Anomalie czterowymiarowe

Zdzisław POGODA, Kraków

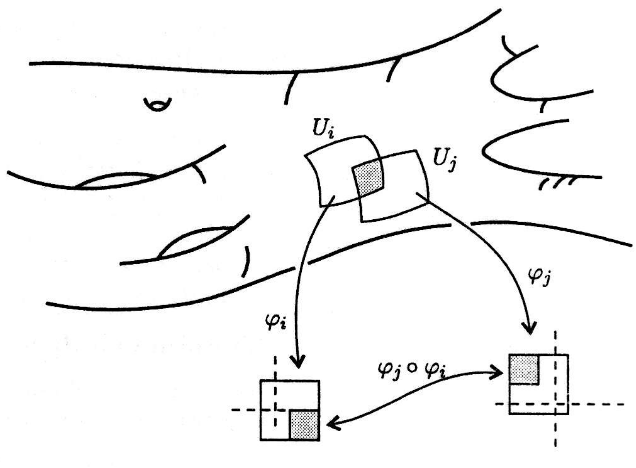
Gdy w 1986 roku rozpoczynał się Międzynarodowy Kongres Matematyków w Berkeley wiadomo było, choć informacje na ten temat nie są ujawniane wcześniej, kto dostanie, a może raczej kto powinien dostać medal Fieldsa. Bezdyskusyjnymi kandydatami byli: Gerd Faltings, Michael, H. Freedman i Simon Donaldson. Rezultaty Faltingsa dotyczyły hipotezy Mordella i nawiązywały do Wielkiego Twierdzenia Fermata. Wielkie emocje, wręcz sensację, budziły również wyniki Freedmana i Donaldsona, które związane były z topologią i geometrią obiektów czterowymiarowych. Spróbujmy przynajmniej szkicowo pokazać, na czym polegała niezwykłość tych osiągnięć.

Jednym z podstawowych zadań topologii jest klasyfikacja zbiorów ze względu na homeomorfizmy. Tak postawiony problem jest zbyt ogólny, na badane zbiory nakładano więc pewne ograniczenia, „ubierano" je w dodatkowe struktury. Wprowadzono między innymi pojęcie rozmaitości topologicznej. Rozmaitość topologiczna wymiaru n jest to obiekt (dokładniej przestrzeń topologiczna), który lokalnie wygląda jak n wymiarowa przestrzeń euklidesowa. Czyli każdy punkt tej przestrzeni ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$. Dla topologów takie twory były jeszcze zbyt ogólne, dlatego na rozmaitości topologiczne nakładano dodatkowe struktury otrzymując rozmaitości różniczkowe i rozmaitości kawałkami liniowe.

Żeby bardziej formalnie wprowadzić pojęcie rozmaitości różniczkowej i kawałkami liniowej, trzeba najpierw zdefiniować pojęcie atlasu i mapy. Mapą na zbiorze M, (który powinien być przestrzenią topologiczną) nazwiemy parę (U, φ), gdzie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset M$, jest homeomorfizmem. Zbiór map $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ nazywamy atlasem, gdy dziedziny map pokrywają cały zbiór M oraz spełniony jest warunek zgodności: dla dowolnych i i j odwzorowania

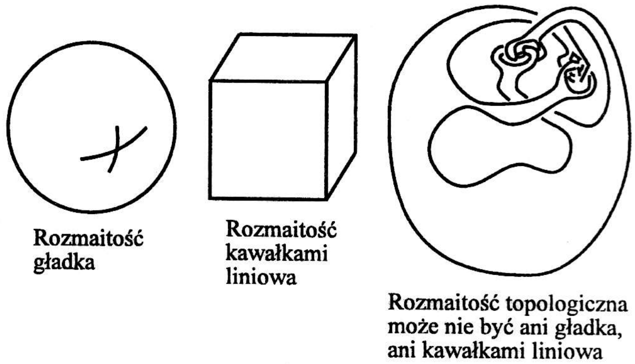
$$\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

są gładkie w przypadku rozmaitości różniczkowych lub „kawałkami liniowe" w drugim przypadku. Wtedy zbiór M z wyróżnionym atlasem nazywamy odpowiednio rozmaitością różniczkową lub kawałkami liniową (PL-rozmaitością). Intuicyjnie rozmaitość jest kawałkami liniowa (oznaczamy to PL), gdy lokalnie ma triangulację, czyli rozkład na sympleksy odpowiedniego wymiaru, podobną do triangulacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Interesujące jest, że historycznie najpierw pojawiły się rozmaitości gładkie i kawałkami liniowe, a potem dopiero zaczęto badać rozmaitości topologiczne.



