# Ułamki łańcuchowe

*Witold WIĘSŁAW, Wrocław*

Ułamki łańcuchowe wiążą się z algorytmem Euklidesa; mogły więc być znane już za jego czasów, ale nie były znane .... Stało się tak zapewne dlatego, że choć pojęciowo łatwe, wymagają odpowiedniej symboliki algebraicznej, której brakowało w Starożytności.

## 1. Początki – wiek XVI i XVII

Mimo braku postępu w budowaniu teoretycznych podstaw pojęcia liczby, postęp jednak nastąpił: odkryto ułamki łańcuchowe. Rafael Bombelli (1572) napisał

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ldots}}}.$$

Natomiast Pietro Cataldi (1613) odnotował w dziele *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (Bologna):

$$\sqrt{18} = \sqrt{4^2+2} = 4.\&\,\underline{2}\atop{\quad 8.\&\,\underline{2}\atop{\quad 8.\&\,\underline{2}\atop{\quad 8}}}$$

Można zauważyć, że $\sqrt{a^2+b} = a + x$ daje $x = \dfrac{b}{2a+x}$, czyli

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}},$$

gdzie kropki oznaczają itd., a nie przejście do granicy. W tamtych czasach jeszcze nie zajmowano się zbieżnością ciągów. Powyższy algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego przypisują niekórzy Teonowi ze Smyrny (II wiek n.e.).

Daniel Schwenter w dziele *Geometria practica* z 1625, dzieląc kolejno 177 przez 233, otrzymał

$$\frac{177}{233} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}},$$

co dziś zapisujemy jako $[0; 1, 3, 6, 4, 2]$. Schwenter robił to w celu przybliżenia liczby $\frac{177}{233}$ liczbą o mniejszym mianowniku. Otrzymał kolejne przybliżenia: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{79}{104}$.

Lord Brouncker (1695) rozwinął iloczyn nieskończony odkryty przez Johna Wallisa:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots},$$

w ułamek

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}} = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{2}\ \&\text{c.}$$

Wallis (1695) zapisał go w postaci po prawej stronie, pisząc *Nempe si unitati* *adjungatur fractio, que denominatorem habeat continue fractum* – którego mianowniki tworzą ułamek łańcuchowy (dosłownie: ciągły).

Christian Huygens w *Descriptio automati planetarii* (opublikowane pośmiertnie w 1698) budując model planetarium, zapisał liczbę 2 640 858 : 77 708 431 w postaci ułamka łańcuchowego, podając przybliżenie tej liczby liczbą o mniejszym mianowniku.

## 2. Dalsze dzieje – wiek XVIII

Dopiero jednak Leonhard Euler (1707–1783) systematycznie rozwinął teorię ułamków łańcuchowych we *Wstępie do analizy nieskończenie małych* (*Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne 1748) i zastosował do przybliżania liczb niewymiernych liczbami wymiernymi o nie za dużych mianownikach. Euler podaje nie tylko algorytm, ale także znajduje wiele rozwinięć na ułamki łańcuchowe. A oto ten algorytm (algorytm rozwijania liczby w ułamek łańcuchowy).

Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą. Oznaczmy przez $[x]$ część całkowitą (cechę) liczby $x$, tzn. największą liczbę całkowitą, niewiększą niż $x$. Zatem $x = a_0 + x_1$, gdzie $0 \leq x_1 < 1$. Załóżmy, że $x_1 \neq 0$. Możemy napisać: $x_1 = r_1^{-1}$, gdzie $r_1 > 1$. Teraz stosujemy poprzedni algorytm do $r_1$: $r_1 = a_1 + x_2$, gdzie $a_1 = [r_1]$ i $0 \leq x_2 < 1$. Jeżeli $x_2 = 0$, to rozwijanie w ułamek łańcuchowy jest zakończone. W przeciwnym wypadku $x_2 = r_2^{-1}$, gdzie $r_2 > 1$. W podobny sposób $r_2 = a_2 + x_3$, itd. Po czterech krokach otrzymamy:

$$x = a_0 + x_1 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + x_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + x_4}}} = \text{itd.}$$

Okazuje się, że otrzymany ciąg liczb wymiernych $a_0$, $a_0 + \dfrac{1}{a_1}$, $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$, itd. jest zbieżny do liczby $x$. Na przykład, niech $x = \sqrt{3}$. Wówczas $x = 1 + \dfrac{1}{r_1}$, gdzie $r_1 = (\sqrt{3} - 1)^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$. Ponieważ $1 < \sqrt{3} < 2$, więc $1 < r_1 < \frac{3}{2}$, skąd $r_1 = 1 + r_2^{-1}$, czyli $r_2 = \sqrt{3} + 1$. Zatem $r_2 = 2 + (\sqrt{3} - 1)$, skąd wynika, że $r_3 = (\sqrt{3} - 1)^{-1} = r_1$.

