O malowaniu płaszczyzny i dzieleniu wielokątów

Marcin MAZUR, Warszawa

Genesis

Punktem wyjścia do rozważań niniejszego artykułu jest następujące, niewinnie wyglądające pytanie:

Czy każdy wielokąt można podzielić na trójkąty o równych polach?

W pierwszej chwili chciałoby się odpowiedzieć: *oczywiście, że można.* Parę następnych chwil i szybko wykreślamy „oczywiście" z naszej odpowiedzi, a problem zaczyna wydawać się „nie do ugryzienia". Kolejne dni (tygodnie, miesiące,...) pogłębią jedynie naszą bezradność. Jednakże człowiek jest istotą dociekliwą i w końcu znajduje odpowiedzi na nurtujące go pytania. Tak jest i w tym przypadku. Odpowiedź, może trochę zaskakująca, jest negatywna i została odkryta całkiem niedawno.

Wszystko zaczyna się w roku 1965, kiedy Fred Richman stawia następujące pytanie:

czy prostokąt można podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach?

opublikowane wspólnie z J. Thomasem w 1967 roku na łamach *American Mathematical Monthly* jako problem 5479 (o problemie Richmana pisał kiedyś w *Delcie* Edmund Puczyłowski). W 1968 r. John Thomas zamieszcza w *Mathematical Magazine* artykuł, w którym dowodzi między innymi, że kwadratu o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ nie można podzielić na trójkąty o równych polach i wierzchołkach o wymiernych współrzędnych z nieparzystymi mianownikami. Rezultat Thomasa jest dość fragmentaryczny, ale jego metoda inspiruje Paula Monskiego, który publikuje w 1970 r. na łamach *American Mathematical Monthly* dowód, iż odpowiedź na pytanie Richmana jest negatywna: prostokąta nie da się podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach. Genialny pomysł Monskiego jest, jak dotąd, jedynym narzędziem do badania problemów powyższego typu. Ponieważ będzie on kluczem do odpowiedzi na nasze pytanie, opiszemy go pokrótce.

Dokładniej: chodzi o artykuł *Norma 2-adyczna* w *Delcie* 6(174)/1988, str. 11.

Na początek wprowadzimy dla dowolnej liczby pierwszej p następującą funkcję ν_p, która mierzy „podzielność" liczb wymiernych przez p. Mianowicie, jeśli $q \neq 0$ jest liczbą wymierną, to można ją jednoznacznie przedstawić w postaci $q = \pm p^m \frac{a}{b}$, gdzie m jest liczbą całkowitą, a liczby naturalne a i b są względnie pierwsze i niepodzielne przez p. Przyjmujemy $\nu_p(q) = p^{-m}$. Ponadto umawiamy się, że $\nu_p(0) = 0$. Wprost z określenia wynika, że im mniejsze jest $\nu_p(q)$ tym większa potęga p „dzieli" q. Następujące własności funkcji ν_p są łatwe do uzasadnienia, co pozostawiamy Czytelnikowi jako jedno z wielu znajdujących się w niniejszym artykule zadań :

a) $\nu_p(q) \geq 0$ oraz $\nu_p(q) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q = 0$;

b) $\nu_p(ab) = \nu_p(a)\nu_p(b)$;

c) $\nu_p(-q) = \nu_p(q)$;

d) $\nu_p(a+b) \leq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$;

e) jeśli $\nu_p(a) < \nu_p(b)$ to $\nu_p(a \pm b) = \nu_p(b)$.

Ponieważ własności te będziemy poniżej wykorzystywać wielokrotnie, ważne jest by Czytelnik oswoił się z nimi dość dobrze (warto zaznaczyć, że własności c) i e) wynikają z pozostałych). Funkcja ν_p nazywana jest zwykle *normą p-adyczną* liczb wymiernych, przez analogię do standartowej normy, tzn. zwykłej wartości bezwzględnej (odnotujmy, że własność d) implikuje nierówność trójkąta: $\nu_p(a+b) \leq \nu_p(a) + \nu_p(b)$).

Używając wprowadzonych norm zajmiemy się teraz analizą wzoru na pole trójkąta jako funkcji współrzędnych jego wierzchołków. Przypomnijmy ów wzór, znany zapewne większości Czytelników z lekcji geometrii analitycznej:

Jeśli wierzchołek A_i trójkąta $A_1A_2A_3$ ma współrzędne (x_i, y_i), to pole S tego trójkąta wyraża się wzorem:

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)|.$$

Interesować nas będzie podzielność S przez daną liczbę pierwszą p. Załóżmy przeto, że współrzędne wierzchołków są liczbami wymiernymi. Załóżmy ponadto, że:

1° $\nu_p(x_1) < 1$ i $\nu_p(y_1) < 1$;

2° $\nu_p(x_2) \geq \nu_p(y_2)$ i $\nu_p(x_2) \geq 1$;

3° $\nu_p(x_3) < \nu_p(y_3)$ i $\nu_p(y_3) \geq 1$.