Rys. 1

Różnice pomiędzy poszczególnymi typami rozmaitości na tym samym zbiorze są subtelne, bowiem mimo różnych struktur jest to ten sam zbiór. Na przykładzie zwykłej sfery można to sobie wyobrażać w następujący sposób: sfera ma strukturę gładkiej rozmaitości, gdy jest gładka w intuicyjnym sensie, czyli, gdy wygląda jak zwykła sfera ewentualnie nieco, ale nie za bardzo zdeformowana; na sferze mamy strukturę kawałkami liniową, gdy wygląda jak powierzchnia wielościanu; wreszcie na sferze zadana jest struktura topologiczna, gdy mamy do czynienia ze zbiorem homeomorficznym ze sferą, a więc może on być zdeformowany dość radykalnie, jak na przykład sfera rogata.



Rys. 2

Oczywiście rozmaitość gładka lub kawałkami liniowa jest rozmaitością topologiczną. Nietrywialne jest pytanie o sytuację odwrotną: kiedy rozmaitość topologiczna dopuszcza strukturę gładką lub typu PL? Z początku wydawało się, że każda rozmaitość ma strukturę gładką.

Przez cały czas pojawia się tu termin „struktura", co on oznacza? Na konkretnym zbiorze można zdefiniować różne atlasy określające tę samą rozmaitość. Na przykład na sferze istnieje atlas składający się z dwóch map, a także atlas składający się z ośmiu map. Istnieją też atlasy bardziej liczne na tej samej sferze. Żeby rozwiązać ten problem niejednoznaczności wprowadzono relację pomiędzy atlasami: dwa atlasy są w relacji (są równoważne), gdy ich suma jest atlasem. W ten sposób otrzymujemy coś w rodzaju atlasu maksymalnego, o którym zazwyczaj wiemy tylko, że istnieje i on właśnie nazywany jest strukturą różniczkową (lub odpowiednio strukturą kawałkami liniową). Każdy atlas wyznacza jednoznacznie odpowiednią strukturę. Pojawiają się natychmiast następne pytania: czy istnieją atlasy nierównoważne? Ile istotnie różnych struktur istnieje na danej rozmaitości? W pierwszym przypadku nietrudno wskazać prosty przykład; wystarczy wziąć przestrzeń $\mathbb{R}$ z atlasem składającym się z jednej mapy $(\mathbb{R}, Id)$ oraz inny atlas $(\mathbb{R}, x \to x^3)$. Suma tych atlasów nie jest jednak atlasem, gdyż odpowiednie złożenie map może wyglądać tak $x \to x^{1/3}$, a tu są problemy z różniczkowalnością w punkcie 0. Drugie pytanie wymaga pewnego wyjaśnienia – co to są „istotnie różne struktury"? Jest to sprawa trochę delikatniejsza niż równoważność atlasów.

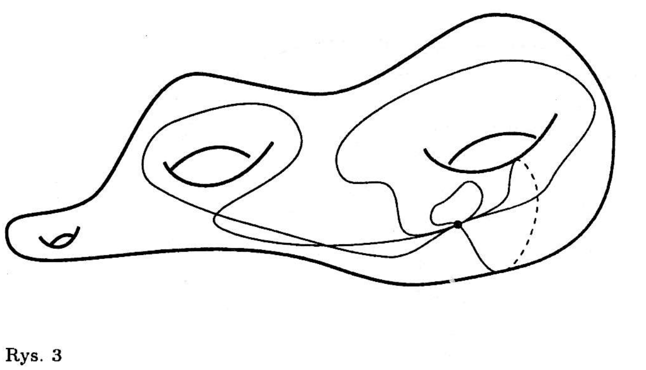
Przypuśćmy, że na rozmaitości M dane są dwie struktury różniczkowe lub kawałkami liniowe $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Powiemy, że są one równoważne, gdy istnieje homeomorfizm f rozmaitości M na siebie, który w mapach tych struktur jest gładki lub odpowiednio kawałkami liniowy. Inaczej, gdy istnieje homeomorfizm rozmaitości, który jest izomorfizmem struktur. I tak, struktury na $\mathbb{R}$ zadane przez atlasy $\{(\mathbb{R}, id)\}$ i $\{(\mathbb{R}, x \to x^3)\}$ są równoważne, gdyż istnieje homeomorfizm $x \to x^{1/3}$, który w mapach tych atlasów jest dyfeomorfizmem – po obłożeniu przez mapy dostajemy odwzorowanie identycznościowe.