Ostatecznie otrzymujemy rozwinięcie $\sqrt{3}$ w nieskończony okresowy ułamek łańcuchowy, który zapisuje się jako $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$, albo krótko w postaci: $\sqrt{3} = [1 : \overline{1, 2}]$.

Euler odkrył, że jeżeli liczba ma nieskończone i okresowe (od pewnego miejsca) rozwinięcie w ułamek łańcuchowy, to jest to niewymierność kwadratowa (liczba algebraiczna stopnia 2) tzn. liczba postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c$ są liczbami wymiernymi ($b \neq 0$ i $c$ nie jest kwadratem liczby wymiernej). Na przykład, stosunek $\phi$ *złotego podziału*, czyli *liczba złota* ma rozwinięcie złożone z samych jedynek. Jeżeli $x = [2; 2, 2, \ldots]$, to $x = 2 + \frac{1}{x}$, skąd wynika, że $x = 1 + \sqrt{2}$. Trudniejsze twierdzenie odwrotne udowodnił dwadzieścia lat później Lagrange (1768):

*każda niewymierność kwadratowa ma okresowe (od pewnego miejsca) rozwinięcie w ułamek łańcuchowy.*

Była już mowa o osiągnięciach Eulera w budowaniu teorii ułamków łańcuchowych. Wróćmy na chwilę do rozwoju pojęcia liczby. Pojęcie liczby jako proporcji, sięgające – jak wiemy – teorii stosunków Eudoksosa, nadal obowiązywało w XVIII wieku, np. można je znaleźć w pracach Isaaca Newtona, Leonharda Eulera i innych. Próby bliższego powiązania pojęcia liczby wymiernej i niewymiernej pojawiły się w II połowie XVIII wieku. A.G. Kästner (1719–1800) traktował liczby niewymierne jako granice liczb wymiernych. D'Alembert (1717–1783) odrzucał istnienie liczb niewymiernych. Pogląd ten miał swoich zwolenników i w późniejszym okresie, np. Kronecker też odrzucał istnienie liczb niewymiernych. Równocześnie jednak XVIII wiek przynosi jakościowe wyniki dotyczące liczb niewymiernych. W połowie tego stulecia postawiono, chyba po raz pierwszy, pytanie dotyczące niewymierności (a być może nawet przestępności, sądząc z tytułu pracy) liczb e, $\pi$ i $\log_a b$, gdzie $a$, $b$ są dodatnimi liczbami wymiernymi, $a \neq 1$ i $b$ nie jest wymierną potęgą a. W 1837 Euler udowodnił niewymierność liczb e i $e^2$. Znalazł też rozwinięcie: $\frac{1}{2}(e-1) = [1;6,10,14,18,22,\ldots]$ w ułamek łańcuchowy. Cytuje to rozwinięcie w *Introductio in analysin infinitorum*, nie wyciągając jednak oczywistego wniosku, że $\frac{1}{2}(e-1)$, a więc i e, są liczbami niewymiernymi. Wynik ten uogólnił Johann Heinrich Lambert w 1766. Udowodnił on znacznie więcej, a mianowicie, jeżeli $x \neq 0$ jest liczbą wymierną, to $e^x$ jest liczbą niewymierną. U Eulera wystąpił też w *Introductio...* archaiczny termin *numerus surdus* (liczba głucha). Zwykle używał jednak terminu *numerus irrationalis* na określenie liczby niewymiernej.

J.H. Lambert (1728–1777) udowodnił w 1761, że $\pi$ jest liczbą niewymierną, ale dowód był błędny. Natomiast w 1766 udowodnił następujące twierdzenie, uogólniające wyniki uzyskane przez Eulera w 1737 roku:

1) *Jeżeli* $x \in \mathbb{Q}^\times$, *to* $e^x \notin \mathbb{Q}$. *W szczególności* $\log x \notin \mathbb{Q}$ *dla* $x \in \mathbb{Q}^\times$, $x \neq 1$.