Zauważmy, że każdy punkt płaszczyzny o współrzędnych wymiernych spełnia dokładnie jeden z tych warunków! Z poczynionych założeń wyciągamy następujące wnioski:

— $\nu_p(x_1 - x_2) = \nu_p(x_2)$ i $\nu_p(y_1 - y_3) = \nu_p(y_3)$ na mocy własności c) i e) normy;

— $\nu_p(x_1 - x_3) \leq \max(\nu_p(x_1), \nu_p(x_3)) < \nu_p(y_3)$ wobec 1°, 3° i własności c), d);

— $\nu_p(y_1 - y_2) \leq \max(\nu_p(y_1), \nu_p(y_2)) \leq \nu_p(x_2)$ wobec 1°, 2° i własności c), d).

Stąd bez trudu otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\nu_p((x_1 - x_2)(y_1 - y_3)) &= \nu_p(x_1 - x_2)\nu_p(y_1 - y_3) = \nu_p(x_2)\nu_p(y_3) > \\ &> \nu_p(y_1 - y_2)\nu_p(x_1 - x_3) = \nu_p((y_1 - y_2)(x_1 - x_3)).\end{aligned}$$

Własność e) i wzór na pole trójkąta dają nam zatem

$$\begin{aligned}\nu_p(S) &= \nu_p\left(\frac{1}{2}\right)\nu_p(\pm[(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)]) = \\ &= \nu_p\left(\frac{1}{2}\right)\nu_p(x_1 - x_2)\nu_p(y_1 - y_3) = \nu_p\left(\frac{1}{2}\right)\nu_p(x_2)\nu_p(y_3).\end{aligned}$$

Otrzymana równość jest dla nas na tyle ważna, że zawrzemy ją w następującym lemacie:

Lemat: *Jeśli wierzchołki trójkąta spełniają warunki* 1°, 2°, 3° *to zachodzi następujący wzór:*

$$\nu_p(S) = \nu_p\left(\frac{1}{2}\right)\nu_p(x_2)\nu_p(y_3).$$

No ale co to wszystko ma wspólnego z postawionym na wstępie pytaniem? Otóż załóżmy, że kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, który w dalszym ciągu nazywać będziemy ***kwadratem jednostkowym***, podzielono na $2k+1$ trójkątów o równych polach i wierzchołkach mających wymierne współrzędne. Pole każdego z tych trójkątów jest zatem równe $1/(2k+1)$. Gdyby wierzchołki któregoś z trójkątów podziału spełniały warunki 1°–3° dla $p = 2$ wówczas wobec lematu mielibyśmy

$$\nu_2\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \nu_2\left(\frac{1}{2}\right)\nu_2(x_2)\nu_2(y_3).$$

Ponieważ $\nu_2(1/(2k+1)) = 1$, $\nu_2(1/2) = 2$, $\nu_2(x_2) \geq 1$ i $\nu_2(y_3) \geq 1$ przeto otrzymalibyśmy $1 \geq 2$, co jest jawną nieprawdą. Zatem w naszym podziale nie może być trójkątów wierzchołki których mają własności 1°–3°.

Pozwólmy teraz trochę poszaleć naszej wyobraźni. Gdyby udało nam się jakimś cudem pokazać, że – bez względu na to jak podzielimy kwadrat jednostkowy na trójkąty o równych polach i wierzchołkach mających wymierne współrzędne – któryś z tych trójkątów musi spełniać warunki 1°–3°, wówczas oczywista sprzeczność pozwoliłaby nam stwierdzić, iż odpowiedź na pytanie Richmana jest negatywna (dla podziałów na trójkąty z wierzchołkami o wymiernych współrzędnych). Gdyby ponadto życie było na tyle łaskawe, iż funkcja ν_2

dawałaby się rozszerzyć na wszystkie liczby rzeczywiste z zachowaniem własności a)–e), wówczas w naszych rozważaniach moglibyśmy pominąć założenie o wymierności współrzędnych rozważanych punktów (pozostawiamy Czytelnikowi przyjemność sprawdzenia, że mając funkcję ν_p określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych i mającą własności a)–e) powyższe rozważania, a w szczególności lemat, przenoszą się bez zmian na dowolne trójkąty) i otrzymalibyśmy odpowiedź negatywną w ogólnym przypadku (pod warunkiem, że wciąż potrafilibyśmy uzasadnić, że w dowolnym podziale jest trójkąt mający własności 1°–3°). Okazuje się, że poczynione hipotezy w rzeczywistości zachodzą, a ich uzasadnienie znane było na długo przed pojawieniem się problemu Richmana. Zasługą Monskiego (i Thomasa) jest skojarzenie tych faktów z rozważanym problemem.