Jakie są więc zależności pomiędzy strukturami na danej rozmaitości? Czy może być więcej niż jedna? Najpierw uzyskano rezultat dla rozmaitości jedno- i dwuwymiarowych: na każdej takiej rozmaitości struktura różniczkowa jest jedyna i jest identyczna ze strukturą PL oraz ze strukturą topologiczną. Dowód pochodzi od Kerékjártó z 1923 roku. W roku 1940 Whitehead pokazał, że struktura różniczkowa pociąga za sobą strukturę kawałkami liniową. Na początku lat pięćdziesiątych Moise i Bing udowodnili, że rozmaitości trójwymiarowe też są bardzo porządne: każda struktura jednego typu jednoznacznie wyznacza pozostałe. Sensację przyniósł rok 1956, kiedy Milnor udowodnił istnienie nierównoważnych struktur różniczkowych na sferze siedmiowymiarowej. Początkowo wydawało się, że taka sytuacja nie będzie możliwa, a jednak okazało się, że przypadki dwu- i trójwymiarowe stanowią wyjątki.

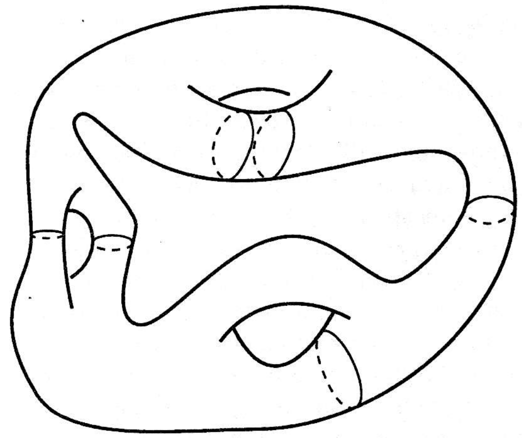
Problem istnienia i zgodności struktur na rozmaitościach został dość dokładnie zbadany mniej więcej w połowie lat siedemdziesiątych wysiłkiem wielu znakomitych matematyków. Trzeba tu wymienić niemal wszystkie wielkie nazwiska związane z topologią: Thom, Kervaire, Milnor, Munkres, Hirsh, Poenaru, Smale, Nowikow, Browder, Wall, Sullivan, Kirby, Siebenmann i jeszcze kilku innych. Dla rozmaitości wymiaru większego lub równego 5 znaleziono niezmiennik decydujący o istnieniu struktury kawałkami liniowej. Niezmiennik ten, albo inaczej przeszkoda, jest to pewna klasa kohomologii $k(M)$ w $H^4(M; \mathbb{Z}_2)$. Nie wchodząc jednak w subtelne szczegóły konstrukcji można stwierdzić, że, jeśli $k(M) = 0$, to istnieje na rozmaitości topologicznej M struktura kawałkami liniowa i, więcej, liczba nierównoważnych PL-struktur na M jest równa rzędowi grupy $H^3(M; \mathbb{Z}_2)$. Gdy natomiast $k(M) = 1$, wtedy na M nie ma struktury kawałkami liniowej. Ponadto zauważono, że dla rozmaitości co najwyżej sześciowymiarowych struktury PL i gładkie są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości. Stwierdzono również, że, mimo tych zaskakujących wyników, przestrzeń $\mathbb{R}^n$ zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami – dopuszcza tylko jedną strukturę, generowaną przez mapę identycznościową. Rezultat ten mimo oczywistego stwierdzenia jest niebanalny, a do tego ma jeden wyjątek $n = 4$. Stworzone metody zawodziły w przypadku przestrzeni czterowymiarowej, który pozostał bez odpowiedzi aż do wyników uzyskanych przez Freedmana i Donaldsona.

W 1982 roku Michael H.Freedman opublikował pracę w *Journal of Differential Geometry*, w której dokonał klasyfikacji ważnej klasy rozmaitości czterowymiarowych, mianowicie rozmaitości zwartych i jednospójnych (czyli na takiej rozmaitości każda pętla daje się ściągnąć do punktu). Do badania tych obiektów można użyć następujących narzędzi z topologii algebraicznej: grupy podstawowej $\pi_1(M)$, grup homologii $H_*(M)$ i grup kohomologii $H^*(M)$. Precyzyjny opis tych grup jest dość skomplikowany i nie miejsce tu, by się nimi dokładniej zajmować.

Intuicyjnie, grupa podstawowa bada typy pętli ściąganych do punktu na danej rozmaitości (ogólniej w przestrzeni topologicznej), czyli jakby „wyłapuje" dziury w rozmaitości; pętla obiegająca dziurę nie da się ściągnąć, zachowuje się więc inaczej niż pętla omijająca taką dziurę (rys. 3). Natomiast k-te (k wymiarowe) grupy homologii badają zachowanie pewnych obiektów k-wymiarowych, na przykład innych rozmaitości, umieszczonych w tej badanej. I tak, pierwsza grupa homologii „zlicza" te typy krzywych zamkniętych, które nie są brzegami obszarów w badanej przestrzeni – takimi są południki i równoleżniki na torusie (patrz też rys. 4). Druga grupa homologii zajmuje się tymi powierzchniami zamkniętymi, które nie rozcinają danej rozmaitości (jest to możliwe!) itd.



