ostatecznie

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.}$$

Dowód 2.
Teraz poznamy drugie rozwiązanie, polegające na ułożeniu równania rekurencyjnego. Przyjrzyjmy się dokładniej strukturze trójkąta Pascala. Mamy obliczyć sumę co trzeciego wyrazu w co trzecim wierszu tego trójkąta. Pamiętamy jednak, że każdy wyraz (oprócz skrajnych) trójkąta Pascala jest sumą dwóch wyrazów stojących bezpośrednio nad nim, z jego lewej i prawej strony. Te wyrazy z kolei są sumami wyrazów stojących wyżej itd. Spróbujemy wyrazić sumę co trzeciego wyrazu wiersza o numerze $3n+3$ za pomocą analogicznej sumy wyrazów wiersza o numerze $3n$. Popatrzmy w tym celu na przykładowy fragment trójkąta Pascala (wiersze od $n = 9$ do $n = 12$):

$$\begin{array}{c}
\spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \\
\heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit
\end{array}$$

Nie mamy tu liczb; symbolem $\spadesuit$ są oznaczone te miejsca w trójkącie Pascala, gdzie znajdują się liczby, które będziemy sumować, symbolem $\heartsuit$ oznaczyliśmy wszystkie pozostałe miejsca w tym trójkącie. Teraz popatrzmy, jak liczby stojące na miejscach $\spadesuit$ dolnego wiersza powstają z liczb stojących wyżej:

$$\begin{array}{c}
\boxed{\spadesuit} \quad \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}} \quad \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}} \quad \boxed{\spadesuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \\
\heartsuit \quad \boxed{\heartsuit} \quad \boxed{\boxed{\heartsuit}} \quad \boxed{\heartsuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\heartsuit \quad \heartsuit \quad \boxed{\heartsuit} \quad \boxed{\heartsuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \boxed{\spadesuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit
\end{array}$$

Symbole $\spadesuit$ i $\heartsuit$ są teraz w ramkach. Pojedyncza ramka oznacza, że dana liczba była użyta jeden raz do obliczenia odpowiedniej liczby dolnego wiersza. Takimi są na przykład liczby drugiego wiersza od dołu. Jednak w trzecim wierszu od dołu pojawia się już liczba, która została użyta dwa razy: po jednym razie do obliczenia każdej z obramowanych liczb drugiego wiersza od dołu. W najwyższym wierszu naszego rysunku niektóre liczby mają nawet trzy ramki: te, które były potrzebne do obliczenia liczby w podwójnej ramce niższego rzędu. Tak samo będzie dla każdej interesującej nas liczby najniższego rzędu, z wyjątkiem dwóch skrajnych. Możemy to zapisać w postaci wzoru

$$\boxed{\binom{3n+3}{3k} = \binom{3n}{3k-3} + 3 \cdot \binom{3n}{3k-2} + 3 \cdot \binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k}.}$$

Wzór ten możemy otrzymać też za pomocą bezpośrednich obliczeń:

$$
\begin{aligned}
&\binom{3n+3}{3k} = \\
&= \binom{3n+2}{3k-1} + \binom{3n+2}{3k} = \\
&= \binom{3n+1}{3k-2} + \binom{3n+1}{3k-1} + \binom{3n+1}{3k-1} + \binom{3n+1}{3k} = \\
&= \binom{3n+1}{3k-2} + 2\cdot\binom{3n+1}{3k-1} + \binom{3n+1}{3k} = \\
&= \binom{3n}{3k-3} + \binom{3n+1}{3k-2} + 2\cdot\binom{3n}{3k-2} + 2\cdot\binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k} = \\
&= \binom{3n}{3k-3} + 3\cdot\binom{3n}{3k-2} + 3\cdot\binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k}.
\end{aligned}
$$

Teraz popatrzmy na to, jak powstają wyrazy skrajne. Otóż każdy wyraz skrajny jest jedynką; możemy więc uznać, że powstaje on z jednego tylko wyrazu stojącego nad nim:

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}, \quad \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$$

dla dowolnego n. W naszym przypadku oznacza to, że

$$\binom{3n+3}{0} = \binom{3n}{0}, \quad \binom{3n+3}{3n+3} = \binom{3n}{3n},$$

co można zilustrować rysunkiem:

$$\boxed{\spadesuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit$$

$$\boxed{\heartsuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit$$

$$\boxed{\heartsuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit$$

$$\boxed{\spadesuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \spadesuit$$

Łącznie, interesujące nas wyrazy wiersza o numerze $3n+3$ powstają z trzykrotnego sumowania nieinteresujących nas wyrazów wiersza o numerze $3n$ i dwukrotnego sumowania interesujących nas wyrazów wiersza $3n$:

$$\boxed{\boxed{\spadesuit}}\ \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}}\ \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}}\ \boxed{\boxed{\spadesuit}}\ \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}}\ \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}}\ \boxed{\boxed{\spadesuit}}\ \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}}\ \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}}\ \boxed{\boxed{\spadesuit}}$$

$$\heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit$$

$$\heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit$$

$$\boxed{\spadesuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \boxed{\spadesuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \boxed{\spadesuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \boxed{\spadesuit}\ \heartsuit\ \heartsuit\ \boxed{\spadesuit}$$

Oznaczmy przez S_n sumę co trzeciego wyrazu wiersza o numerze $3n$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}.$$

Wtedy dostrzeżoną zależność możemy zapisać też następującym wzorem:

$$S_{n+1} = 3\cdot 2^{3n} - S_n,$$

gdyż suma wszystkich wyrazów wiersza $3n$ wynosi 2^{3n}. Oczywiście ten wzór również możemy otrzymać za pomocą prostych obliczeń:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{3n+3}{3k} = \\
&= \binom{3n+3}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{3n+3}{3k} + \binom{3n+3}{3n+3} = \\
&= \binom{3n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{3n}{3k-3} + 3\binom{3n}{3k-2} + 3\binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k} \right] + \binom{3n}{3n} = \\
&= \ \dots \ = \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} + 3\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{3n}{3k-2} + \binom{3n}{3k-1} \right] = \\
&= 3\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \\
&= 3 \cdot 2^{3n} - S_n.
\end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że $S_1 = 2$. Pozostaje nam wyprowadzenie wzoru ogólnego na S_n ze wzorów rekurencyjnych

$$S_1 = 2, \quad S_{n+1} = 3 \cdot 8^n - S_n.$$

Możemy to osiągnąć bardzo prosto wyrażając S_{n+2} za pomocą S_n:

$$S_{n+2} = 3 \cdot 8^{n+1} - S_{n+1} = 3 \cdot 8^{n+1} - 3 \cdot 8^n + S_n,$$

czyli

$$S_{n+2} = S_n + 21 \cdot 8^n.$$

Teraz już łatwo zauważyć, że dla liczby nieparzystej n mamy

$$S_n = S_1 + 21 \cdot (8^1 + 8^3 + \ldots + 8^{n-2})$$

i ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$S_n = 2 + 21 \cdot \frac{8^n - 8}{8^2 - 1} = 2 + \frac{8^n - 8}{3} = \frac{8^n - 2}{3}.$$

Dla n parzystych skorzystamy ze wzoru rekurencyjnego

$$S_n = 3 \cdot 8^{n-1} - S_{n-1} = 3 \cdot 8^{n-1} - \frac{8^{n-1} - 2}{3} = \frac{9 \cdot 8^{n-1} - 8^{n-1} + 2}{3} = \frac{8^n + 2}{3}.$$

Łącząc razem otrzymane wzory dla n parzystych i n nieparzystych dostajemy wzór

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.}$$

Równanie rekurencyjne

$$S_1 = 2, \quad S_{n+1} = 3 \cdot 8^n - S_n.$$

można rozwiązać też innym sposobem. Wprowadźmy oznaczenie:

$$T_n = \frac{S_n}{(-1)^n}.$$

Wtedy nasze równanie przyjmie postać:

$$T_1 = -2, \quad T_{n+1} = \frac{3 \cdot 8^n}{(-1)^{n+1}} + T_n.$$

Stąd już łatwo stwierdzimy, że

$$T_n = -2 + \frac{3 \cdot 8}{(-1)^2} + \frac{3 \cdot 8^2}{(-1)^3} + \frac{3 \cdot 8^3}{(-1)^4} + \ldots + \frac{3 \cdot 8^{n-1}}{(-1)^n}$$

i ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego otrzymamy znany już nam wzór.