Miłego ciała nigdy dość

Zajmijmy się na początek zagadnieniem rozszerzania norm. Otóż prawdą jest, że dla każdej liczby pierwszej p normę p-adyczną można rozszerzyć do funkcji określonej na wszystkich liczbach rzeczywistych i mającej własności a)–e) (i to na nieskończenie wiele sposobów!). Fakt ten nie jest bardzo trudnym czy głębokim twierdzeniem (znany był już w latach dwudziestych), ale by je udowodnić (w „skończonym czasie") potrzebny jest język teorii ciał. Ponieważ teoria ciał nie należy do kanonu matematyki elementarnej i nie możemy zakładać że Czytelnik jest z nią obeznany, nie podamy tu pełnego dowodu (przytoczenie potrzebnych nam pojęć i faktów zajęłoby zbyt wiele miejsca). Jednakże by Czytelnik nie czuł się oszukany postaramy się naszkicować drogę prowadzącą do dowodu, odsyłając bardziej dociekliwych do książki J. Browkina *Teoria ciał*. Samo pojęcie ciała będzie nam niezbędne. By nie wdawać się w zbytnią abstrakcję, *ciałem* nazywać będziemy dowolny podzbiór K liczb rzeczywistych zawierający 1 i taki, że dla dowolnych dwóch liczb a i b z K liczby $a \pm b$, ab i w przypadku $b \neq 0$ również a/b należą do K. Przykładami ciał są zbiór liczb wymiernych i zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Ale pomiędzy tymi skrajnymi przypadkami (Czytelnik bez trudu uzasadni, że każde ciało zawiera zbiór liczb wymiernych) jest mnóstwo pośrednich. Na przykład zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a i b są liczbami wymiernymi jest ciałem. Pozostawiamy Czytelnikowi znalezienie innych przykładów ciał. Dla dowolnego ciała K i liczby rzeczywistej α ma miejsce jeden z następujących przypadków:

i) W ciele K istnieją liczby $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ takie, że $\alpha^n + k_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + k_1\alpha + k_0 = 0$. Mówimy wówczas, że α jest elementem *algebraicznym* nad ciałem K. Na przykład $\sqrt{2}$ jest algebraiczny nad ciałem liczb wymiernych, gdyż $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$. Okazuje się, że w tym przypadku zbiór wszystkich liczb postaci $l_0 + l_1\alpha + \cdots + l_{n-1}\alpha^{n-1}$, gdzie liczby l_i należą do ciała K, jest również ciałem, które oznacza się przez $K(\alpha)$. Jest to najmniejsze ciało zawierające K i α.

ii) Przypadek *i)* nie zachodzi, tzn. jeśli $k_0 + k_1\alpha + \cdots + k_n\alpha^n = 0$ dla pewnych $k_0, k_1, \ldots, k_n$ w ciele K to $k_0 = k_1 = \cdots = k_n = 0$ (dlaczego?). Mówimy, że α jest elementem *przestępnym* nad ciałem K. Na przykład liczba π jest elementem przestępnym nad ciałem liczb wymiernych, lecz dowód tego faktu nie jest zbyt łatwy. W tym przypadku zbiór wszystkich liczb postaci $\dfrac{k_0 + k_1\alpha + \cdots + k_n\alpha^n}{l_0 + l_1\alpha + \cdots + l_m\alpha^m}$ dla pewnych k_i, l_j z ciała K takich, że nie wszystkie l_j są 0 (zauważmy, że mianownik jest $\neq 0$) jest ciałem, które oznacza się podobnie jak poprzednio przez $K(\alpha)$ i tak jak w *i)* jest to najmniejsze ciało zawierające K i α.

Funkcję ν określoną na ciele K i posiadającą własności a)–e) będziemy nazywali *normą p-adyczną* ciała K, jeśli jej ograniczenie do liczb wymiernych pokrywa się z funkcją ν_p. Okazuje się, że jeśli na ciele K określona jest norma p-adyczna ν, to dla dowolnej liczby rzeczywistej α normę tę można rozszerzyć do normy ciała $K(\alpha)$. W przypadku *ii)* jest to dość łatwe: dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej c normę ν można przedłużyć na ciało $K(\alpha)$ kładąc