Rys. 3



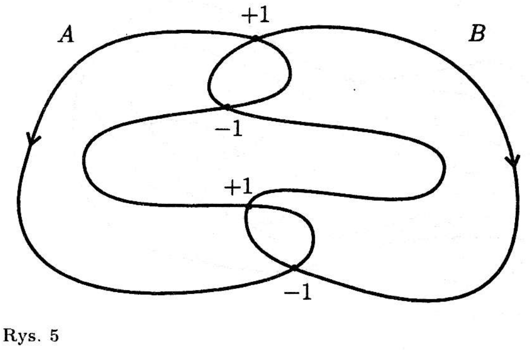
Rys. 4

Dla rozmaitości czterowymiarowych jednospójnych mamy więc $\pi_1(M) = 0$ wprost z określenia jednospójności. Ta równość pociąga za sobą inną $H_1(M) = 0$ na podstawie odpowiednich twierdzeń. Dalej mamy również $H_3(M) = 0$ powołując się na zależność $H_i(M) = H^{4-i}(M)$, znaną jako twierdzenie Poincarégo o dualności. Tak więc cała istotna informacja zawarta jest w grupie $H_2(M, \mathbb{Z})$, która jest wolną grupą abelową. Powołując się na twierdzenie Poincarégo można określić odwzorowanie

$$H_2(M, \mathbb{Z}) \times H_2(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

nazywane formą formą przecięcia dla rozmaitości M. Jest to odpowiednik iloczynu skalarnego znanego z przestrzeni wektorowych; parze elementów z przestrzeni $H_2(M, \mathbb{Z})$ przyporządkowana jest liczba całkowita zwana indeksem przecięcia.

Najbardziej obrazowo definicję formy można zilustrować na przykładzie powierzchni i krzywych na niej położonych (a więc w przypadku grupy $H_1(M, \mathbb{Z})$). Niech S będzie powierzchnią, a A i B krzywymi na niej znajdującymi się w położeniu ogólnym, to znaczy przecinającymi się w skończonej liczbie punktów oraz o niezerowych kątach w tych punktach przecięcia (wektory styczne w punktach przecięcia nie są równoległe). Każdemu punktowi przecięcia przypisujemy liczbę 1, gdy wektory styczne tworzą układ zorientowany tak, jak wektory jednostkowe naturalnego układu współrzędnych; w przeciwnym przypadku przypisujemy punktowi liczbę -1. Indeks przecięcia krzywych to suma wszystkich liczb przypisanych punktom przecięcia.



Rys. 5

Oczywiście jest to dopiero początek określenia formy przecięcia. Trzeba teraz przejść do klas homologii, pokazać niezależność definicji od wyboru reprezentantów i opisać własności. Podobnie postępuje się w przypadku rozmaitości czterowymiarowych i grup $H_2(M, \mathbb{Z})$. Tu klasy homologii mogą być reprezentowane przez zorientowane powierzchnie zanurzone w rozmaitości. Powierzchnie takie muszą się przecinać w pojedynczych punktach (w przestrzeni czterowymiarowej jest to możliwe!). Opis sugeruje, że konstrukcję formy przecięcia przeprowadza się dla rozmaitości gładkich (wektory styczne), ale formę przecięcia można zdefiniować dla rozmaitości topologicznych, wymaga to jednak rozbudowania aparatu topologicznego.

Dowodzi się, że każda forma przecięcia jest odwzorowaniem symetrycznym (czyli $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$) oraz, że z każdą taką formą można skojarzyć macierz, której wyznacznik jest równy $+1$ lub -1 – mówimy wtedy, że forma jest unimodularna.

Oto jak wyglądają konkretne przykłady:

1. $M = S^4$ – sfera czterowymiarowa, wtedy $H_2(S^4, \mathbb{Z}) = 0$. W tym przypadku forma przecięcia jest zerowa.

2. $M = \mathbb{C}P^2$ – zespolona płaszczyzna rzutowa. Tu pokazuje się, że $H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Macierz formy przecięcia ma postać (1) – jest to macierz jednostkowa 1×1.

3. $M = -\mathbb{C}P^2$ – zespolona płaszczyzna rzutowa z przeciwną orientacją. W przeciwieństwie do rzeczywistej płaszczyzny rzutowej płaszczyzna zespolona dopuszcza orientację. Nie istnieje jednak dyfeomorfizm przeprowadzający zespoloną płaszczyznę rzutową na siebie i zmieniający orientację (taki odpowiednik odbicia lustrzanego).