2) *Jeżeli* $x \in \mathbb{Q}^\times$, *to* $\operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, więc z twierdzenia 2 wynika, że $\pi$ jest liczbą niewymierną. Lambert podał też bezpośredni dowód tego faktu. Natomiast z twierdzenia 1 wynika, że $e^n \notin \mathbb{Q}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dowód Lamberta daje w istocie więcej: *jeżeli* $a \in \mathbb{R}$ *jest liczbą, dla której* $a^2 \in \mathbb{Q}$, *to* $\frac{\operatorname{tg} a}{a} \notin \mathbb{Q}$. Dowód Lamberta wykorzystywał rozwinięcie funkcji $\operatorname{tg} x$ w uogólniony ułamek łańcuchowy, w którym w licznikach są dowolne liczby zamiast jedynek, mianowicie Lambert wykorzystuje rozwinięcie:

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots}}}, \tag{1}$$

oraz następujący fakt:

$$\alpha = \cfrac{m_0}{n_0 + \cfrac{m_1}{n_1 + \cfrac{m_2}{n_2 + \cfrac{m_3}{n_3 + \ldots}}}}$$

gdzie $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ oraz $\left|\frac{m_i}{n_i}\right| < 1$ dla $i \geq i_0$, to $\alpha \notin \mathbb{R}$.

A.M. Legendre w swojej *Géométrie* (1794) zastosował rozwinięcie (1) funkcji $\operatorname{tg} x$ biorąc funkcję $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$ i stosując powyższy lemat. Udowodnił w ten sposób, że także $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$. W komentarzu pisał:

*Jest prawdopodobne, że liczba $\pi$ nie jest zawarta wśród niewymierności algebraicznych, tzn. nie jest pierwiastkiem równania algebraicznego o skończonej liczbie składników, którego współczynniki są wymierne, lecz jak się wydaje, ścisły dowód takiego twierdzenia jest bardzo trudny; jesteśmy w stanie udowodnić, że kwadrat $\pi$ jest jeszcze liczbą niewymierną.*

Jest to chyba pierwsze miejsce w literaturze, w którym pojawia się precyzyjnie pojęcie liczby przestępnej. Co prawda już wcześniej pojawił się termin *funkcja przestępna* na określenie funkcji, która rozwija się w nieskończony szereg potęgowy i nie jest funkcją algebraiczną (tzn. nie jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach, które też są wielomianami). W tym sensie mówiono w XVIII wieku, że *sinus* jest funkcją przestępną. Ze sformułowań w *Introductio...* i w innych dziełach Eulera nie wynika w sposób jednoznaczny, że posługiwał się on współczesnymi pojęciami liczby algebraicznej i przestępnej. Używa

Euler terminu *wielkości przestępne*, co w kontekście oznacza, że nie są to liczby wymierne ani też niewymierności kwadratowe. Termin *przestępny* używany jest też przez Eulera w odniesieniu do funkcji, które nie są algebraiczne.

## 3. Wiek XIX – dalszy rozwój teorii i jej zastosowania

Natomiast sam termin *liczba przestępna* pojawił się chyba po raz pierwszy w jednej z prac Leibniza (1646-1716):

*mamy trojakiego rodzaju wielkości: wymierne, algebraiczne i przestępne.* W jednej z prac pisał on, że liczba $2^{1/\sqrt{2}}$ jest *intercendentna.*

Teorię liczb przestępnych zapoczątkowały prace J. Liouville'a (1809–1882). Szczegóły można znaleźć w pięknej książce J. Lützena o Liouville'u [4].

W 1843 prawnuk Leonharda Eulera, P.H. Fuss opublikował korespondencję znanych matematyków XVIII stulecia, głównie pomiędzy jego pradziadkiem i innymi uczonymi. Jest tam także część korespondencji Christiana Goldbacha z Danielem Bernoullim. W liście z 28 IV 1729 Bernoulli pyta Goldbacha *czy liczba*

$$\log\frac{m+n}{m}=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{2m^2}+\frac{n^3}{3m^3}-\dots$$

*jest wymierna, czy wyraża się przez pierwiastki [stopnia dwa], czy jest niewymierna?*

Termin *liczba niewymierna* należy tu rozumieć, jako *liczbę, która nie jest postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a,b,c\in\mathbb{Q}$.*

18 VIII 1729 Goldbach odpowiada zapytując, czy liczba $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+\frac{p}{q}n\right)^{-1}$ jest pierwiastkiem z liczby wymiernej ($p,q\in\mathbb{Z}$, $pq\neq 0$).