Ułożenie odpowiedniego równania rekurencyjnego pomaga w rozwiązaniu wielu innych zadań. Zastosujemy tę metodę do rozwiązania klasycznego zadania o zamienionych listach. Piszemy n listów i adresujemy n kopert. Na ile sposobów możemy włożyć te listy do kopert tak, by żaden list nie trafił do właściwej koperty?

Oznaczmy przez D_n liczbę sposobów takiego „pomieszania” n listów. To znaczy, D_n jest liczbą sposobów takiego włożenia n listów do n kopert, by żaden list nie został włożony do właściwej koperty. Ponumerujmy listy i koperty liczbami od 1 do n w taki sposób, by te same numery otrzymały listy i odpowiadające im koperty. Zastanówmy się teraz, do której koperty trafił list o numerze n. Wiemy tylko, że nie może on trafić do koperty z numerem n. Niech ta koperta ma numer i. Możliwe są teraz dwa przypadki:

Przypadek 1.

List o numerze i trafił do koperty z numerem n. Inaczej mówiąc, listy z numerami n oraz i „zamieniły się” kopertami. Oczywiście wtedy pozostałe listy (a jest ich $n-2$) musiały zostać wymieszane – to można zrobić na D_{n-2} sposobów. Uwzględniając liczbę możliwych i widzimy, że w tym przypadku mamy łącznie $(n-1)D_{n-2}$ sposobów włożenia listów do kopert.

Przypadek 2.

Do koperty z numerem n trafił list o numerze j, przy czym $j \neq i$. Wtedy na chwilę przekładamy listy: list o numerze n wkładamy do właściwej koperty, a list o numerze j wkładamy do koperty z numerem i (czyli zamieniamy miejscami j-ty i n-ty list). Po tej zamianie mamy jeden list (o numerze n) we właściwej kopercie i pozostałe $n-1$ listów dokładnie wymieszanych (tzn. żaden nie jest we właściwej kopercie). Odwrotnie, jeśli mamy taką właśnie sytuację, to możemy zamienić ze sobą listy w kopertach z numerami n oraz i, by otrzymać sytuację poprzednią. Mamy D_{n-1} sposobów włożenia $n-1$ listów do kopert tak, by żaden nie trafił do właściwej koperty. Mamy też $n-1$ sposobów wyboru koperty z numerem i, a następnie zamiany listów między kopertami o numerach n oraz i. W tym przypadku mamy więc $(n-1)D_{n-1}$ sposobów włożenia listów.

Łącznie mamy w obu przypadkach $(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$ sposobów włożenia listów. Stąd otrzymujemy wzór rekurencyjny:

$$\boxed{D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}).}$$

Łatwo też zauważyć, że $D_1 = 0$ oraz $D_2 = 1$. Teraz możemy spróbować znaleźć wzór ogólny wyrażający liczbę D_n w zależności od n. Wprowadzamy oznaczenie:

$$E_n = D_n - nD_{n-1}$$

dla $n \geq 2$. Wtedy mamy:

$$E_n = D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) = -E_{n-1}.$$

Teraz już łatwo zauważyć, że $E_n = (-1)^{n-2}E_2$. Ponieważ $E_2 = D_2 - 2D_1 = 1$, więc ostatecznie otrzymujemy

$$E_n = (-1)^n,$$

czyli

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Zastosujmy teraz metodę rozwiązywania takich równań, którą poznaliśmy w poprzednim zadaniu. Podzielmy obie strony ostatniego równania przez $n!$

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{nD_{n-1}}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!},$$

czyli

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$G_n = \frac{D_n}{n!}.$$

Wtedy
$$G_n = G_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!},$$
skąd łatwo wynika, że
$$G_n = G_1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$
Ponieważ $G_1 = 0$, więc ostatni wzór możemy zapisać w postaci
$$G_n = 1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$
Stąd otrzymujemy ostatecznie
$$\boxed{D_n = n!\left(1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).}$$
Dla dużych n mamy więc dobre przybliżenie
$$D_n \approx \frac{n!}{e}.$$