4. $M = S^2 \times S^2$ – iloczyn kartezjański dwóch zwykłych sfer, $H_2(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, a macierz formy przecięcia wygląda następująco

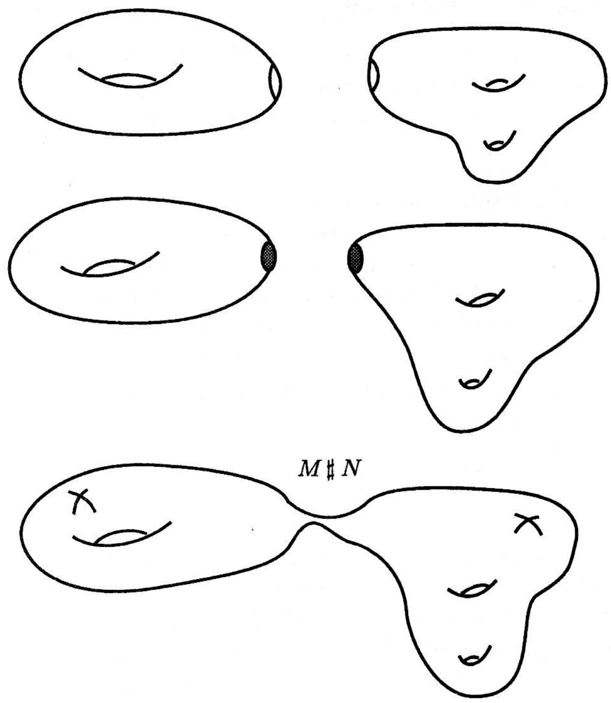
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $M \sharp N$ – suma spójna dwóch rozmaitości, $H_2(M \sharp N, \mathbb{Z}) = H_2(M, \mathbb{Z}) \oplus H_2(N, \mathbb{Z})$ i wtedy

$$I_{M \sharp N} = I_M \oplus I_N = \begin{pmatrix} I_M & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix},$$

gdzie I_M to macierz formy przecięcia rozmaitości M.

Przypomnijmy, że sumę spójną dwóch rozmaitości czterowymiarowych otrzymujemy w podobny sposób jak sumę spójną dwóch powierzchni. Chcąc „dodać" w taki sposób dwie rozmaitości wycinamy w każdej z nich czterowymiarową kulę, a następnie sklejamy wzdłuż trójwymiarowych brzegów (sfer).



Rys. 6

6. $K = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$ – powierzchnia Kummera (w zespolonej przestrzeni rzutowej). Rząd grupy $H_2(K, \mathbb{Z})$ jest równy 22 oraz

$$I_K = E_8 \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Przykład ten jest nietrywialny i, jak zobaczymy niebawem odgrywa istotną rolę w klasyfikacji jednospójnych rozmaitości czterowymiarowych.

Każda forma przecięcia (ogólniej forma dwuliniowa) charakteryzowana jest przez następujące cechy:

rząd – jest to rząd macierzy związanej z daną formą;

sygnatura – liczba znaków dodatnich minus liczba znaków ujemnych na przekątnej po sprowadzeniu do postaci diagonalnej (albo inaczej: liczba wartości własnych dodatnich minus liczba wartości własnych ujemnych);

typ – parzysty, gdy wszystkie wartości na głównej przekątnej są parzyste, w przeciwnym wypadku mówimy, że forma jest nieparzystego typu;

określoność – forma I jest dodatnio określona, gdy $I(x, x) > 0$ dla $x \neq 0$; gdy to nie zachodzi, to jest nieokreślona.

Wielkości te stanowią niezmienniki danej formy i mogą służyć do ich klasyfikacji. Niestety formy zostały sklasyfikowane tylko częściowo. Jeśli formy są nieokreślone, to klasyfikacja jest pełna: dla parzystych mogą to być wyłącznie

$$n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus mE_8$$

natomiast nieparzyste mają postać

$$(1) \oplus \ldots \oplus (1) \oplus (-1) \oplus \ldots \oplus (-1)$$

W przypadku form określonych jest kłopot z klasyfikacją, gdyż ich liczba bardzo szybko rośnie wraz ze wzrostem rzędu. Dla form parzystych sprawa przedstawia się następująco: przede wszystkim sygnatura musi być podzielna przez 8. I tak istnieje jedna forma rzędu 8 – E_8, dwie formy rzędu 16 – $E_8 \oplus E_8$ oraz E_{16}. Dalej, form rzędu 24 jest 24, rzędu 32 jest więcej niż dziesięć milionów, a form rzędu 40 więcej niż 10^{51}.