$\nu(\alpha) = c$ i definiując

$$\nu\left(\frac{k_0 + k_1\alpha + \cdots + k_n\alpha^n}{l_0 + l_1\alpha + \cdots + l_m\alpha^m}\right) = \frac{A}{B}$$

gdzie A jest największą z liczb $\nu(k_0), \nu(k_1)c, \ldots, \nu(k_n)c^n$, a B jest największą z liczb $\nu(l_0), \nu(l_1)c, \ldots, \nu(l_m)c^m$. Dowód, że powyższa definicja jest poprawna (tzn. nie zależy od przedstawienia danej liczby ciała $K(\alpha)$ w postaci $\frac{k_0 + \cdots + k_n\alpha^n}{l_0 + \cdots + l_m\alpha^m}$) oraz że tak określona funkcja jest rzeczywiście normą p-adyczną pozostawiamy Czytelnikowi jako wyzwanie. Podkreślamy tu wyraźnie fakt, który będzie miał dla nas pierwszorzędne znaczenie: *jeśli α jest elementem przestępnym nad ciałem K, to normę ν można przedłużyć do normy ciała $K(\alpha)$ tak, by jej wartość na elemencie α była z góry zadaną liczbą rzeczywistą dodatnią.*

W przypadku *i)* sprawa jest nieco bardziej subtelna. Wciąż jednak można znaleźć rozszerzenie, choć tylko na skończenie wiele sposobów. Jako ambitne zadanie proponujemy Czytelnikowi określenie normy 2-adycznej na ciele $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (jest tylko jedna taka norma!).

Korzystając z powyższych obserwacji dość łatwo można pokazać, że normę p-adyczną można określić na wszystkich liczbach rzeczywistych, choć tu również kryje się pewna trudność. Otóż jeśli mamy ciąg liczb rzeczywistych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, to rozpatrując ciała $K_1 = \mathbb{Q}(\alpha_1)$, $K_2 = K_1(\alpha_2)$, itd. bez trudu możemy sukcesywnie rozszerzać normę p-adyczną. Jednakże w ten sposób nigdy nie osiągniemy ciała wszystkich liczb rzeczywistych, których po prostu jest zbyt wiele. By wybrnąć z sytuacji potrzebny jest tak zwany *pewnik wyboru* (a dokladniej równoważny mu lemat Kuratowskiego-Zorna), który pozwala znaleźć maksymalne ciało K, na którym normę p-adyczną można określić. Wiedząc o istnieniu takiego ciała nietrudno uzasadnić, że musi ono pokrywać się z ciałem wszystkich liczb rzeczywistych (w przeciwnym razie moglibyśmy rozszerzyć normę z K na pewne większe ciało, wbrew maksymalności ciała K). Ten techniczny problem nie jest jednakże dla nas zbyt istotny: w naszych rozważaniach norma p-adyczna potrzebna będzie jedynie na jakimś ciele zawierającym współrzędne skończenie wielu interesujących nas punktów, a takie ciało można otrzymać z liczb wymiernych w opisany powyżej sposób.

Możemy obecnie przystąpić do obiecanego w tytule malowania płaszczyzny. Niech więc dane będzie pewne ciało K i norma p-adyczna ν na nim określona. Nietrudno jest zobaczyć, że każdy punkt płaszczyzny $P = (x, y)$ o współrzędnych z ciała K spełnia dokładnie jeden z warunków 1°–3°. Punkt P pomalujemy na biało jeśli spełnia warunek 1° (tzn. jeśli $\nu(x) < 1$ i $\nu(y) < 1$), na niebiesko gdy spełniony jest warunek 2° i na czerwono w przypadku warunku 3° (jeśli ktoś nie lubi ciała K, może pomalować od razu całą płaszczyznę korzystając z rozszerzenia waluacji ν na wszystkie liczby rzeczywiste). Tak otrzymane pokolorowanie punktów o współrzędnych z ciała K będziemy nazywali *ν-pokolorowaniem*. Warunek, że trójkąt ma własności 1°–3° możemy obecnie sformułować następująco: trójkąt ma wierzchołki wszystkich trzech kolorów. Takie trójkąty nazywać będziemy *trójkolorowymi*. Ponieważ rozważania pierwszego paragrafu prowadzące do lematu korzystały jedynie z formalnych własności a)–e) normy (a nie z konkretnej postaci rozważanych tam norm) więc po zamianie słów „punkty o współrzędnych wymiernych" na słowa „punkty o współrzędnych z ciała K" te same rozważania dowodzą, że nasz lemat pozostaje w mocy, tzn. że pole S trójkąta trójkolorowego w ν-pokolorowaniu spełnia $\nu(S) = \nu(1/2)\nu(x_n)\nu(y_c)$, gdzie x_n jest odciętą wierzchołka niebieskiego, a y_c rzędną wierzchołka czerwonego. W dalszych rozważaniach wykorzystywać będziemy następujący wniosek, który nazwiemy *nierównością fundamentalną*:

Nierówność Fundamentalna: *Jeśli wielokąt o polu S podzielono na m trójkątów o równych polach i pewien z tych trójkątów jest trójkolorowy w ν-pokolorowaniu, to $\nu(m) \le \nu(2)\nu(S)$.*

Dla dowodu zauważmy, że każdy trójkąt podziału ma pole S/m, więc wobec powyższej równości i nierówności $\nu(x_n) \ge 1 \le \nu(y_c)$ otrzymujemy nierówność $\nu(S/m) \geq \nu(1/2)$ równoważną nierówności fundamentalnej. Siła tej ostatniej opiera się na następującej uwadze: jeśli ν jest normą p-adyczną to $\nu(m) = \nu_p(m) = p^{-n}$, gdzie p^n jest największą potęgą liczby p dzielącą m; w szczególności, jeśli $\nu(2)\nu(S) < 1$, to $n \geq 1$, tzn. m dzieli się przez p !

