

# Sztuka ciosania

Jest to modyfikacja problemu z „Ziarenek matematycznych” – skarbnicy świetnych pomysłów.

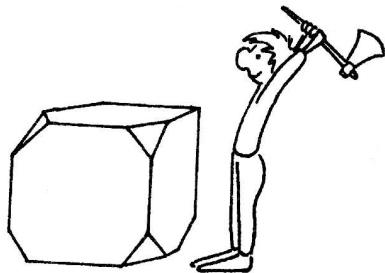
Małgorzata MIKOŁAJCZYK, Krzysztof OMILJANOWSKI, Wrocław

Pierwszy dzień po wakacjach, ostatni dzień przed feriami, dzień chłopca, dzień babci, dzień strażaka, niespodziewane zastępstwo – cóż wtedy robić? Nie godzi się męczyć ani uczniów ani, tym bardziej, studentów, „codzienną” matematyką. Oto propozycja, która, jak uczy doświadczenie, nie może się nie udać, a wykorzystać można ją na zajęciach od szkoły podstawowej (cz. 1–4), przez średnią (cz. 1–6), aż po ćwiczenia ze studentami V roku matematyki czy na spotkaniu z pracującymi już nauczycielami (cz. 1–8).






## 1. Przycinanie rogów

Podziel uczniów na grupy i rozdaj im modele różnych wielościanów. „Dodaj” też każdej grupie ostrą piłę lub siekierkę (nie obawiaj się takiego rozdawania na niby, uczniowie miewają niezłą wyobraźnię). Gdy ucichną stłumione śmiechy (z powodu tych narzędzi), masz zapewnioną chwilę ich skupienia. Są zaciekawieni, więc słuchają uważnie twego polecenia:

*Spróbujcie ociosać swoją bryłę w następujący sposób: płaskim cięciem przy każdym wierzchołku odetnijcie mały kawałek. Powstanie nowa bryła. Jak wygląda? Ile ma wierzchołków, krawędzi, ścian? Zanotujcie to. To nie koniec! Tę nową bryłę poddajcie tej samej obróbce co poprzednio. Ciach! Przy każdym wierzchołku po małym kawałeczku. Znowu policzcie liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian nowej bryły. I tak dalej.*



Dociekliwi od razu zapytają jak małe mają być te kawałki. Zignoruj to, odłóż „na potem”. Niech zajmą się pracą, a ty w tym czasie przygotuj na tablicy tabelkę:

	$w_1$	$k_1$	$s_1$	$w_2$	$k_2$	$s_2$	$w_3$	$k_3$	$s_3$	...	$w_{17}$	$k_{17}$	$s_{17}$
	4	6	4										
	8												
	10												
	5												
	7												

(na początku bez ostatniego fragmentu to jest bez  $w_{17}$ ,  $k_{17}$ ,  $s_{17}$ ). Zachęcaj by uczniowie zaczęli ją wypełniać (nie w zeszytach!). Niech reprezentanci poszczególnych grup podchodzą do tablicy i wpisują aktualnie znalezione liczby. Jeśli pojawi się gdzieś pomyłka – niech zostanie – bardzo się przyda. Nie obawiaj się tłoku i bałaganu pod tablicą. Sam spaceruj po klasie i dopinguj do pracy.

## Wzory rekurencyjne

Po jakimś czasie dorysuj ostatnie kolumny  $w_{17}$ ,  $k_{17}$ ,  $s_{17}$ . Zasugeruj, by wyznaczać  $w_{17}$ ,  $k_{17}$ ,  $s_{17}$  za pomocą poprzednich wielkości (gdy np. dla  $w_{17}$  w przypadku czworoscianu pojawi się wzór  $4 \cdot 3^{16}$  – spróbuj odsunąć jego omówienie „na potem”). Można się spodziewać, że „grupa czworoscianu” i „grupa sześcianu” przedstawia część z następujących związków:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 3w_n, \\ k_{n+1} &= k_n + 3w_n, \\ s_{n+1} &= s_n + w_n \end{aligned}$$

(w takiej lub zbliżonej postaci; zamiast  $n$  może pojawić się 16, zaakceptuj to, dopiero później przerób na  $n$ ).

Warto pokusić się o (wspólne z uczniami) uzasadnienie tych wzorów (pracujemy już z całą klasą).

- W miejsce każdego starego wierzchołka pojawiają się trzy nowe, zatem  $w_{n+1} = 3w_n$ ;
- stare krawędzie trochę się skracają (ale pozostają!) i dochodzą nowe, po trzy przy każdym starym wierzchołku, zatem  $k_{n+1} = k_n + 3w_n$ ;
- stare ściany zostają (choć trochę mniejsze, okrojone), a przybywa tyle nowych – ile było starych wierzchołków, czyli  $s_{n+1} = s_n + w_n$ .

Niestety (na szczęście?) powyższe wzory nie są uniwersalne. „Grupa piramidy” z pewnością zaprotestuje. Zapytaj więc dla jakich brył (wyjściowych) powyższe wzory są poprawne? Uczniowie zapewne zauważą, że dla tych wszystkich, w których w każdym wierzchołku schodzą się dokładnie trzy krawędzie (w rozumowaniu wykorzystuje się fakt, że po ociosaniu powstają ściany trójkątne). Może ktoś spostrzeże, że wyprowadzone wzory są uniwersalne dla dowolnego wielościanu wypukłego począwszy od drugiej operacji ścinania (po pierwszym „przycięciu” w każdym z wierzchołków schodzą się już dokładnie trzy krawędzie).

Zaproponuj inny sposób:

Najpierw pomyślmy o krawędziach:

- każda stara krawędź rozdwaja się na obu końcach, zatem  $k_{n+1} = k_n + \frac{4k_n}{2}$  (dzielimy przez 2, bo bez tego

każda z nowych krawędzi byłaby zliczana podwójnie – każdy kij ma dwa końce!),

– nowe wierzchołki pojawiają się na starych krawędziach, po dwa na każdej, a stare odpadają, czyli  $w_{n+1} = 2k_n$ ,

– ze ścianami jest tak, jak w poprzedniej wersji:

$$s_{n+1} = s_n + w_n.$$

Te nowe wzory są już uniwersalne:

$$(*) \quad \begin{aligned} w_{n+1} &= 2k_n, \\ k_{n+1} &= 3k_n, \\ s_{n+1} &= s_n + w_n, \end{aligned}$$



poprawne dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  i dla dowolnej wyjściowej bryły (wielościanu wypukłego).

Widać, że pozwalają one łatwo, niemal automatycznie, wypełniać tabelkę byle tylko robić to systematycznie dla kolejno powstających wielościanów.

Aż prosi się by to zaprogramować. Każde narzędzie (BASIC, PASCAL) wydaje się dobre. Jednak najprostszym, najbardziej naturalnym, będzie dowolny arkusz kalkulacyjny.

### Wzory „jawne”

Jeśli interesują nas tylko liczby  $w_{17}, k_{17}, s_{17}$  (lub  $w_{117}, k_{117}, s_{117}$ ), to posługiwanie się wzorami (\*) wymaga wypełnienia ogromnej tabeli. Czy nie można podać prostszych wzorów – „jawnych” – takich, które nie odwołują się do poprzednich wielkości? Postaw uczniom ten problem. Niemal od razu odkrywają, że  $k_n = k_1 3^{n-1}$ . Na podstawie  $k_n$  łatwo podać  $w_n = 2k_1 3^{n-2}$ . Mogą co prawda powstać pewne niejasności co do wykładników, ale nie bądź zbyt wymagający – podpowiedz. Z liczbą  $s_n$  jest trochę gorzej. Musisz przejąć inicjatywę i zaproponować tajemniczą operację na liczbach z tabelki. Dopisz czerwoną kredą znaki minus i plus:

	$w_1$	$-k_1$	$+s_1$	=	$w_2$	$-k_2$	$+s_2$	=	$w_3$	...
	4	6	4	2	12	18	8	2	36	...
	8	12	6	2	24	36	14	2	72	...
⋮										

Obliczamy dla każdej bryły z osobna: od liczby wierzchołków odejmujemy liczbę krawędzi i dodajemy liczbę ścian. Wynik zapisujemy (też na czerwono) w przezornie zostawionych odstępach między kolumnami. Przy czwartej czy piątej bryle uczniowie życzliwie podpowiedzą wynik (tj. 2) nim ktokolwiek zdąży to policzyć, chyba że gdzieś w tabeli jest błąd. Wynik różny od 2 niewątpliwie wywoła konsternację. Zapewne wszyscy uznają jednak, że to pomyłka. Bagatelizując to, przejdź do właśnie odkrytego wzoru:

$$w - k + s = 2.$$

Jest to wzór Eulera, którego poprawność można udowodnić (zatem to faktycznie była pomyłka). Dowodem nie będziemy się teraz zajmowali.