20 X 1729 Goldbach pyta Bernoulliego, czy liczba $a=10^{-1}+10^{-2}+10^{-4}+\dots+10^{-2}+\dots$ jest niewymierna, po czym stwierdza bez dowodu, że tak jest, a nawet, że $a$ nie jest pierwiastkiem z liczby wymiernej. Liouville zapoznał się z tą korespondencją. Pierwsze, nieudane próby dowodu przestępności e pochodzą od niego. W 1840 Liouville przygotował dla *Comptes Rendus* Akademii Paryskiej pracę, w której udowodnił przestępność e. Znalazł jednak błąd w tym dowodzie, a to, co z tego dowodu pozostało, to stwierdzenie, że e, a nawet $e^2$ nie są pierwiastkami wielomianu stopnia 1 lub 2 o współczynnikach całkowitych, tzn. e i $e^2$ nie są liczbami algebraicznymi stopnia 1 ani stopnia 2. Liouville stosując metodę Lagrange'a (1770) rozwijania liczby algebraicznej na ułamek łańcuchowy udowodnił w 1844, że

*jeżeli $\alpha$ jest rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia $n$,*

$$\alpha=b_0+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\dots}}$$

*jej rozwinięciem na ułamek łańcuchowy, a $\frac{p_m}{q_m}$ jest $m$-tym reduktem tego rozwinięcia, to istnieje taka stała $A>0$, że*

(2) $$b_{m+1}<Aq_m^{n-2}\ \text{dla każdego}\ m\in\mathbb{N}.$$

Następnie, przyjmując $b_0\geq 2$, $b_{m+1}:=q_m^m$ wywnioskował, że *liczba* $[b_0;b_1,b_2,\dots]$ *jest przestępna.* Jednak podstawowym twierdzeniem w pracy z *Comptes Rendus* z 1844 był dowód, że *każdy przedział zawiera liczbę przestępną.* Wspomina tam też o przestępności liczby

$$\Theta(g)=\sum_{n=0}^{\infty}g^{-n!},\quad g\in\mathbb{N},\ g\neq 1.$$

W następnej Nocie upraszcza dowód nierówności (2), stwierdzając przy okazji, że

*jeżeli $\alpha\in\mathbb{A}\cap\mathbb{R}$ (gdzie $\mathbb{A}$ oznacza zbiór liczb algebraicznych) jest liczbą algebraiczną stopnia $n>1$, to istnieje taka stała $C>0$, że*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > Cq^{-n} \tag{3}$$

*dla każdej pary względnie pierwszych liczb całkowitych $p$ i $q$, $q > 0$.*

Twierdzenie to zostało wyodrębnione i opublikowane przez Liouville'a dopiero w 1851 roku.

## 4. Kilka niezbędnych faktów

Podstawowe własności ułamków łańcuchowych mogą być wyprowadzone elementarnie. Na przykład takie ujęcie zawiera 3 tom Biblioteczki Matematycznej [1] (por. też [2], [7], [8], [13]).

Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą. Stosując do niej algorytm ułamków łańcuchowych otrzymuje się ciąg $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, w którym wszystkie wyrazy są liczbami naturalnymi, z wyjątkiem $a_0$, które może być także ujemną liczbą całkowitą. Ułamek łańcuchowy zbudowany z pierwszych $n+1$ wyrazów tego ciągu nazywany jest *$n$-tym reduktem liczby $x$* i oznaczany przez $R_n$. Zatem

$$R_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Niech $p_n$ będzie licznikiem, a $q_n$ mianownikiem tego ułamka. Przy pomocy łatwej indukcji dowodzi się następujących związków rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} &= a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{aligned} \tag{4}$$

dla każdego $n \geq 0$. Można je zapisać macierzowo:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

skąd łatwo wyprowadzić podstawowe własności ułamków łańcuchowych. Np. wynika stąd piękny wzór

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Nietrudno dowodzi się, że redukty o wskaźnikach parzystych tworzą rosnący ciąg liczb mniejszych niż $x$, a wszystkie redukty o wskaźnikach nieparzystych są większe od $x$ i tworzą ciąg malejący:

$$R_0 \quad R_2 \quad R_4 \; R_6 \; \ldots \; x \; \ldots \; R_7 \; R_5 \quad R_3 \quad R_1$$

Ponieważ wyznacznik macierzy po lewej stronie równości (5) jest równy $(-1)^{n+2}$, więc licznik $p_n$ i mianownik $q_n$ $n$-tego reduktu są względnie pierwsze, a ponadto

$$R_{n+1} - R_n = (-1)^{n+2}/q_{n+1}q_n.$$

Ponieważ $x$ leży między kolejnymi reduktami $R_n$ i $R_{n+1}$, więc wynika stąd, że

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

co zapewnia już zbieżność ciągu reduktów $R_n$ do liczby $x$, bo $q_n \geq n$ dla każdego $n \geq 0$. Można udowodnić więcej:

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

co pozwala oszacować błąd. Na przykład, dla $x = \sqrt{2}$ kolejne redukty to $1, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$, itd. Stąd dla drugiego reduktu $\frac{7}{5}$ otrzymuje się oszacowanie

$$\frac{1}{120} < \left|\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right| < \frac{1}{5 \cdot 12} = \frac{1}{60},$$

a dla następnego reduktu $\frac{17}{12}$ oszacowanie

$$\frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} < \left|\sqrt{2} - \frac{17}{29}\right| < \frac{1}{12 \cdot 29}.$$