Zauważmy na koniec, że nasze pokolorowanie ma następującą, bardzo ważną własność: na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów. W samej rzeczy, gdyby na pewnej prostej leżał punkt biały, niebieski i czerwony, wówczas wyznaczony przez nie „zdegenerowany" trójkąt trójkolorowy miałby pole $S = 0$. Z drugiej strony wobec lematu mielibyśmy $0 = \nu(S) = \nu(1/2)\nu(x_n)\nu(y_c) \neq 0$ gdzie x_n jest odciętą punktu niebieskiego, a y_c rzędną punktu czerwonego. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego stwierdzenia.

Przygotowanie artyleryjskie

Pora na omówienie metody, która pozwoli nam uzasadnić między innymi, iż dowolny podział kwadratu jednostkowego na skończenie wiele trójkątów zawiera trójkąt trójkolorowy (w ν-pokolorowaniu) i tym samym zakończy rozwiązanie problemu Richmana. Okazuje się, że potrzebny nam fakt znany był na długo przed rokiem 1970 pod nazwą lematu Spernera. Lemat ten ma wiele wersji, a jego pierwotne zastosowanie dotyczyło dowodu twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Poniżej sformułujemy bardzo ogólną wersję lematu Spernera, która będzie podstawowym narzędziem w naszych dalszych rozważaniach.

By sformułować ów lemat rozważmy wielokąt $A_1A_2\ldots A_n$ (numeracja wierzchołków przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Załóżmy, że nasz wielokąt podzielony został na trójkąty i każdy wierzchołek tych trójkątów pomalowano jednym z trzech kolorów: białym, niebieskim lub czerwonym. Dla wygody wierzchołki trójkątów podziału będziemy dalej nazywali *wierzchołkami podziału* (odnotujmy, że wierzchołki wielokąta są wśród nich), a boki trójkątów podziału – *krawędziami podziału.* O naszym pokolorowaniu będziemy zakładali, że spełnia następujące, niezwykle istotne założenie: *na żadnym z boków wielokąta i na żadnej krawędzi podziału nie leżą wierzchołki podziału wszystkich trzech kolorów* (w szczególności ν-pokolorowania mają tą własność). Rozważmy teraz trójkąty podziału mające wierzchołki wszystkich trzech kolorów. Będziemy je dalej nazywali *trójkolorowymi.* Jeśli przy obchodzie brzegu trójkąta trójkolorowego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wierzchołek czerwony następuje bezpośrednio po białym, to trójkąt ten będziemy nazywali *białym*, w przeciwnym razie – *czerwonym.* Niech t_b, t_c oznacza odpowiednio liczbę trójkątów białych i czerwonych. Zajmijmy się teraz bokami wielokąta mającymi jeden wierzchołek biały i jeden czerwony. Obchodząc brzeg wielokąta przeciwnie do ruchu wskazówek zegara możemy taki bok przejść „od wierzchołka białego do czerwonego" bądź przeciwnie – od czerwonego do białego. W pierwszym przypadku bok wielokąta będziemy nazywali *białym*, a w drugim – *czerwonym.* Niech b_b oznacza liczbę boków białych, a b_c liczbę boków czerwonych. Lemat Spernera zawiera się w następującej, magicznej równości:

Lemat Spernera: $t_b - t_c = b_b - b_c$.

W szczególności, jeśli $b_b - b_c \neq 0$, to musi istnieć co najmniej jeden trójkąt trójkolorowy (dlaczego?)! W tym właśnie wniosku zawiera się cała siła lematu Spernera.

Dowód będzie przebiegał w kilku krokach. Na początek sprowadzimy nasz problem do rozważania pewnych szczególnych podziałów zwanych *triangulacjami.* Triangulacja to podział w którym częścią wspólną dowolnych dwóch trójkątów jest wspólna krawędź, wspólny wierzchołek bądź po prostu zbiór pusty. Innymi słowy, żadna krawędź podziału nie zawiera wierzchołków podziału w swoim wnętrzu (pozostawiamy Czytelnikowi uzasadnienie równoważności tych dwu określeń).