W młodszych klasach szkoły podstawowej ów wzór mógłby być głównym celem zajęć. W starszych klasach wykorzystamy go, by podać „jawny” wzór na  $s_n$  ( $w_n$  i  $k_n$  już znamy).

$$\begin{aligned} s_n &= 2 - w_n + k_n = 2 - 2 \cdot 3^{n-2} \cdot k_1 + k_1 \cdot 3^{n-1} = \\ &= 2 - 2 \cdot 3^{n-2} \cdot k_1 + 3 \cdot 3^{n-2} \cdot k_1 = \\ &= 2 + 3^{n-2} \cdot k_1. \end{aligned}$$



Zapiszmy odkryte wzory „jawne”:

$$(**) \quad \begin{aligned} w_n &= 2 \cdot 3^{n-2} \cdot k_1, \\ k_n &= 3^{n-1} \cdot k_1, \\ s_n &= 2 + 3^{n-2} \cdot k_1. \end{aligned}$$

Są one prawdziwe dla  $n = 2, 3, 4 \dots$

## 2. Jednakowe wielościany

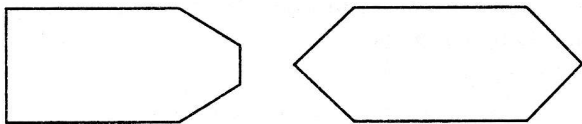
W szkole średniej, można przeprowadzić indukcyjny dowód poprawności wzorów (\*\*), jednak nie warto tym zaprzętać uwagi uczniów bo dowód taki wymaga użycia wzorów (\*) lub ich słownych uzasadnień zatem, tak naprawdę, nie wnosi nic nowego oprócz ceremoniału zapisu dowodu indukcyjnego. Zamiast tego warto przyjrzeć się wzorom (\*\*) i wyciągnąć wnioski: w trakcie ociosywania rogów danego wielościanu otrzymywane liczby wierzchołków, krawędzi i ścian zależą jedynie od liczby krawędzi wyjściowej bryły (no i oczywiście od  $n$ ). Nic zatem dziwnego, że dla sześcianu i ostrosłupa o podstawie sześciokątnej liczby te były jednakowe (poczawszy od  $w_2$ ):

	$w_1$	$k_1$	$s_1$	=	$w_2$	$k_2$	$s_2$	=	$w_3$	$k_3$	$s_3$	...
	8	12	6	2	24	36	14	2	72	108	38	...
	7	12	7	2	24	36	14	2	72	108	38	...

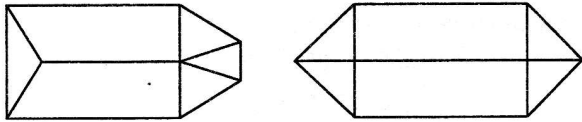
Ta zgodność rodzi pytanie: czy bryły otrzymane z przycięcia (jednokrotnego) wszystkich wierzchołków sześcianu i ostrosłupa o podstawie sześciokątnej są takie same? Jest to oczywiście szalenie nieprecyzyjne pytanie, bo przecież wielkości brył mogą być całkiem różne, kąty pomiędzy ścianami też, poza tym nie ustaliliśmy jednoznacznego sposobu obcinania wierzchołków. Mimo tych mankamentów naszego pytania jest szansa na uzyskanie odpowiedzi na przykład takiej: rozpatrywane bryły nie są takie same, bo ścinając sześcian dostajemy ściany ośmiokątne, których nie ma w drugim przypadku. Płynie z tego ważny wniosek: podanie liczby wierzchołków, krawędzi i ścian nie opisuje jeszcze w pełni wielościanu (nie wnioskując w znaczenie terminu „w pełni”).

Można pytać dalej: czy podanie liczby ścian trójkątnych, czworokątnych, pięciokątnych itd. oraz liczby wierzchołków, krawędzi i ścian w pełni opisuje wielościan? Pytanie to jest dość trudne (nie tylko dlatego, że jest nieprecyzyjne). Po jakimś czasie możesz podpowiedzieć: *Pomyślcie o różnych namiotach...*

Narysujcie namioty o takich podłogach...



Oto jedna z możliwych odpowiedzi:



Zapytaj jednak **dlaczego** są to różne wielościany.

W ten naturalny sposób możesz postawić ogólne pytanie: jakie wielkości należy podać by jednoznacznie opisać wielościan? Jednak dzwonek zadzwonił już dawno temu, więc pytanie to pozostanie bez odpowiedzi.

### 3. Doklejanie rogów

Nie zapomnij jednak o zadaniu domowym. Zaproponuj zbadanie operacji doklejania:

Na wszystkich ścianach danego wielościanu, jako na podstawach, budujemy ostrosłupy o wystarczająco małych wysokościach, by zachować wypukłość całej bryły. Należy obliczyć liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanów otrzymywanych przy wielokrotnym powtarzaniu tej operacji. I podać ogólne wzory.

Rozumowanie podobne jest do tego, które przeprowadziliśmy poprzednio.

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= s_n + w_n, \\
 (***) \quad k_{n+1} &= 3k_n, \\
 s_{n+1} &= 2k_n,
 \end{aligned}$$

- Stare wierzchołki pozostają, nowe powstają po jednym nad każdą starą ścianą;
- stare krawędzie pozostają, przy każdej z nich powstają cztery nowe krawędzie i każda zliczana jest dwukrotnie;
- stare ściany znikają, każda stara krawędź jest wspólnym bokiem dwóch nowych ścian.

Porównanie wzorów (\*\*\*) i (\*) potwierdza wrażenie, że zagadnienia ścinania i doklejania rogów są w pewnym sensie dualne.

### 4. Ciosanie krawędzi

Dla szczególnych pasjonatów badanych problemów możesz przygotować coś extra. Znowu będziemy zajmowali się **ociosywaniem** wielościanów wypukłych, lecz tym razem ścinać będziemy krawędzie.

Zadany wielościan wypukły poddajemy następującej obróbce: każdą z krawędzi ścinamy trochę płaskim cięciem (zamiast siekierą wygodniej posłużyć się

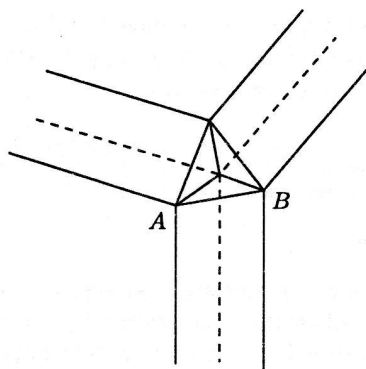
pilnikiem). Otrzymany w ten sposób wielościan poddajemy znowu temu samemu procesowi, itd.

Wyznaczyć liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian kolejno otrzymywanych wielościanów.

Jak to wygląda ?

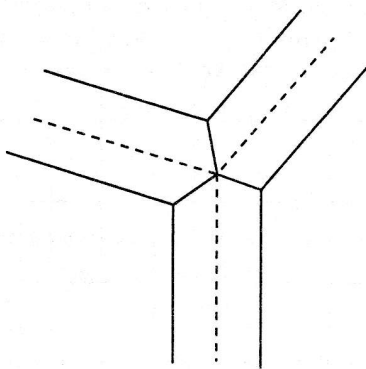
Dość szybko okazuje się, że główny problem, to nie obliczanie  $w_n, k_n, s_n$  ale ... wyobrażenie sobie jak wygląda bryła po pierwszej operacji; w szczególności co dzieje się w „okolicy” starych wierzchołków.

Dobrze jest zacząć rozważania od sześciianu. Kostka masła i ostry nóż (lub choćby myśl o nich) mogą okazać się na tym etapie nieocenioną pomocą. Na początku można spodziewać się takich rozwiązań:



Pytanie – „skąd wzięła się krawędź AB?” – uzmysławia błąd i pozwala go poprawić.

Okolice starych wierzchołków wyglądają jak zatemperowane ołówki.