Formy przecięcia stały się głównymi niezmiennikami czterowymiarowych rozmaitości topologicznych; jeśli dwie rozmaitości mają różne (nierównoważne) formy przecięcia, to z pewnością nie są homeomorficzne. Porównując formę przecięcia na przykład z charakterystyką Eulera natychmiast widać, że forma jest znacznie bardziej subtelnym niezmiennikiem niż charakterystyka; charakterystyka to jedna liczba, forma przecięcia natomiast daje całą kwadratową tablicę liczb.

Natychmiast pojawiają się dwa podstawowe pytania. Po pierwsze, czy dla każdej niezdegenerowanej, unimodularnej, formy symetrycznej istnieje rozmaitość, dla której ta forma jest formą przecięcia? A jeśli już takie rozmaitości istnieją, to ile ich jest i, jeśli nie są homeomorficzne, jak je rozróżnić? Pierwsze pytanie dotyczy realizacji, tj. czy każda forma odpowiedniego typu związana jest z jakąś rozmaitością czterowymiarową, drugie natomiast dotyczy jednoznaczności, a więc w pewnym sensie siły danego niezmiennika – kiedy rozróżnia on rozmaitości, a kiedy staje się bezradny. Przed rokiem 1982 znane były pewne częściowe rezultaty dotyczące formy przecięcia. Milnor i Whitehead pokazali w 1958 roku, że typ homotopii rozmaitości zwartej i jednospójnej jest zdeterminowany przez formę przecięcia, a więc dwie rozmaitości z tymi samymi formami przecięcia są homotopijnie równoważne – jest to znacznie mniej niż homeomorficzność.
Na przykład, walec (powierzchnia boczna) i okrąg są homotopijnie równoważne. Nieco później Wall udowodnił, że dwie rozmaitości jednospójne i zwarte z taką samą formą przecięcia są h-kobordyczne. Oznacza to, że są one brzegiem rozmaitości pięciowymiarowej spełniającej pewne dodatkowe warunki (na przykład jednospójność). Jest to coś w rodzaju pięciowymiarowego walca, którego brzegami są właśnie rozważane rozmaitości. Sugerowałoby to, że rozmaitości te powinny być homeomorficzne. Tak jest w istocie dla rozmaitości pięcio- i wyżej wymiarowych; mówi o tym twierdzenie o h-kobordyzmie, przed rokiem

1982 udowodnione jednak tylko dla rozmaitości co najmniej pięciowymiarowych.

Oprócz wyników dotyczących jednoznaczności, były też twierdzenia o realizacji. Najważniejszym i najczęściej przytaczanym jest twierdzenie Rohlina z 1952 roku:

Jeśli czterowymiarowa gładka rozmaitość zwarta ma parzystą formę przecięcia, to jej sygnatura musi być podzielna przez 16.

Ważne i naprawdę sensacyjne okazały się wnioski z twierdzeń Freedmana.

1. *Prawdziwa jest czterowymiarowa hipoteza Poincarégo dla rozmaitości jednospójnych.*

2. *Istnieje dokładnie jedna rozmaitość topologiczna i niedopuszczająca struktury różniczkowej z formą przecięcia E_8.*

3. *Istnieje rozmaitość topologiczna z formą przecięcia* (1), *topologicznie identyczna z zespoloną płaszczyzną rzutową, na której nie da się określić gładkiej struktury – taka egzotyczna (albo fałszywa) płaszczyzna rzutowa.*

Przypomnijmy, że uogólniona hipoteza Poincarégo głosi, iż jeśli n-wymiarowa rozmaitość jest homotopijnie równoważna ze sferą n-wymiarową, to jest z tą sferą homeomorficzna. Hipotezę udało się rozstrzygnąć pozytywnie dla rozmaitości pięcio- i wyżej wymiarowych. Dokonał tego S. Smale w 1960 roku. Otwarty pozostawał przypadek czterowymiarowy i klasyczny, pochodzący od Poincarégo, trójwymiarowy.

Istnienie rozmaitości E_8 wynika z twierdzenia o realizacji oraz rezultatu Rohlina. A istnienie „fałszywej" płaszczyzny rzutowej jest konsekwencją twierdzenia o jednoznaczności.

Do tego należy dodać oczywiście klasyfikację rozmaitości czterowymiarowych jednospójnych i zwartych. Ale to jeszcze nie wszystko, gdyż wspólnie z rezultatami Donaldsona otrzymano jeden z chyba najbardziej sensacyjnych wyników XX wieku.