Przypuśćmy, że pewna krawędź podziału, powiedzmy krawędź AB trójkąta ABC, zawiera w swym wnętrzu wierzchołki podziału. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC. Pomalujmy go tym samym kolorem co wierzchołek A i połączmy go odcinkami z punktami A, B, C i wszystkimi wierzchołkami podziału we wnętrzu krawędzi AB. Otrzymamy wówczas nowy podział naszego wielokąta mający te same wartości t_b, t_c, b_b, b_c co wyjściowy (żaden z nowo powstałych trójkątów nie jest trójkolorowy – tu wykorzystujemy fakt, że na AB nie ma wierzchołków wszystkich 3 kolorów). Ponadto liczba „złych" krawędzi, tzn. krawędzi zawierających w swoim wnętrzu wierzchołki podziału zmniejszyła się o 1 (bo zlikwidowaliśmy złą krawędź AB, a Czytelnik bez trudu uzasadni, że żadna nowa zła krawędź się nie pojawiła). Zatem po skończonej liczbie opisanych powyżej operacji otrzymamy podział będący triangulacją.

Przyjrzymy się obecnie nieco dokładniej liczbie $b_b - b_c$. W tym celu rozpatrzmy krawędzie naszego podziału mające jeden koniec biały, a drugi czerwony i zawarte w brzegu wielokąta. Obchodząc brzeg wielokąta przeciwnie do ruchu wskazówek zegara możemy taką krawędź przejść od wierzchołka białego do czerwonego lub odwrotnie. Jak poprzednio, w pierwszym wypadku krawędź zwana będzie *białą*, a w drugim – *czerwoną* (wyróżniliśmy zatem białe i czerwone trójkąty, krawędzie i boki!). Każda taka krawędź jest oczywiście zawarta w pewnym boku wielokąta, a z uwagi na poczynione założenia może to być jedynie bok mający oba końce białe, oba końce czerwone bądź jeden biały i jeden czerwony (gdyż żaden bok wielokąta nie zawiera wierzchołków podziału wszystkich trzech kolorów). Łatwo jest uzasadnić, że liczba krawędzi białych i czerwonych zawartych w boku o obu wierzchołkach białych (czerwonych) jest taka sama (na przykład przez indukcję ze względu na liczbę krawędzi zawartych w danym boku). Podobnie bok o końcach białym i czerwonym, jeśli jest biały, to zawiera o jedną krawędź białą więcej niż czerwoną, a jeśli jest czerwony – o jedną krawędź czerwoną więcej niż białą. Jeśli Czytelniku nie zagubiłeś się jeszcze w odcieniach bieli i czerwieni, pora na konkluzję: jeśli przez k_b, k_c oznaczymy liczbę krawędzi białych i czerwonych odpowiednio to $b_b - b_c = k_b - k_c$.

Możemy teraz przystąpić do ostatniej fazy dowodu. Przypomnijmy, że nasz podział jest triangulacją i pragniemy pokazać, iż $t_b - t_c = k_b - k_c$. By to osiągnąć wprowadzimy następującą terminologię: trójkąty triangulacji nazywać będziemy *komnatami*, a krawędzie mające jeden wierzchołek biały i jeden czerwony – *wrotami*. W szczególności rozważane powyżej krawędzie białe i czerwone są wrotami zawartymi w brzegu wielokąta. Mając komnaty będziemy, rzecz jasna, po nich spacerować przechodząc przez łączące je wrota (tu potrzebny jest nam fakt, iż rozpatrywany podział jest triangulacją; w przeciwnym razie pojęcie wrót nie miałoby za bardzo sensu). Umówmy się przy tym, że nigdy nie będziemy przechodzili wrót „tam i z powrotem". Jeśli zaczniemy spacer w komnacie jednokolorowej, to po pewnym czasie albo znajdziemy sie w innej komnacie jednokolorowej (z której nie ma już wyjścia), albo wyjdziemy na zewnątrz wielokąta przez wrota zawarte w brzegu. Trzeci możliwy rodzaj spaceru zaczyna się od wejścia przez wrota zawarte w brzegu i kończy się opuszczeniem naszego „pałacu" również przez wrota zawarte w brzegu (komnaty mające dwa wrota są przejściowe i w nich żaden spacer nie zaczyna się i nie kończy; komnaty nie mające wrót w ogóle są „ślepe" i nas nie interesują). Czytelnik bez trudu uzasadni, że otrzymane w ten sposób spacery nigdy nie przecinają się (tzn. nie mają wspólnych komnat), a także, iż każda komnata trójkolorowa i każde wrota zawarte w brzegu są końcem bądź początkiem dokładnie jednego spaceru. Ponadto:

— jeśli nasz spacer zaczyna się i kończy w komnatach trójkolorowych, to komnaty te są różnych rodzajów, tzn. jedna jest biała, a jedna czerwona. Niech s_1 oznacza liczbę takich spacerów.