Teraz łatwo już podać ogólne wzory:

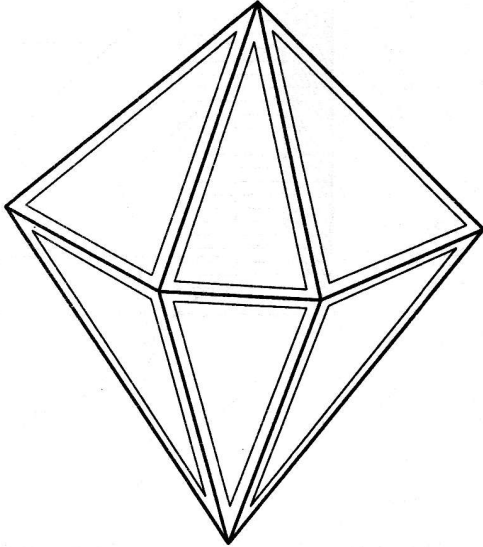
$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= w_n + 2k_n, \\
 k_{n+1} &= 4k_n, \\
 s_{n+1} &= s_n + k_n.
 \end{aligned}$$

Powstaje jednak ważny problem.

Czy w każdym wielościanie wypukłym uda się tak zestrugać krawędzie, by otrzymać sytuację analogiczną do przedstawionej na rysunku w przypadku sześciianu (krawędzie zastąpione sześciokątami łączące się w „zatemperowane ołówki” w okolicach starych wierzchołków)???

## Ścinanie „po równo”

Jako pierwszy nasuwa się bardzo naturalny pomysł, by krawędzie ścinać „po równo”. W tym celu należy na każdej ścianie wielościanu narysować  $\varepsilon$ -obwódkę i krawędzie ścinać płaszczyznami wyznaczonymi przez odpowiednie pary prostych równoległych.

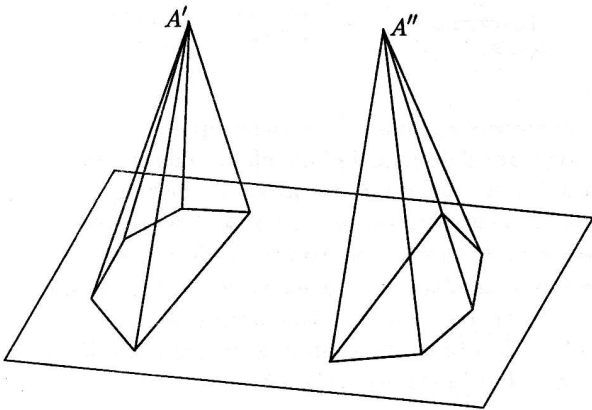


Ta metoda wydaje się poprawna dla wielościanów foremnych, graniastosłupów i ostrosłupów prawidłowych i pewnie dla wielu innych brył. Ale czy zawsze daje zamierzony efekt? Czy zawsze uda się tak dobrać  $\varepsilon$ , by uzyskać w wierzchołkach „zatemperowane ołówki”?

Otóż NIE! Opiszemy teraz taką bryłę, dla której ten sposób zawodzi.

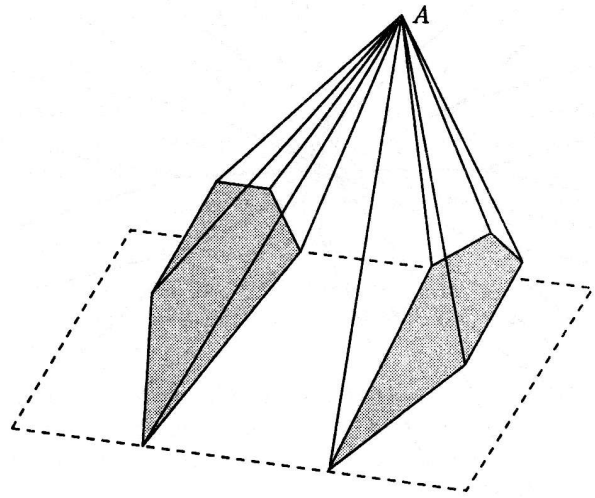
Na początek zauważmy, że jeżeli wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka  $A$  (dowolnego wielościanu wypukłego) zetniemy według metody „po równo”, to powstający „w miejsce  $A$ ” nowy wierzchołek  $B$  będzie wyznaczony przez dowolne trzy spośród tych płaszczyzn cięcia.

Weźmy teraz ostrosłup prawidłowy o podstawie ośmiokątą. Przetnijmy go płaszczyzną zawierającą wysokość i dwa wierzchołki podstawy (jest to płaszczyzna symetrii tego ostrosłupa).

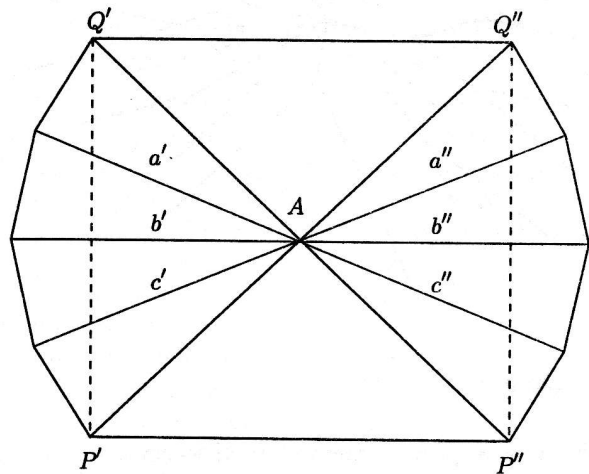


Obie połowy ostrosłupa rozsuwamy, a następnie przechylamy je ku sobie tak, by znowu połączyć

wierzchołki  $A'$  i  $A''$ . Łatamy „dziury” doklejając dwie trójkątne ściany boczne i prostokąt u dołu.

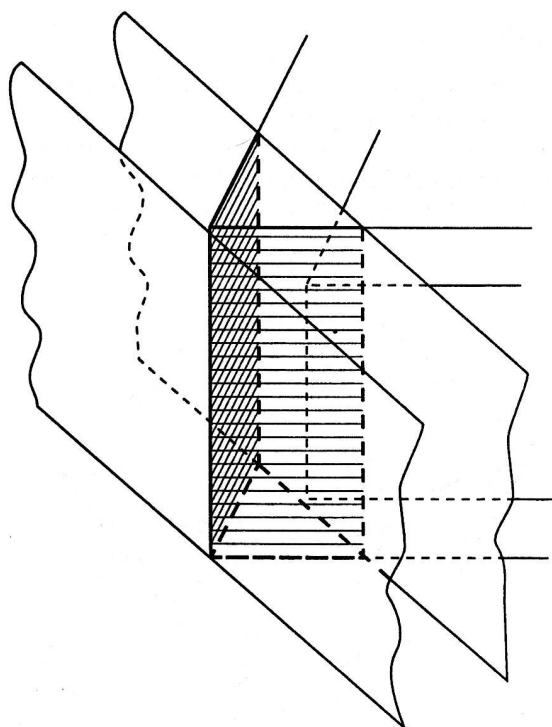
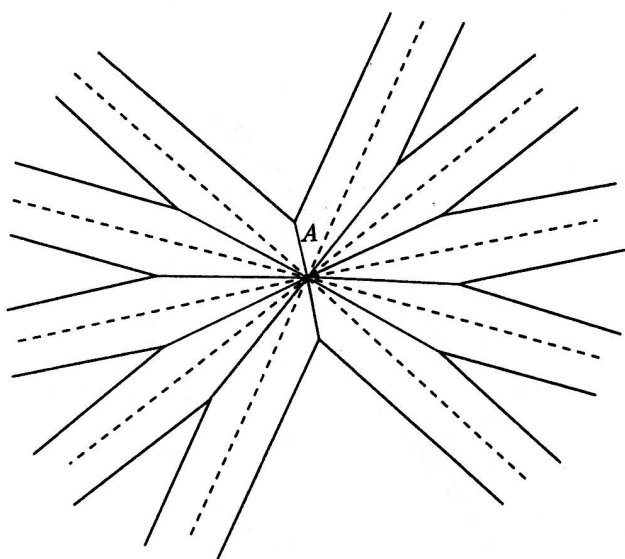


Dla takiego wielościanu zawodzi metoda ścinania krawędzi „po równo”. By się o tym przekonać, wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku (widok z góry).