Gdy ukazała się już praca Freedmana, to przygotowywana była do druku inna rozprawa matematyka Simona Donaldsona, również w tym samym czasopiśmie, dotycząca podobnych problemów, w której jednak użyto zupełnie innych, zaskakujących metod. Freedman posługuje się w swoich rozumowaniach bardzo sprytnym i błyskotliwym zastosowaniem technik charakterystycznych dla topologii niskowymiarowej oraz rozmaitości gładkich (chirurgia). Donaldson, chociaż też bada rozmaitości czterowymiarowe, to używa zupełnie nietypowego zestawu narzędzi rodem z geometrii algebraicznej i różniczkowej, teorii równań różniczkowych i... fizyki teoretycznej, a dokładniej z teorii pól Yanga-Millsa.

Wiele emocji wzbudziło twierdzenie nazywane obecnie twierdzeniem Donaldsona.

Twierdzenie Donaldsona

Jeśli M jest zwartą, jednospójną, gładką rozmaitością czterowymiarową z dodatnio określoną formą przecięcia, to forma ta, po diagonalizacji nad $\mathbb{Z}$, ma postać $\sum x_i^2$.

Sens tego twierdzenia jest taki, że czterowymiarowych rozmaitości gładkich nie ma zbyt wiele; są one czymś wyjątkowym w rodzinie wszystkich jednospójnych czterowymiarowych rozmaitości. Z twierdzenia Donaldsona i twierdzeń charakteryzujących formy symetryczne wynika bowiem, że żadna parzysta dodatnio określona forma nie może być formą przecięcia dla zwartej, jednospójnej i gładkiej rozmaitości czterowymiarowej.

Wyniki Freedmana i Donaldsona prowadzą do bardzo ciekawych wniosków.

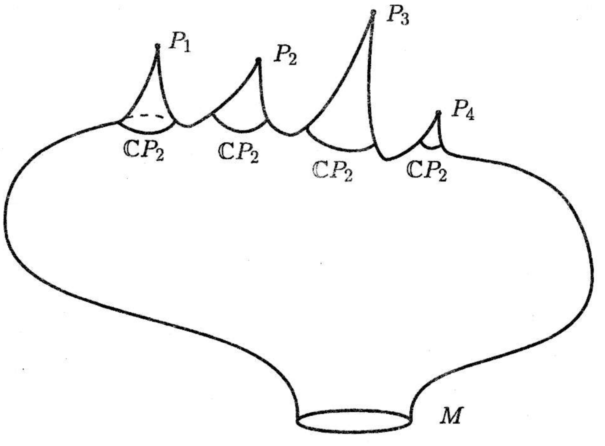
Freedman udowodnił, że istnieje czterowymiarowa rozmaitość z formą $E_8 \oplus E_8$. Z jego rozumowania nie wynika jednak, czy na tej rozmaitości istnieje (lub nie) struktura różniczkowa. Twierdzenie Donaldsona rozstrzyga ten problem: takiej struktury nie ma. Konsekwencją tego faktu jest istnienie egzotycznej struktury gładkiej na $\mathbb{R}^4$. Nie otrzymujemy jednak tej struktury wprost. Rozumowanie przebiega następująco: rozmaitość typu $E_8 \oplus E_8$ dostajemy z powierzchni Kummera K przez odpowiednie wycięcie rozmaitości typu $S^2 \times S^2$. Gdyby $\mathbb{R}^4$ miało jedyną strukturę gładką, to udałoby się całą operację przeprowadzić w sposób gładki otrzymując rozmaitość różniczkową, co jest niemożliwe. W całej konstrukcji wykorzystywana jest struktura różniczkowa na $\mathbb{R}^4$, ale inna, gdyż w przestrzeni czterowymiarowej z taką strukturą istnieje zbiór zwarty, którego nie można otoczyć gładko zanurzoną sferą w tymże $\mathbb{R}^4$. Taki zbiór musi wyglądać bardzo dziwnie, gdyż klasyczne twierdzenie głosi, iż każdy zbiór zwarty jest ograniczony, a więc musi dać się wsadzić do jakiejś kuli. W przestrzeni egzotycznej sfera takiej kuli może być tylko topologiczna; nie ma odpowiedniego gładkiego zanurzenia (to znaczy gładkie zanurzenie sfery istnieje, ale wtedy już zahacza o zbiór zwarty).

Ciekawa jest idea dowodu twierdzenia Donaldsona. Oczywiście nawet bardzo ogólne przedstawienie wszystkich kroków wymaga wprowadzenia ogromnej liczby pojęć z różnych dziedzin. Dlatego wskażemy tylko najbardziej kluczowe pomysły i zasygnalizujemy pewne hasła.

Najpierw rozpatruje się przypadek parzysty. Tu wystarczy pokazać, że M jest brzegiem zorientowanej, zwartej, pięciowymiarowej rozmaitości X. Z topologii algebraicznej wiadomo, że wtedy musi być $H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$. Jak skonstruować rozmaitość X? W tym momencie można wykorzystać strukturę różniczkową na M.