— jeśli nasz spacer zaczyna się w komnacie trójkolorowej, a kończy wyjściem przez wrota zawarte w brzegu (bądź odwrotnie), to komnata ta i wrota są jednocześnie oba czerwone lub oba białe. Oznaczmy przez s_b (s_c) liczbę takich spacerów z komnatą białą (czerwoną).

— jeśli nasz spacer zaczyna się i kończy przejściem przez wrota zawarte w brzegu, to wrota te są różnych rodzajów, tzn. jedne są białe, a drugie czerwone. Niech s_3 oznacza liczbę takich spacerów.

Wobec powyższego liczba komnat białych równa jest sumie liczby spacerów pierwszego rodzaju i liczby spacerów drugiego rodzaju z białą komnatą, tzn. $t_b = s_1 + s_b$. Podobnie $t_c = s_1 + s_c$, $k_b = s_3 + s_b$ i $k_c = s_3 + s_c$. Zatem $t_b - t_c = s_b - sc = k_b - k_c$, co kończy dowód.

Jako ilustrację możliwości udowodnionego lematu pokażemy teraz, że jeśli kwadrat jednostkowy podzielony jest na trójkąty, których wierzchołki są pomalowane za pomocą ν-pokolorowania, to pewien trójkąt jest trójkolorowy. W samej rzeczy, ponieważ wierzchołek $(0,0)$ jest biały, wierzchołki $(1,0)$ i $(1,1)$ są niebieskie a wierzchołek $(0,1)$ jest czerwony ($\nu(1) = 1$ dla każdej normy), więc $b_c = 1$ i $b_b = 0$, w szczególności $b_b - b_c \neq 0$, a zatem wobec lematu Spernera pewien trójkąt podziału jest trójkolorowy. Tym samym dowód twierdzenia Monskiego został zakończony.

Decydujące starcie

Nadszedł czas by użyć mozolnie skonstruowane metody i rozprawić się z dręczącym nas problemem. Rozpatrzmy więc dowolny wielokąt W. Przez *spektrum* tego wielokąta rozumieć będziemy zbiór $S(W)$ wszystkich liczb naturalnych k, takich że W można podzielić na k trójkątów o równych polach. Nasz problem sprowadza się zatem do następującego pytania: *czy zawsze* $S(W) \neq \emptyset$? Przed przystąpieniem do odpowiedzi poczynimy kilka prostych obserwacji o spektrum. Otóż jeśli $m \in S(W)$, to dla każdej liczby naturalnej k również $km \in S(W)$. Wynika to z banalnej uwagi, że każdy trójkąt T można podzielić na k trójkątów o równych polach, tj. $S(T) = \mathbb{N}$. Ponadto jeśli dwa wielokąty są afinicznie równoważne, to mają takie same spektra. W szczególności spektrum dowolnego równoległoboku składa się z liczb parzystych, gdyż jest on afinicznie równoważny kwadratowi jednostkowemu (nietrudno jest podzielić kwadrat na dowolną parzystą liczbę trójkątów o równych polach, a na nieparzystą, jak już wiemy, tego zrobić się nie da).

Zanim autor niniejszego artykułu poznał odpowiedź na postawione na wstępie pytanie próbował (nieskutecznie) sam znaleźć odpowiedź. Punktem wyjścia była obserwacja, że podział wielokąta o polu 1 na trójkąty o równych polach równoważny jest podziałowi na trójkąty o polach wymiernych. Ponieważ każdy wielokąt o wymiernym polu bez trudu można podzielić na czworokąty o polach wymiernych, więc nasze zadanie można sprowadzić do następującego problemu: *czy każdy czworokąt o wymiernym polu można podzielić na trójkąty o polach wymiernych?* Załóżmy, że potrafimy pokolorować płaszczyznę trzema kolorami tak, by dowolne trzy punkty różnych kolorów były wierzchołkami (trójkolorowego) trójkąta o niewymiernym polu. Zakładamy przy tym, że każdy kolor został użyty co najmniej raz. W szczególności na żadnej prostej nie leżą wierzchołki wszystkich trzech kolorów. Jeśli teraz weźmiemy dowolny trójkąt trójkolorowy ABC, to Czytelnik bez trudu uzasadni, że istnieje punkt D taki, że czworokąt $ABDC$ jest wypukły i ma pole wymierne, a punkty A, D są pomalowane różnymi kolorami. Jeśli podzielimy ten czworokąt na trójkąty, to na mocy lematu Spernera musi wśród nich istnieć trójkąt trójkolorowy, a więc mający pole niewymierne. Wobec tego odpowiedź na nasze pytanie byłaby negatywna. Niestety autorowi nie udało się udowodnić, że płaszczyznę można pokolorować w żądany sposób i do dziś nie wie, czy jest to możliwe. Może komuś z Czytelników uda się rozstrzygnąć ten problem.