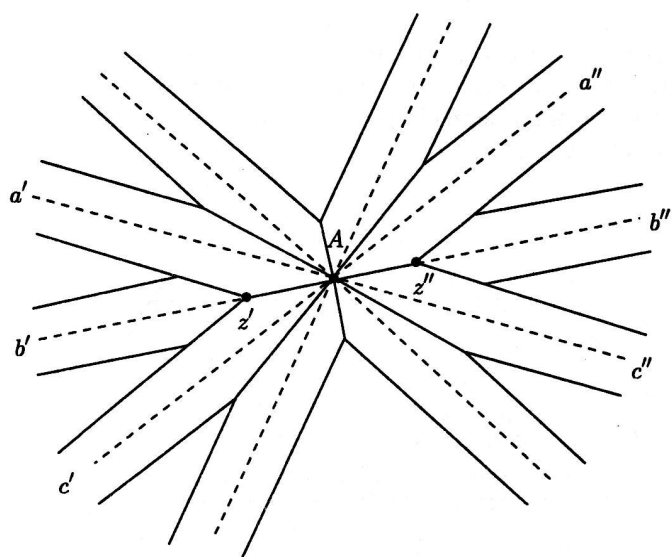


Ścinając krawędzie  $a', b', c'$  otrzymujemy punkt  $Z'$  – jako część wspólną płaszczyzn tych cięć. Punkt  $Z'$  jest punktem trójkąta  $P'Q'A$  bowiem w procesie ścinania krawędzi ostrosłupa prawidłowego metodą „po równo” wierzchołek nowej bryły powstający w „okolicy” starego wierzchołka leży na wysokości tego ostrosłupa (z symetrii ostrosłupa). Podobnie ścinając krawędzie  $a'', b'', c''$  otrzymamy punkt  $Z''$ , który jest punktem trójkąta  $P''Q''A$ . Ponieważ  $Z' \neq A \neq Z''$ , więc musi być  $Z' \neq Z''$ , co jest niezgodne z naszym wyobrażeniem o zastruganym ołówku w okolicy punktu  $A$ .

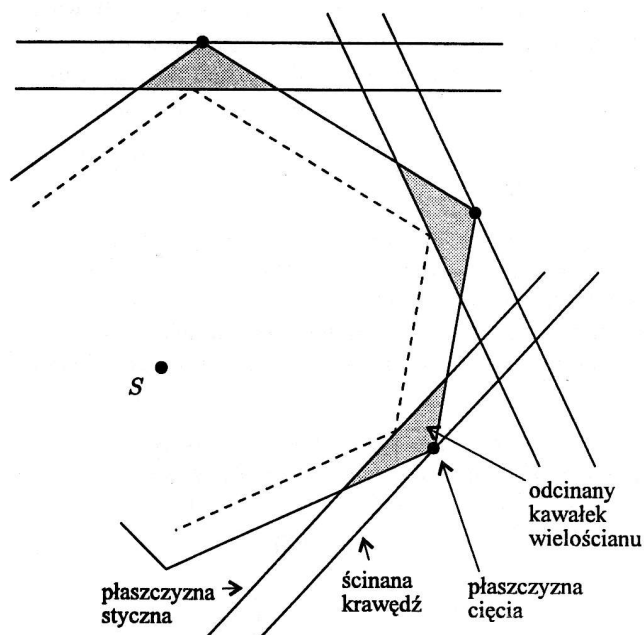
Nasze wyobrażenie zaostrego ołówka:



Rzeczywista sytuacja po ścięciu krawędzi:



Szukane płaszczyzny cięć są jednokładnymi obrazami wcześniej wybranych płaszczyzn.



### Inne ścinanie

Czyżby więc wyprowadzone wcześniej wzory nie odnosiły się do wszystkich wielościanów? Myśleliśmy przecież wtedy o „zaostzonych ołówkach”, ale okazuje się, że metoda ścinania „po równo” nie gwarantuje nam otrzymania takiej sytuacji. A może istnieje inny sposób ścinania krawędzi?

TAK. Oto rozwiązanie. Do każdej krawędzi danego wielościanu wypukłego  $W$  przyklejamy dowolną płaszczyznę zawierającą tę krawędź i nie przecinającą pozostałej części  $W$ . Następnie wybieramy punkt  $S$  należący do wnętrza  $W$  i stałą  $k < 1$  (ale niewiele różniącą się od 1). Wszystkie wybrane płaszczyzny przekształcamy teraz przez jednokładność o środku  $S$  i skali  $k$ .

Przycinanie wielościanu tak wyznaczonymi płaszczyznami daje nam żądany efekt (zaostzonych ołówków) przy wyborze  $k$  dostatecznie bliskiego 1. Aby to zobaczyć ustalmy wierzchołek  $A$  wyjściowego wielościanu. Wybrane płaszczyzny zawierające krawędzie wychodzące z  $A$  przecinają się (oczywiście w punkcie  $A$ ), zatem po przekształceniu przez jednokładność obrazy tych płaszczyzn też mają jeden punkt wspólny (nowy wierzchołek).

Widać, że opisana metoda daje nam większą swobodę wyboru płaszczyzn cięć niż metoda przycinania „po

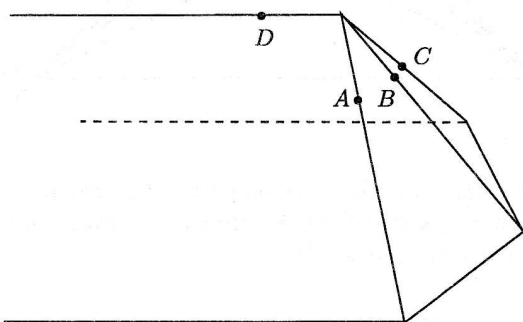
równo”. Można nawet wybrać takie płaszczyzny, by cięcia przebiegały w tej samej odległości od krawędzi po obu jej stronach (jednak dla różnych krawędzi odległości te mogą być inne). Przyklepane płaszczyzny trzeba wtedy ustawić tak, by były prostopadłe do dwusiecznych kątów dwuściennych wielościanu.

## 5. Przycinanie rogów raz jeszcze

Ostatecznie uporaliśmy się z problemem ociosywania krawędzi wielościanów wypukłych. Uczniom ta tematyka pewnie się już przejadła, ale Ciebie ostatnio zdobyte doświadczenia powinny zaniepokoić. W trakcie rozwiązywania zagadnienia przycinania krawędzi istotnym problemem okazał się sposób tego przycinania. A przecież w analogicznym zadaniu dotyczącym ścinania wierzchołków wielościanu pominęliśmy zupełnie tę kwestię uznając ją za oczywistą. Spróbujmy zatem precyzyjnie opisać sposób przycinania wierzchołków.

### Po równo czy proporcjonalnie?

Cięcie „w równych odległościach” od rozpatrywanego wierzchołka nie zawsze jest wykonalne (patrz rysunek).

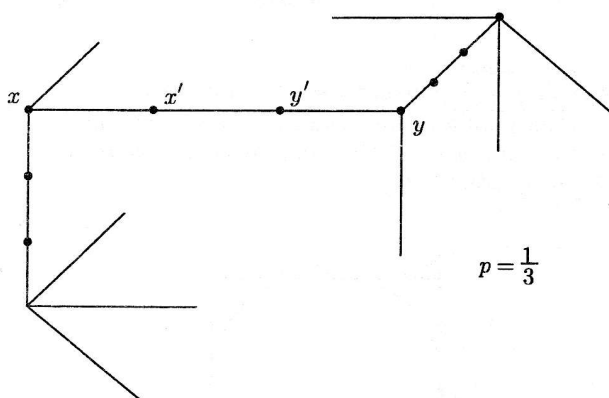


Punkt  $D$  nie leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty  $A, B, C$ .

Może więc ścinać wierzchołki tak, by każdą krawędź przycinać proporcjonalnie do jej długości? Wybieramy stałą  $p \in (0, 1/2)$  i każdą krawędź tnijemy tak, że powstałe na niej nowe dwa wierzchołki  $X', Y'$  spełniają:

$$XX' = pXY = YY'$$

Ale tak też jest niedobrze (patrz przykład poprzedni).



Obie wyżej opisane metody ścinania wierzchołków, choć nie są uniwersalne, są jednak dobre dla wielościanów, w których z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie

trzy krawędzie. Ponieważ po pierwszym przycięciu wierzchołków z dowolnego wielościanu wypukłego dostajemy wielościan o tej własności, zatem widać, że dowolną z powyższych metod można stosować począwszy od drugiego kroku operacji ścinania. Przycinanie wierzchołków nie stanowi więc żadnego problemu.

## 6. Ociosywanie sześcienu

Na koniec spróbujmy wyobrazić sobie efekt finalny operacji ścinania wierzchołków. Wielościan otrzymany po pierwszym cięciu jeszcze w miarę dobrze widzimy, po drugim etapie ścinania jest już znacznie gorzej, a po siedemnastym ogarnia nas czarna rozpacz. Jednak po nieskończeniu wielu przycinaniach wcale nie musi być tak strasznie.