Hikojrō Kenkō (1722) był jednym z pierwszych, którzy znaleźli początkowe wyrazy rozwinięcia $\pi$ w ułamek łańcuchowy:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{244 + \cfrac{1}{\dots}}}}}$$

Kolejne redukty rozwinięcia $\pi$ to: $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{86\,953}{27\,678}$. Większość przybliżeń $\pi$ znanych od czasów starożytnych to właśnie te liczby.

Zanim wyjaśnię, dlaczego tak chętnie posługiwano się ułamkami łańcuchowymi, wróćmy jeszcze na chwilę do liczby, która ma najprostsze rozwinięcie w nieskończony ułamek łańcuchowy: jest nią *liczba złota* $\phi$, o rozwinięciu $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots] = [1; \bar{1}]$. Ze wzorów rekurencyjnych (4) wynika, że $n$-ty redukt rozwinięcia liczby $\phi$ na ułamek łańcuchowy ma postać $R_n = F_{n+1}/F_n$, gdzie ciąg $(F_n)$ określony jest następująco:

(6) $$F_0 = F_1 = 1 \text{ i } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geq 0.$$

Ciąg $(F_n)$ nazywany jest *ciągiem Fibonacciego*, dla uczczenia matematyka o imieniu Leonardo Pisano Bigollo, nazwanego w XIX wieku niesłusznie Fibonaccim (filius Bonacci, czyli syn Bonacciego). Otóż Leonardo z Pizy w swoim słynnym dziele *Liber abbaci* z 1202 roku wśród wielu zadań ilustrujących wykład podstawowych własności systemu dziesiętnego, który poznał w czasie podróży po krajach islamu, sformułował słynne *zadanie o królikach*: zakładając, że na początku jest jedna para królików i każda para królików rodzi w ciagu miesiąca następną parę, ile par królików będzie po dwunastu miesiącach? Oznaczając przez $F_n$ liczbę par królików po $n$ miesiącach, otrzymuje się zależność (6). Okazuje się, że liczby $R_n$, a właściwie ich odwrotności, tzn. $F_n/F_{n+1}$ pojawiają się w naturalny sposób w przyrodzie. W XVIII stuleciu niejaki Charles Bonnet obliczył tzw. *filotaksję* (*phyllotaxis*) dla różnych roślin. Filotaksja dla danej rośliny (gałęzi) to stosunek $N/M$, gdzie $N$ jest liczbą obrotów, które trzeba wykonać, aby znaleźć liść leżący dokładnie pod wybranym wcześniej liściem, a $M$ jest liczbą odstępów pomiędzy nimi. Okazuje się, że na ogół filotaksja ma postać $F_n/F_{n+1}$ i na ogół jest stała dla danej rośliny. *Na ogół* oznacza tu, że statystycznie w większości przypadków, tzn. w 90–95% pomiarów. Odstępstwa są nieliczne. Jest kilka gatunków roślin, dla których jest inaczej, a poza tym są to mutanty. W innym nietypowych przypadkach filtaksja też ma postać $G_n/G_{n+1}$, gdzie ciąg $G_n$ spełnia warunek (6) z innymi wartościami początkowymi (np. $G_0 = 1$, $G_1 = 2$). Ponieważ stosunek złotego podziału $\phi$ jest uważany za symbol doskonałości obiektów, których dotyczy (ludzkie ciało, słynne budowle Starożytności i Renesansu etc.), więc można powiedzieć, że *fiolotaksja jest miarą doskonałości w przyrodzie i często niewiele się różni od wzorca doskonałości, tzn. od liczby $\phi$*, o ile tylko $n$ jest dostatecznie duże.

Czytelnikowi należy się jednak wyjaśnienie, dlaczego właśnie ułamki łańcuchowe, a nie inne przybliżenia wymierne liczb rzeczywistych są takie wygodne. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ niech $\|x\|$ oznacza odległość $x$ od najbliższej liczby całkowitej, tzn. $\|x\| = \min\{n - x : n \in \mathbb{Z}\}$. Liczbę wymierną $p/q$ nazywa się *najlepszym przybliżeniem liczby $x$*, jeżeli $\|qx\| = |qx - p|$ i $\|qx\| < \|q'x\|$ dla każdego $q'$ spełniającego $1 \leq q' < q$. Poniższe *twierdzenie o najlepszej aproksymacji* znane już było zapewne L. Eulerowi, a może nawet Huygensowi, ale wyartykułowano i udowodniono je dopiero w XX wieku. Częściowo udowodnił je J.L. Lagrange w 1770.