Rozmaitość M jest gładka, istnieje więc na niej struktura riemannowska (uogólnienie iloczynu skalarnego) oraz wiele innych obiektów znanych z geometrii różniczkowej (koneksje, tensory, formy krzywizny itd). Najpierw konstruuje się przestrzeń rozwiązań pewnych specjalnych równań różniczkowych związanych ze strukturą geometryczną na M. Są to właśnie znane fizykom równania Yanga-Millsa, a ich rozwiązania to instantony. Jednym z trudniejszych faktów jest niepustość zbioru takich rozwiązań. Biorąc odpowiednie klasy rozwiązań dostaniemy poszukiwaną rozmaitość X.

W przypadku ogólnym przeprowadza się podobną konstrukcję tylko, że wtedy daje się zauważyć, iż konstruowana przestrzeń ma skończoną liczbę punktów osobliwych. Żeby otrzymać rozmaitość, trzeba te osobliwości usunąć. Każda osobliwość wygląda jak stożek nad zespoloną płaszczyzną rzutową. Wycinając otoczenia punktów osobliwych dostaniemy rozmaitość X, której brzeg z jednej strony składa się z M, a z drugiej z pewnej liczby zespolonych płaszczyzn rzutowych. Tak więc M jest kobordyczna z sumą płaszczyzn rzutowych, a stąd i ze wspomnianego twierdzenia Walla wynika żądana diagonalizowalność formy przecięcia dla M.



Rys. 7

Niebawem okazało się, że struktur egzotycznych na $\mathbb{R}^4$ jest więcej. W 1984 roku Gompf wskazał cztery takie struktury i sugerował, że jest ich nieskończenie wiele. W 1987 roku Taubes udowodnił, że istnieje nieprzeliczalnie wiele (!) nierównoważnych struktur różniczkowych na czterowymiarowej przestrzeni.

Pojawiło się szereg twierdzeń charakteryzujących te struktury (choć nikt nie potrafił bezpośrednio takiej struktury skonstruować). Na przykład, Freedman i Taylor pokazali, że istnieje struktura w pewnym sensie uniwersalna oznaczana $\mathbb{R}^4_\Omega$ o tej własności, że każda inna struktura egzotyczna $\mathbb{R}^4_e$ zanurza się gładko jako podzbiór otwarty $\mathbb{R}^4_\Omega$.

Rezultaty Donaldsona i Freedmana dotyczące przestrzeni czterowymiarowej zaskoczyły matematyków. Przyzwyczajono się już co prawda, że przestrzenie nisko wymiarowe, a w szczególności czterowymiarowe sprawiają większy kłopot niż pozostałe. Nikt jednak nie spodziewał się aż takich nieregularności. Te anomalie czterowymiarowe prowokują rozmaite spekulacje dotyczące wyróżnionej roli przestrzeni czterowymiarowej.

Prace matematyków z lat osiemdziesiątych nie rozwiązały wszystkich problemów, które istniały i które się pojawiły w teorii rozmaitości nisko wymiarowych. Otwarty pozostał problem klasyfikacji innych specjalnych typów rozmaitości: udało się dla jednospójnych, jak będzie dla dwuspójnych itd.? Co ze strukturami egzotycznymi na sferze czterowymiarowej? – wszystkie sfery zostały rozpracowane za wyjątkiem tej jednej. Twierdzenie Donaldsona jest zapewne pierwszym twierdzeniem tego typu i należy oczekiwać następnych, bowiem charakteryzacja czterowymiarowych rozmaitości gładkich jest daleka od kompletności. Wydaje się, że w teorii tych obiektów czeka nas jeszcze niejedna niespodzianka.

Literatura

[1] S. Donaldson, *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*. J.Diff.Geometry 1983.

[2] A.T. Fomenko, *Topołogiczeskije wariacionnyje zadaczi*, Izd. Moskowskogo Uniwersiteta 1984.

[3] M.H. Freedman, *The topology of four dimensional manifolds*, J.Diff.Geometry 1982.

[4] R. Gompf, *Three exotic $\mathcal{R}^4$'s and other anomalies*. J. Diff. Geometry 1984.

[5] R. Kirby, L. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds*, Smoothings and Triangulations. Ann. of Math. Studies 88, 1977.

Wydawnictwa Uczelniane WSRP w Siedlcach
Wydanie I. Nakład 250 egz. Ark. wyd. 7,0. Ark. druk. 6,5. Format A-4. Papier kl. III. Oddano do druku: styczeń 1996. Druk ukończono: styczeń 1996.

Druk: Zakład Poligrafii WSRP Zamówienie nr 1/W/96