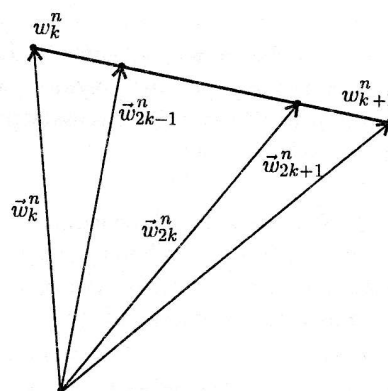
W dalszym ciągu zajmiemy się już tylko sześciennem w przypadku ścinania „proporcjonalnego”. Ustalmy  $p \in (0, 1/2)$ . Na każdym etapie odcinamy wierzchołki wraz z  $p$ -tymi częściami wychodzących z nich krawędzi. Jaka bryła powstanie po wykonaniu nieskończonej procedury przycinania? Aby to zbadać, zajmijmy się tylko jedną ścianą sześcienu. Dalsze rozważania będziemy prowadzić na płaszczyźnie tej ściany z obranym układem współrzędnych.

Niech  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$  oznaczają wektory położenia wierzchołków kwadratu. Po pierwszym przycięciu otrzymamy (na tej samej płaszczyźnie) osiem nowych wierzchołków:  $\vec{w}_1^1, \vec{w}_2^1, \vec{w}_3^1, \dots, \vec{w}_8^1$ ; ogólnie każda nowa ściana będzie miała 2 razy więcej wierzchołków niż poprzednia i po  $n$  cięciach otrzymamy  $2^{n+2}$  wierzchołków:  $\vec{w}_1^n, \vec{w}_2^n, \vec{w}_3^n, \dots, \vec{w}_{2^{n+2}}^n$ , a po następnym –  $(n+1)$ -szym cięciu –  $2^{n+3}$  wierzchołki, których wektory położenia obliczamy następująco:

$$\vec{w}_{2k-1}^{n+1} = (1-p)\vec{w}_k^n + p\vec{w}_{k+1}^n,$$

$$\vec{w}_{2k}^{n+1} = p\vec{w}_k^n + (1-p)\vec{w}_{k+1}^n, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n+2}.$$

(gdzie dla  $k = 2^{n+2}$  za  $k+1$  należy przyjąć 1).



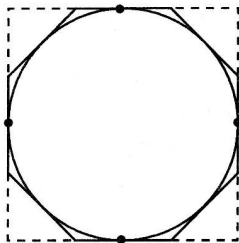
Nietrudno jest zaprogramować (według powyższych wzorów) komputer tak, by pokazywał kolejno otrzymywane wielokąty przybliżające efekt finalny – tzn. to, co zostanie z kwadratu po nieskończeniu wielu przycinaniach. W zależności od  $p$  widzimy kształt mniej lub bardziej zdeformowanego okręgu. Czyżby to były elipsy?

NIE! Tę hipotezę łatwo obalić. Gdyby to były elipsy, to miałyby równe osie, zatem były to okrąg (stałe ten sam – wpisany w wyjściowy kwadrat), a komputer wyraźnie pokazuje **różne** kształty. Być może dla pewnego  $p < 1/2$  otrzymamy okrąg ale, na ogół, komputer pokazuje nam pewien owal. Spróbujmy go dokładniej zbadać, stwierdzić co to za krzywa.

### Owale

Zauważmy, że jeśli punkt  $S$  jest środkiem boku  $XY$  pewnego wielokąta, to po jednokrotnym ścięciu wszystkich wierzchołków punkt  $S$  jest środkiem pewnego boku  $X'Y'$  nowego wielokąta. Ponadto  $S$  jest jedynym punktem boku  $XY$ , który „zostanie do końca”, tzn. jako jedyny z tego boku będzie leżał na finalnym owalu (bowiem po pierwszym ścięciu w następnym wielokącie zawiera się tylko  $(1 - 2p)$  część boku  $XY$ , po drugim  $-(1 - 2p)^2$  część  $XY$ , po trzecim  $-(1 - 2p)^3$  część  $XY$  itd.; ciąg  $(1 - 2p)^n$  jest zbieżny do 0). Zatem szukany owal jest rozpięty na środkach krawędzi wszystkich wielokątów otrzymywanych w poszczególnych krokach konstrukcji.

Teraz możemy już stwierdzić, że dla żadnego  $p$  nie otrzymamy okręgu. Mianowicie gdyby szukany owal był okrąg, to po pierwszym przycięciu z kwadratowej ściany otrzymalibyśmy ośmiokąt opisany na tym okręgu. Dzięki temu można wyliczyć  $p = \sqrt{1,5 - 2\sqrt{2}}$ .

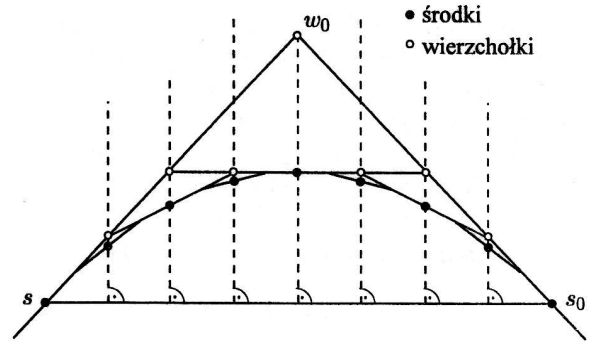


Teraz możemy także wyliczyć współrzędne środków boków 16-kąta (otrzymanego po następnym cięciu w ustalonej proporcji  $p$ ). Wszystkie te punkty powinny leżeć na okręgu, ale tak nie jest.

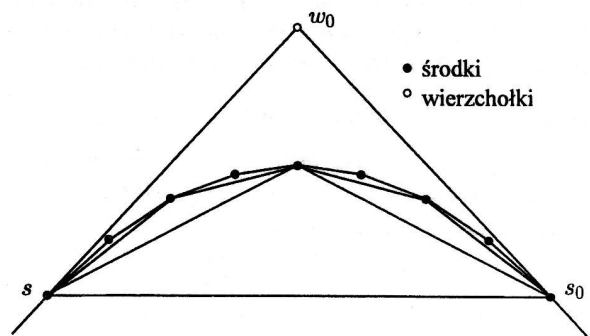
Niech teraz  $W_0, S, S_0$  oznaczają odpowiednio wierzchołek kwadratu i środki wychodzących z niego boków. Część owalu zawarta pomiędzy  $S$  i  $S_0$  zależy tylko od tych punktów (i oczywiście od  $p$ ).

Dla  $p = \frac{1}{4}$  powstające kolejno wierzchołki i środki boków leżą wyjątkowo regularnie.

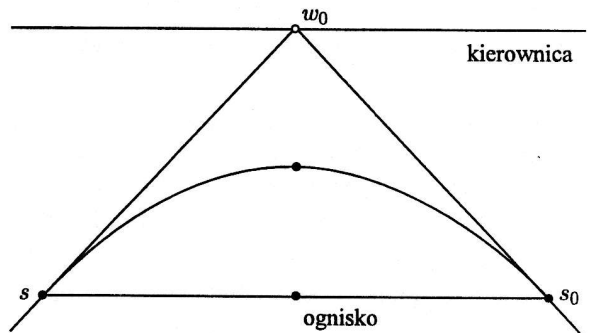
Połowimy odpowiednie odcinki. Łatwo sprawdzić, że środki boków otrzymywanych wielokątów i odpowiadające im wierzchołki z poprzedniego kroku konstrukcji leżą na tych samych prostych prostopadłych do odcinka  $SS_0$ .



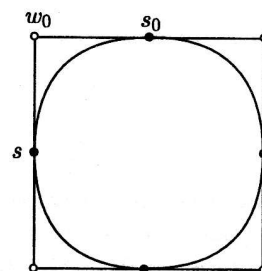
Na ten sam proces możemy też spojrzeć „od dołu”, jako na kolejne dobudowywanie mniejszych trójkątów na bokach trójkątów poprzednich.



Dokładniejsze przyjrzenie się tej sytuacji pozwala dostrzec w niej konstrukcję Archimidesa kwadratury odcinka paraboli (patrz [3]).

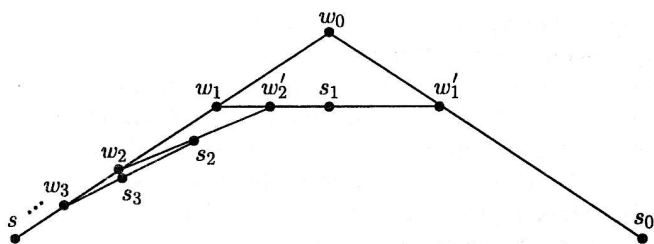


Zatem dla  $p = \frac{1}{4}$  szukany owal to suma czterech fragmentów parabol. Boki kwadratu są styczne do parabol w punktach  $S$  i  $S_0$ , zatem parabole łączą się ze sobą w sposób gładki.