*Jeżeli $p/q$ jest najlepszym przybliżeniem liczby $x \in \mathbb{R}$, to $p/q$ jest reduktem liczby $x$, tzn. istnieje $n$, takie że $p/q = R_n$. Jeżeli $n \geq 1$ to i odwrotnie: każdy redukt liczby $x$ jest jej najlepszym przybliżeniem.*

Jeżeli żądać mniej, tzn. mówić o najlepszym przybliżeniu $p/q$ liczby $x$, gdy dla dowolnej liczby wymiernej $a/b$ różnej od $p/q$, dla której $1 \leq b < q$, zachodzi

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{a}{b}\right|,$$

to wtedy każde najlepsze przybliżenie jest reduktem lub medianą dwóch reduktów, tzn. jest jednym z ułamków w ciągu postaci

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_{n-1}+p_n}{q_{n-1}+q_n}, \frac{p_{n-1}+2p_n}{q_{n-1}+2q_n}, \ldots \frac{p_{n-1}+(a_n-1)p_n}{q_{n-1}+(a_n-1)q_n}, \frac{p_{n-1}+a_n p_n}{q_{n-1}+a_n q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

Wszystkie redukty $p/q$ rozwinięcia liczby niewymiernej $x$ na ułamek łańcuchowy spełniają nierówność z dwóch kolejnych przybliżeń z trzech kolejnych przybliżeń jeden

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \text{ jeden ~~co drugi~~ } \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}, \text{ a co trzeci } \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

## 5. Przykład zastosowania ułamków łańcuchowych

W roku 1848 J.A. Serret udowodnił, że *dwie liczby* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *i* $\beta = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ *mają to samo (od pewnego miejsca) rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, *takie że* $ad - bc = \pm 1$ *i* $\alpha = \dfrac{a\beta + b}{c\beta + d}$. We współczesnej terminologii oznacza to, że grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ działa jako grupa przekształceń na zbiorze liczb niewymiernych w ten sposób, że jeżeli $x$ jest dowolną liczbą niewymierną, a $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, to $g(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Twierdzenie Serreta w takiej interpretacji daje opis orbit.

Archimedesowi przypisuje się próbę rozwiązania tzw. *zadania o bykach* (nie udało mi się znaleźć wiarygodnego źródła, które by to potwierdziło): rozwiązać w liczbach naturalnych $x, y$ równanie

$$x^2 - 4\,729\,494 y^2 = 1.$$

Zagadnienie jest ogólniejsze – dotyczy sposobu wyznaczania rozwiązań równania $x^2 - Ny^2 = 1$, zwanego *równaniem Pella* i równania $x^2 - Ny = -1$, zwanego *równaniem nie-Pella*, gdzie $N \in \mathbb{N}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Równanie to znał już Brouncker w XVII wieku – podał metodę rozwiązania; znali je również współcześni, wśród nich Pierre de Fermat i Frenicle de Bussy. Lagrange (1766) dowiódł, że równanie Pella zawsze ma nieskończenie wiele rozwiązań $(x, y)$, w przeciwieństwie do równania nie-Pella, które może nie mieć takich rozwiązań (np. $x^2 - 3y^2 = -1$). Terminu *równanie Pella* błędnie użył Euler i tak już pozostało do dziś.

Okazuje się, że $\sqrt{N}$ ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy postaci: $\sqrt{N} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n, 2a_0}]$, gdzie $a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}$, itd. Wtedy $n$-ty redukt rozwinięcia $\sqrt{N}$ daje nietrywialne rozwiązanie równania Pella (a czasami nie-Pella):
$p^2 - Nq^2 = (-1)^{n-1}$. Na przykład dla $N = 2$ mamy $n = 1$, $p_1 = q_1 = 1$ i rozwiązania równania Pella otrzymuje się jako współczynniki $x_k, y_k$ w równości $x_k + y_k\sqrt{2} = \pm(1 + \sqrt{2})^k$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Ułamki łańcuchowe mają też liczne zastosowania w analizie harmonicznej, w geometrii hiperbolicznej (opis geodezyjnych na powierzchni Riemanna powstałej ze sklejenia obszaru fundamentalnego modelu Poincarego-Beltramiego), ale opis tych zastosowań wymagałby osobnego artykułu.