A jak jest dla innych  $p$ ? Okazuje się, że opisany wyżej przypadek ( $p = \frac{1}{4}$ ) jest szczególny: tylko wtedy otrzymamy „porządny” owal. Za chwilę przekonamy się w jakim sensie jest on wyjątkowy. Najpierw jednak musimy wprowadzić pewne dodatkowe oznaczenia.

Niech  $p \in (0, \frac{1}{2})$ , (dla uproszczenia rozważań założymy, że  $p \neq \frac{1}{3}$ ). Niech  $q = 1 - 2p$ ,  $k = \frac{p}{q}$ . Niech  $\vec{w}_0, \vec{s}, \vec{s}_0$  oznaczają wektory położenia wierzchołka i środków wychodzących z niego boków  **pewnego wielokąta**  przybliżającego owal. Niech  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots$  oznaczają najbliższe punktowi  $\vec{s}$  wierzchołki kolejnych przybliżeń owalu, a  $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \dots$  środki boków wychodzących z  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots$  (różne od  $\vec{s}$ ).



Łatwo jest wyznaczyć wierzchołki:

$$\vec{w}_{n+1} = \vec{s} + q(\vec{w}_n - \vec{s}), \text{ czyli } \vec{w}_n = \vec{s} + q^n(\vec{w}_0 - \vec{s}).$$

Trudniej wyznaczyć jest  $\vec{s}_n$ . Wprowadzimy pomocniczy symbol  $\vec{w}'_n$  na oznaczenie „drugich” końców boków o środkach w  $\vec{s}_n$ . Wtedy

$$\vec{w}'_n = \vec{w}_{n-1} + 2p(\vec{s}_{n-1} - \vec{w}_{n-1}),$$

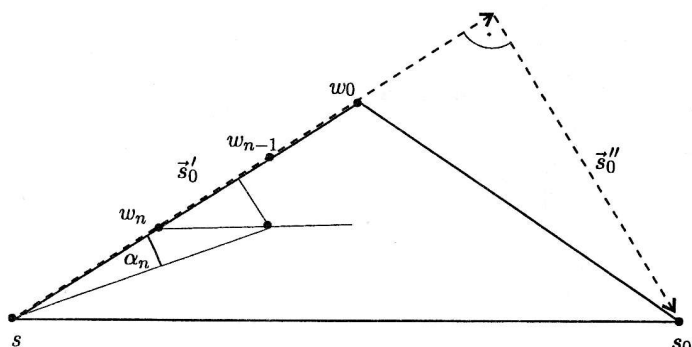
skąd po przekształceniach otrzymujemy:

$$\vec{s}_n = \frac{1}{2}(\vec{w}_n + \vec{w}'_n) = \dots = q^n(\vec{w}_0 - \vec{s}) + \vec{s} - p\vec{s} + p\vec{s}_{n-1}.$$

Ten związek rekurencyjny można (możolnie) „rozsupłać”:

$$\vec{s}_n = \vec{s} + p^n k \frac{k^n - 1}{k - 1} (\vec{w}_0 - \vec{s}) + p^n \vec{s}_0 - p^n \vec{s}.$$

Dla uproszczenia dalszych rachunków przyjmijmy  $\vec{s} = \vec{0}$  oraz przedstawmy  $\vec{s}_0 = \vec{s}'_0 + \vec{s}''_0$ , gdzie  $\vec{s}'_0 \parallel \vec{w}_0$  i  $\vec{s}''_0 \perp \vec{w}_0$ .



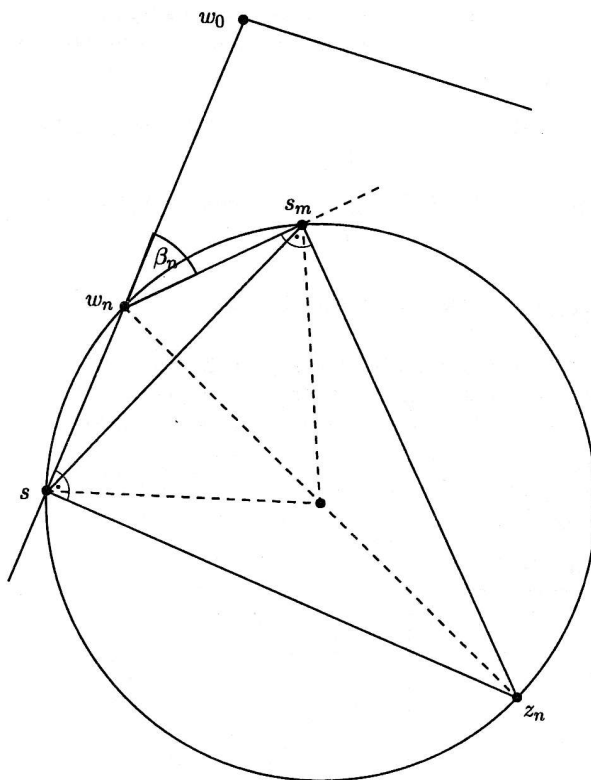
Rozpatrzmy przypadek  $p \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ . Wtedy  $k < 1$ . Wbrew naszym intuicjom kierunek wektora  $\vec{s}_n$  **nie** przybliża się do kierunku wektora  $\vec{w}_0$  wraz ze wzrostem  $n$ . Mamy bowiem

$$\sin \alpha_n = \frac{|p^n \vec{s}''_0|}{|p^n k \frac{k^n - 1}{k - 1} \vec{w}_0 + p^n \vec{s}_0|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|\vec{s}''_0|}{|\frac{k}{k-1} \vec{w}_0 + \vec{s}_0|} \neq 0.$$

Oznacza to, że owal nie ma stycznej w punkcie  $s$ ! Ponieważ rozumowanie to dotyczy środka boku dowolnego wielokąta z konstrukcji owalu, **nie ma on stycznych w przeliczalnie wielu punktach gęsto na nim rozłożonych** (skądinąd wiadomo, że owal – jako brzeg figury wypukłej – nie ma stycznych w co najwyżej przeliczalnie wielu punktach). Trudno taką krzywą uznać za obiekt „porządny”.

Dla  $p < \frac{1}{3}$  sytuacja wcale nie jest lepsza (z wyjątkiem omówionego już wcześniej przypadku  $p = \frac{1}{4}$ ). Mianowicie dla „porządnych” krzywych (np. wielomianów stopnia  $> 1$ ) promień krzywizny jest liczbą dodatnią we wszystkich punktach poza skończoną ilością. W przypadku owalu otrzymanego dla  $p \in (0, \frac{1}{3}) \setminus \{\frac{1}{4}\}$  tak nie jest!

Dla wyznaczenia promienia krzywizny owalu w punkcie  $s$  należy wykreślić proste prostopadłe do stycznych w punktach  $s$  i  $s_n$ . Ich punkt przecięcia oznaczmy  $z_n$ . Promień krzywizny to granica odległości punktów  $s$  i  $z_n$ . Zauważmy, że jest ona równa granicy odległości punktów  $w_n$  i  $z_n$ .



Odcinek  $w_n z_n$  to średnica okręgu opisanego na trójkącie  $s w_n s_n$ , zatem (przyjmując, jak poprzednio,  $\vec{s} = \vec{0}$ ) mamy:

$$|\vec{w}_n - z_n| = \frac{|\vec{s}_n|}{\sin(\pi - \beta_n)} = \frac{|\vec{s}_n|}{\sin \beta_n} \quad (\text{twierdzenie sinusów})$$

W celu wyznaczenia mianownika obliczmy:

$$\vec{s}_n - \vec{w}_n = p^n \left( k \frac{k^n - 1}{k - 1} \vec{w}_0 + \vec{s}_0 \right)$$

skąd

$$\sin \beta_n = \frac{|p^n \vec{s}''_0|}{|\vec{s}_n - \vec{w}_n|} = \frac{|\vec{s}''_0|}{|k \frac{k^n - 1}{k - 1} \vec{w}_0 + \vec{s}_0|}$$



Zatem

$$|\bar{w}_n - \bar{z}_n| = \frac{|\bar{s}_n|}{|\bar{s}_0|} \left| k \frac{k^{n-1} - 1}{k-1} \bar{w}_0 + \bar{s}_0 \right| = \frac{1}{|\bar{s}_0|} p^n \left| k \frac{k^{n-1} - 1}{k-1} \bar{w}_0 + \bar{s}_0 \right|$$

Naszym celem jest nie tyle wyliczenie tej wielkości, co jej granicy gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Dla  $p < \frac{1}{3}$  mamy  $k > 1$  zatem wystarczy zbadać iloczyn  $p^n k^n k^{n-1}$ . Ale  $p^n k^n k^{n-1} = \frac{q^n q^{n-1}}{p^{n-1}} = \frac{q}{p} \left(\frac{q^2}{p}\right)^n$  i gdy

$\frac{q^2}{p} < 1$  (co jest równoważne  $p > \frac{1}{4}$ ) mamy  $|\bar{w}_n - \bar{z}_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , a gdy  $\frac{q^2}{p} > 1$  (co jest równoważne  $p < \frac{1}{4}$ ) mamy  $|\bar{w}_n - \bar{z}_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ . Zatem

dla  $p \in (0, \frac{1}{3}) \setminus \{\frac{1}{4}\}$  owal nie ma krzywizny w przeliczalnym gęstym zbiorze swoich punktów!!!