## 6. Metryczna teoria ułamków łańcuchowych

Interesującym problemem jest *średnie* albo *statystyczne* zachowanie się ułamków łańcuchowych, które można mierzyć za pomocą miary Lebesgue'a. Jednym z pierwszych wyników w tym kierunku było twierdzenie Chinczyna (1935): *jeżeli liczba* $x$ *ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy* $x = [a_0(x); a_1(x), a_2(x), \ldots]$, *to średnie geometryczne mianowników mają stałe granice prawie wszędzie (w sensie miary Lebesgue'a):*

$$\lim_{n\to\infty} (a_0(x)a_1(x)\ldots a_{n-1}(x))^{1/n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{\log n/\log 2} = 2.685550\ldots$$

*prawie wszędzie*. Oryginalny dowód Chinczyna był trudny.

W 1948 E. Marczewski zapytał, czy translacja wskaźnika w rozwinięciu liczb na ułamek łańcuchowy, tzn. odwzorowanie $T$ odcinka $(0,1)$ w siebie zadane wzorem

$$T([0;a_1,a_2,a_3,\ldots]) = [0;a_2,a_3,\ldots])$$

jest ergodyczne? Odpowiedzi pozytywnej udzielił C. Ryll-Nardzewski w 1950: odwozorowanie $T$, $T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ jest ergodyczne względem miary $P(A) = \frac{1}{\log 2} \int\limits_A \frac{dx}{1+x}$, co oznacza, że $P(T^{-1}(A)) = P(A)$ dla każdego zbioru $A$ mierzalnego względem miary $P$ (równoważnej mierze Lebesgue'a). Zastosowanie twierdzenia ergodycznego dało nowy dowód twierdzenia Chinczyna i stało się od tego czasu metodą dowodzenia twierdzeń w metrycznej teorii liczb i w pokrewnych zagadnieniach.

Niech $F(n) = \{x \in [0,1) : a_k \leq n$ dla każdego $k \geq 1\}$. M. Hall wykazał w 1947, że *każda liczba rzeczywista $x$ ma postać: $x = x_1 + x_2$, gdzie $x_1, x_2 \in F(4)$; ponadto każda liczba $y \geq 1$ daje się zapisać w postaci $y = y_1 y_2$, gdzie $y_1, y_2 \in F(4)$.* Podobnie T.W. Cusick dowiódł przed dwudziestu laty, że możliwy jest rozkład $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, w którym składniki pochodzą ze zbioru $F(2)$.

C.L. Siegel (1928) wykazał przy okazji (w pracy z teorii równań różniczkowych), że *jeżeli liczby naturalne $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tworzą ciąg arytmetyczny, to liczba $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ jest przestępna.* Na przykład liczba z rozwinięciem $[0;1,2,3,\ldots]$ jest przestępna.

Ułamki łańcuchowe zachowują się według rozkładu Gaussa: *jeżeli $x = [a_0, a_1, \ldots]$ jest rozwinięciem liczby $x$ na ułamek łańcuchowy, a $p_N/q_N$ jej $N$-tym reduktem, to dla powyższej miary $P$*

$$P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\left(\log q_N \frac{N\pi^2}{12\log 2}\right) < y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt + O((\log\log N/\log N)^{1/2})$$

*prawie wszędzie.*

## 7. Uogólnienia ułamków łańcuchowych

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu faktów dotyczących ułamków łańcuchowych, kilka uwag o możliwych uogólnieniach. Pierwsze próby uogólnienia ułamków łańcuchowych podjął anonimowy matematyk M. R. S. (?) w 1829. W pracy tej pojawiają się zapisy

$$x = A + f(A + f(A + \ldots)$$
$$x = Af(Af(Af(A)\ldots)$$

i właściwie nic więcej.

Stern w 1834 pisze nieskończone wyrażenia pierwiastnikowe podobnie, jak to zrobił Bombelli w 1572 – jeżeli $x^3 - ax - b = 0$, to $x^2 = a + \frac{b}{x}$, a zatem

$$x = \sqrt{a + \frac{b}{\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{\cdots}}}}$$

bez względu na to, co oznacza taki nieskończony ciąg pierwiastków. Podobne wyrażenie odnotowuje Stern w przypadku trójmianu stopnia $m+1$: jeżeli $x^{m+1} - ax - b = 0$, to $x^m = a + \frac{b}{x}$, czyli

$$x = \sqrt[m]{a + \frac{b}{\sqrt[m]{a} + \frac{b}{\sqrt[m]{\cdots}}}}$$

Jednakże dopiero w naszym stuleciu pojawiły się precyzyjniejsze prace uogólniające ułamki łańcuchowe.