Zatem podsumowując nasze rozważania nad problemem kształtu owali otrzymywanych na ścianach sześcianu w procesie „proporcjonalnego” ścinania wierzchołków stwierdzamy, że

$0 < p \leq \frac{1}{3}$  i  $p \neq \frac{1}{4}$  owal ma patologiczną krzywiznę w przeliczalnym, gęstym zbiorze punktów,

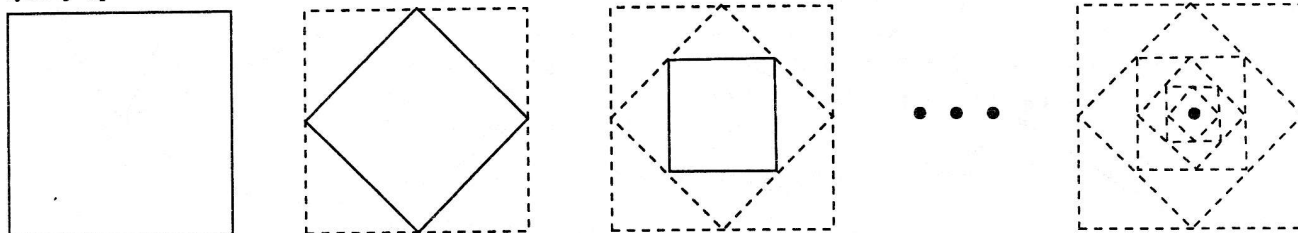
$p = \frac{1}{4}$  owal składa się z czterech gładko połączonych łuków parabol,

$\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$  owal nie jest gładki w przeliczalnym, gęstym zbiorze punktów.

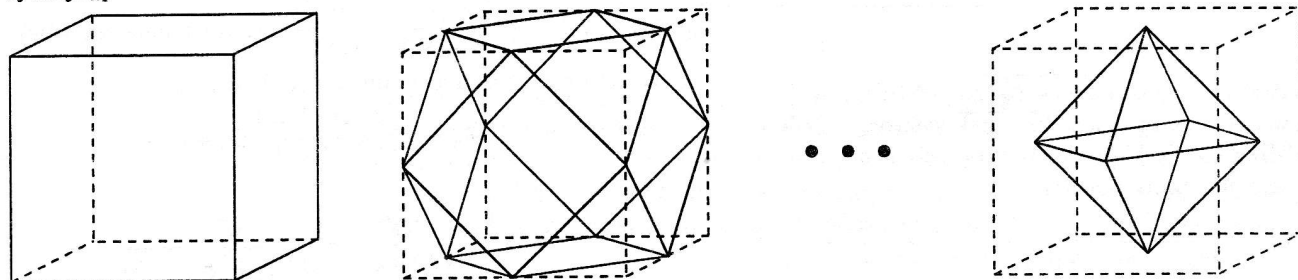
## 7. Tylko dla wytrwałych

Ciekawie wygląda efekt nieskończonego ścinania wierzchołków według innej reguły: przycinamy je płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi wychodzących z wierzchołków. W wersji płaskiej powoduje to przycięcie wielokąta „do punktu” (którego?). Naturalnym wydaje się stwierdzenie,

sytuacja „płaska”



sytuacja „przestrzenna”

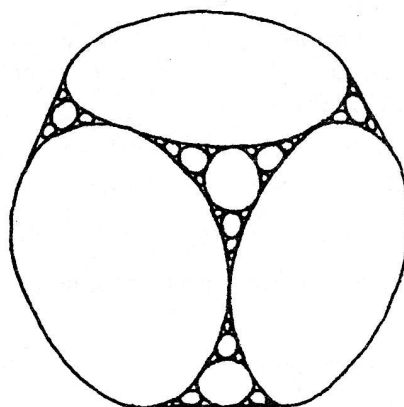


że po nieskończeniu wielu przycinaniach sześcianu otrzymamy foremny ośmiościan rozpięty na środkach ścian wyjściowego sześcianu.

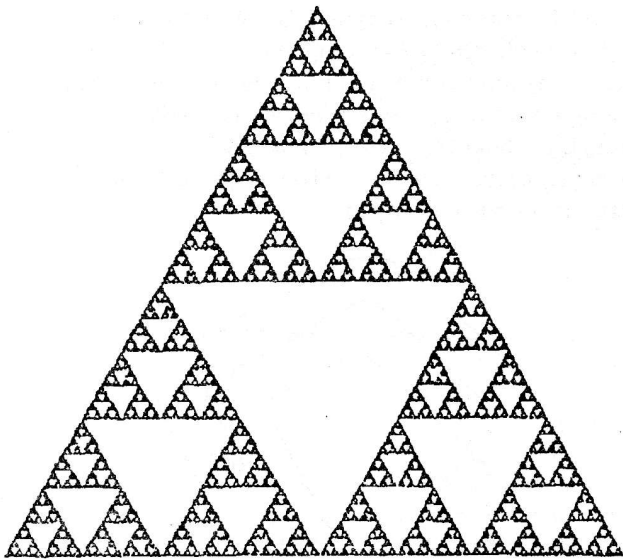
Nie jest to oczywiście prawdą, gdyż do finalnej bryły należą też środki trójkątnych ścian otrzymanych po pierwszym przycięciu sześcianu, jak również środki wszystkich innych ścian otrzymywanych w procesie ścinania.

Na koniec spróbujmy wyobrazić sobie efekt nieskończonego „proporcjonalnego” przycinania sześcianu.

Mimo, że badanie owali pokazało, że nie są one zazwyczaj regularne, to jednak trochę przypominają okręgi. Dlatego możemy próbować wyobrazić sobie kształt bryły otrzymanej po nieskończeniu wielu ścinaniach wierzchołków sześcianu (ścinanie „proporcjonalne” przy ustalonym  $p < \frac{1}{2}$ ). Z każdej kwadratowej ściany pozostaje pewien owal (zależnie od  $p$ ). Po pierwszym ścięciu wierzchołków powstaje osiem trójkątnych ścian, z których, po dalszych cięciach, też pozostają pewne owale i podobnie z każdej ściany kolejnych wielościanów pozostają coraz mniejsze owale. Całość wygląda mniej więcej tak:



i przypomina krzywą trójkątową Sierpińskiego (gdy trójkątą zdeformujemy tak, by upodobniły się do owali).



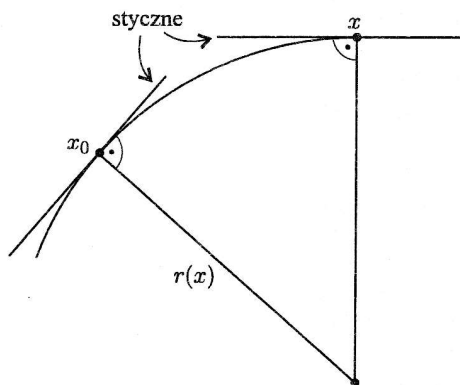
## 8. Tylko dla dorosłych

Stwierdziliśmy wcześniej, że brzeg zbioru wypukłego może być bardzo nieregularny. Badając problem przycinania krawędzi kwadratu, tylko dla  $p = 1/4$  otrzymaliśmy „porządną” krzywą, co sugeruje, że nie jest to zjawisko zbyt powszechne. Nasuwa się więc naturalne pytanie, która z własności: regularność czy nieregularność brzegu jest zjawiskiem typowym dla zbiorów wypukłych.

Na podstawie znanych wyników ([2], [4], [5]) możemy sformułować twierdzenie, które wskazuje, że sytuacja uzyskana dla  $p \in (0, 1/3) \setminus \{1/4\}$  (brak krzywizny) nie powinna nas dziwić, natomiast nieregularność występująca dla  $p \in (1/3, 1/2)$  (brak gładkości) jest już zjawiskiem wyjątkowym.