D.H. Lehmer (1938) zauważył, że wiele znanych sposobów przedstawiania liczb otrzymuje się poprzez nieskończone iteracje funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$. Na przykład, dla $f(x,y)$ zdefiniowanych tak, jak poniżej, otrzymuje się odpowiednio: szeregi nieskończone, iloczyny nieskończone, ułamki łańcuchowe, rozwinięcia przy podstawie $q$ i nieskończone wyrażenia postaci $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x_1 - \mathrm{arcctg}\, x_2 + \mathrm{arcctg}\, x_3 - \ldots)$, które autor zbadał:

$$f(x,y) = x+y: \ f(x_1, f(x_2, f(x_3, \ldots))) \text{ to szereg } \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

$$f(x,y) = xy: \ f(x_1, f(x_2, f(x_3, \ldots))) \text{ to iloczyn } \prod_{n=1}^{\infty} x_n;$$

$$f(x,y) = x + \frac{1}{y}: \ f(x_1, f(x_2, f(x_3, \ldots))) \text{ to } x_1 + \cfrac{1}{x_2 \cfrac{1}{x_3 + \ldots}}$$

$$f(x,y) = x + \frac{y}{q}: \ f(x_1, f(x_2, f(x_3, \ldots))) \text{ to } x_1 + \frac{x_2}{q} + \frac{x_3}{q^2} + \ldots$$

$$f(x,y) = \frac{xy+1}{y-x}: \ f(x_1, f(x_2, f(x_3, \ldots))) \text{ to } \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x_1 - \ldots)$$

B.H. Bissinger (1944) posłużył się innym pomysłem. Zauważył on mianowicie, że znane rodzaje rozwinięć liczb rzeczywistych otrzymuje się jako nieskończone iteracje odpowiednich funkcji jednej zmiennej. Rozważał on rozwinięcia liczb rzeczywistych postaci

$$x = a_0 + f(a_1 + f(a_2 + f(a_3 + \ldots)))$$

dla odpowiednich funkcji różnowartościowych $f$. Na przykład dla $f(x) = \frac{1}{x}$ otrzymuje się rozwinięcie w ułamek łańcuchowy; jeżeli funkcją jest $f(x) = \frac{x}{q}$, to rozwinięciem za pomocą tej funkcji jest rozwinięcie liczby przy podstawie $q$; natomiast funkcja $f(x) = (x+1)^{1/m} - 1$ ($m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ ustalona liczba) definiuje rozwinięcia w nieskończone pierwiastniki stopnia $m$. Klasy takich funkcji opisał Rényi (1957). Algorytm uogólnionego rozwinięcia liczby $x$ względem takiej funkcji $f$ jest bardzo prosty: $a_0(x) = [x]$ (cecha liczby $x$), $r_0(x) = (x)$ (mantysa $x$, tzn. jej część ułamkowa: $(x) = x - [x]$). Dalsze wyrazy rozwinięcia obliczamy indukcyjnie: $a_{n+1}(x) = [f^{-1}(r_n(x))]$, $r_{n+1}(x) = (f^{-1}(r_n(x)))$.

Ponieważ bibliografia przedmiotu jest bardzo obszerna, zamieszczam tylko kilka charakterystycznych prac i książek. Z tego też powodu na ogół nie umieszczałem odsyłaczy w tekście.

## Bibliografia


[1] A. J. Banarski, *Równania nieoznaczone. Ułamki łańcuchowe. Kombinatoryka. Dwumian Newtona.* PZWS, Warszawa 1961.

[2] A. J. Chinczyn, *Cepnyje drobi* (ros.), wyd. 4, Moskwa 1973.

[3] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* Lausanne 1748.

[4] J.Lützen, *Joseph Liouville 1809–1882: Master of Pure and Applied Mathematics,* Springer-Verlag 1990.

[5] M. R. S., *Analyse algébrique. Note sur quelques expressions algébriques peu connues,* Annales de Mathèmatiques Pures et Appliquées 20 (1829), 352–366.

[6] A. F. Möbius, *Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts,* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 6 (1830), 215–243.

[7] W. Narkiewicz, *Teoria liczb,* PWN, Warszawa 1977.

[8] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* B. G. Teubner. Leipzig-Berlin 1913.

[9] W. Philipp, O. P. Stackelberg, *Zwei Grenzwertsätze für Kettenbrüche,* Mathematische Annalen 181 (1969), 152–156.

[10] A.Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties,* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957), 477–493.

[11] C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II) (Ergodic theory of continued fractions),* Studia Mathematica 12 (1951), 74–79.

[12] C.L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen,* Band I. (16. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, 209–266).

[13] W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna,* wyd. 4, Warszawa 1968.

[14] M. A. Stern, *Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung,* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 10 (1833), 1–22, 154–166, 241–274, 364–376; 11 (1834), 33–66, 142–168, 277–306, 311–350.