**Twierdzenie:** Niemal każdy zbiór wypukły (zwarty)

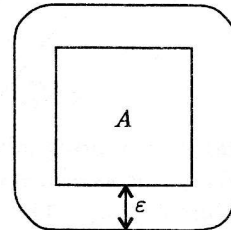
- a) ma gładki brzeg;
- b) ma patologię krzywizny w każdym punkcie  $x_0$  brzegu, tzn.  $\liminf_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$  lub  $\limsup_{x \rightarrow x_0} r(x) = +\infty$



- c) jest ściśle wypukły, tzn. brzeg nie zawiera żadnego odcinka.

**Dowód** powyższego twierdzenia omówimy dla wypukłych podzbiorów płaszczyzny (dowód dla wyższych wymiarów sprowadza się do przypadku dwuwymiarowego). Topologia na zbiorze wszystkich zbiorów wypukłych, zwartych jest zadana przez metrykę Hausdorffa – dla  $\varepsilon > 0$  niech  $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon\}$ ;  $\varepsilon$ -otoczką zbioru  $A$  nazywamy zbiór

$$A + K_\varepsilon := \{a + x : a \in A, x \in K_\varepsilon\};$$



odległość Hausdorffa zbiorów zwartych  $A, B$  określona jest wzorem

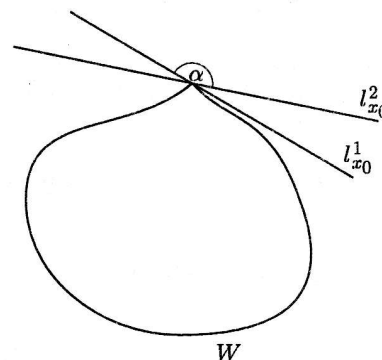
$$H(A, B) := \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B + K_\varepsilon \text{ i } B \subset A + K_\varepsilon\}.$$

Wiadomo, że zbiory zwarte z metryką Hausdorffa tworzą przestrzeń zupełną. Rodzina zbiorów wypukłych  $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R}^2 : A \text{ zwarty, wypukły}\}$  – jest jej podprzestrzenią domkniętą (dlaczego?), zatem też jest zupełna.

Termin „niemal każdy”, użyty w sformułowaniu twierdzenia, oznacza – każdy, z wyjątkiem zbioru I kategorii (tzn. będącego sumą przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych). Twierdzenie Baire’a o kategorii orzeka, że w przestrzeni zupełnej zbiory I kategorii są brzegowe, a więc małe.

$\mathcal{C}_0 := \{A \in \mathcal{C} : A \text{ ma niepuste wnętrze}\}$  jest otwartym i gęstym podzbiorem  $\mathcal{C}$ . Gęstość wynika z następującego faktu:  $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A + K_\varepsilon \in \mathcal{C}_0$ , otwartość zaś z tego, że dla  $A, B \in \mathcal{C}$  mamy  $H(A, B) = H(\text{bd } A, \text{bd } B)$ . Zatem niemal każdy zbiór wypukły, zwarty ma niepuste wnętrze.

Aby dowieść a) zauważmy, że zbiór  $W \in \mathcal{C}_0$  nie jest gładki, gdy istnieje  $x_0 \in \text{bd } W$  i dwie proste podpierające w tym punkcie –  $l_{x_0}^1$  i  $l_{x_0}^2$  – przecinające się pod kątem  $\alpha (\neq \pi)$ .

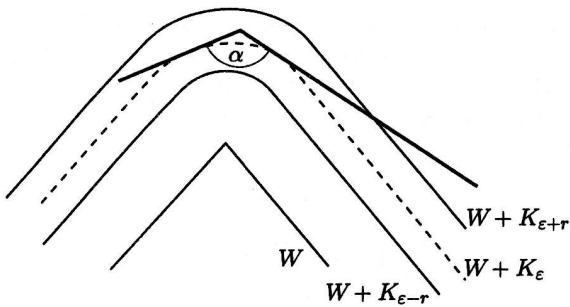


Dla ustalonego  $n \in \mathbb{N}$  niech

$$\mathcal{C}_n := \{W \in \mathcal{C}_0 : \text{istnieje } x_0 \in \text{bd } W, \alpha \leq \pi - 1\}.$$

Zbiór  $\mathcal{C}_n$  jest pierwszej kategorii w  $\mathcal{C}_0$ , ponieważ dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , można znaleźć takie  $r > 0$  ( $r < \varepsilon$ ), że

w obszarze  $(W + K_{\varepsilon+r}) \setminus (W + K_{\varepsilon-r})$  „nie mieści się” kąt o mierze mniejszej niż  $\pi - 1/n$ .

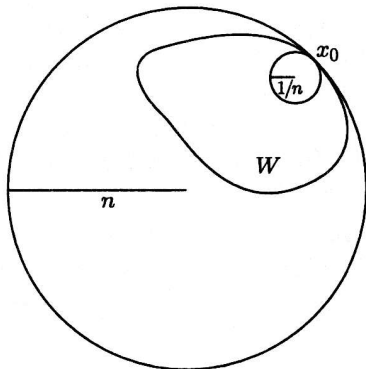


Zatem zbiory wypukłe, których brzeg leży w obszarze  $(W + K_{\varepsilon+r}) \setminus (W + K_{\varepsilon-r})$  nie są elementami  $\mathcal{C}_n$ . Jeśli przez  $\mathcal{C}^1$  oznaczymy rodzinę zbiorów wypukłych o gładkim brzegu, to  $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}_0 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ , czyli dopełnienie tej rodziny jest I kategorii.

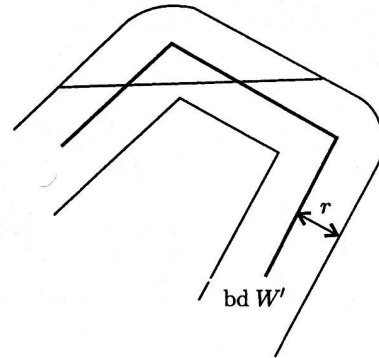
Podobne rozumowanie przeprowadza się w dowodzie c). Pokazuje się, że rodzina zbiorów ściśle wypukłych o gładkim brzegu –  $\mathcal{C}_s^1$  – ma dopełnienie I kategorii.

Zbiór wypukły  $W$  przybliżamy wielokątem wypukłym  $W'$  o krótkich bokach. Istnieje tak mała otoczka brzegu tego wielokąta, w której „nie mieszczą się” odcinki o długościach większych niż  $1/n$ .

Aby dowieść b) zauważmy, że jeśli  $W \in \mathcal{C}_s^1$  nie spełnia warunku sformułowanego w tym punkcie, to istnieje  $x_0 \in \text{bd } W$  i  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $\text{bd } W$  zawarty jest w obszarze pomiędzy dwoma okręgami stycznymi do  $\text{bd } W$  w punkcie  $x_0$  o promieniach  $n$  i  $1/n$ .



Niech  $\mathcal{C}_{s,n}^1$  oznacza rodzinę takich zbiorów  $W$ . Nietrudno pokazuje się, że jeśli ciąg  $\{W_k\} \subset \mathcal{C}_{s,n}^1$  jest zbieżny do  $W_0 \in \mathcal{C}_s^1$ , to  $W_0 \in \mathcal{C}_{s,n}^1$  czyli  $\mathcal{C}_{s,n}^1$  jest podzbiorem domkniętym w  $\mathcal{C}_s^1$ . Jest to również podzbiór nigdziegęsty (dowolny zbiór  $W \in \mathcal{C}_s^1$  przybliżamy najpierw wypukłym wielokątem; potem „zaokrąglamy” nieznacznie wierzchołki i lekko „wyginamy” boki tak, by otrzymać zbiór wypukły o pewnych promieniach krzywizny większych niż  $n$ , zatem nie należący do  $\mathcal{C}_{s,n}^1$ ).



Rodzina zbiorów spełniających warunek b) to  $\mathcal{C}^1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{s,n}^1$ . Jej dopełnienie jest zbiorem I kategorii.

Na koniec polecamy przeglądowy artykuł [1], w którym można znaleźć wiele interesujących informacji o zbiorach wypukłych.

## Literatura

- [1] M. Berger, *Convexity*. Amer. Math. Monthly vol. 97 no. 8 (1990), 650–678.
- [2] P.M. Gruber, *Die meisten konvexen Körper sind glatt, aber nicht zu glatt*. Math. Ann. 229 (1977), 259–266.
- [3] L. Jeśmanowicz, *Zielone światło dla parabol*. Matematyka nr 200 (1985), 296–308.
- [4] V. Klee, *Some new results on smoothness and rotundity in normal linear spaces* Math. Ann. 139 (1959), 51–63.
- [5] T. Zamfirescu, *The curvature of most convex surfaces vanishes almost everywhere* Math. Z. 174 (1980), 135–139.