Pierwszymi, którzy pokazali, że istnieją czworokąty, których nie da się podzielić na trójkąty o równych polach, byli A. W. Hales i E. G. Straus. Ich dowód był niekonstruktywny i polegał na obserwacji, że czworokątów o tej własności jest w rzeczywistości „bardzo dużo". By być nieco bardziej precyzyjnym, będziemy rozpatrywali czworokąty $C(x,y)$ o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, (x,y) i $(0,1)$, gdzie x, y są liczbami dodatnimi i $x + y > 1$ (każdy czworokąt jest afinicznie równoważny któremuś z takich). Otóż Hales i Straus pokazali, że zbiór tych punktów (x, y), dla których czworokąt $C(x, y)$ da się podzielić na trójkąty o równych polach jest tzw. *zbiorem pierwszej kategorii*, w szczególności jego dopełnienie jest zbiorem gęstym! Parę lat póżniej, w roku 1990, E.A. Kasimatis i S.K. Stein podali dowód konstruktywny. Gdy się włada opisaną w poprzednich paragrafach techniką, nie jest to zbyt trudne. Okazuje się, że jeśli a jest elementem przestępnym nad ciałem liczb wymiernych to trapezu $C(1, a)$ nie da się podzielić na trójkąty o równych polach, tzn. $S(C(1, a)) = \emptyset$. W samej rzeczy, załóżmy iż czworokąt nasz został podzielony na m trójkątów o równych polach. Pole tego czworokąta jest równe $(1 + a)/2$. Liczba $1 + a$ jest również przestępna nad ciałem liczb wymiernych (dowód tego stwierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie z teorii ciał). Zatem dla dowolnej liczby pierwszej p na ciele $\mathbb{Q}(1 + a)$ można określić waluację p-adyczną ν tak, że $\nu(1 + a) = p^{-1}$. Ponadto waluację tę można przedłużyć do waluacji p-adycznej na pewnym ciele K zawierającym współrzedne wszystkich wierzchołków podziału (na przykład na wszystkie liczby rzeczywiste). Rozpatrzmy teraz ν-pokolorowanie punktów o współrzędnych z K. Punkt $(0, 0)$ jest biały, punkt $(0, 1)$ czerwony, a punkt $(1, 0)$ niebieski. Ponadto punkt $(1, a)$ na pewno nie jest biały ($\nu(1) = 1$), więc $b_b - b_c = -1$ i na mocy lematu Spernera pewien trójkąt podziału jest trójkolorowy. Wobec tego na mocy nierówności fundamentalnej mamy $\nu(m) \leq \nu(2)\nu((1 + a)/2) \leq p^{-1}$, a więc w szczególności m jest podzielne przez p. Ponieważ p było dowolne, pokazaliśmy, że m jest podzielne przez wszystkie liczby pierwsze, co jest niemożliwe. Tym samym zakończyliśmy długą drogę prowadzącą do odpowiedzi na nasze niewinne pytanie. By uczynić ją całkowicie konstruktywną pozostaje zauważyć, że za a możemy wziąć liczbę π, liczbę e lub dowolną inną liczbę, o której wiemy, że jest przestępna (a jest ich nieprzeliczalnie wiele).

Krajobraz po bitwie

Oczywiście zupełnie naturalną wydaje się próba opisu spektrum różnych wielokątów. Pierwsze kroki w tym kierunku zostały już poczynione. Kasimatis i Stein nieco dokładniej przyglądali się spektrum czworokątów. Wiemy już, że spektrum dowolnego równoległoboku składa się z liczb parzystych, oraz że istnieją trapezy o pustym spektrum. Używając opisanej powyżej techniki udowodnili oni następujące rezultaty:

— jeśli $0 < a = r/s$ jest liczbą wymierną i r, s są względnie pierwsze, to spektrum trapezu $C(1, a)$ składa się z wielokrotności liczby $r + s$;

— jeśli któraś z liczb $a + b$, a/b jest liczbą wymierną, to spektrum czworokąta $C(a, b)$ jest niepuste;

— jeśli n jest liczbą naturalną nie będącą kwadratem i $m \in S(C(1, n))$, to m jest podzielne przez $(n - 1)/2$, a w przypadku gdy n jest parzyste bądź daje resztę 1 przy dzieleniu przez 8, to nawet przez $n - 1$;

— jeśli $1/2 < a = r/2s$ gdzie r i $2s$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to spektrum czworokąta $C(a, a)$ zawiera liczbę 2 i liczby postaci $r + 2ks$, k-liczba całkowita nieujemna; w szczególności spektrum czworokąta $C(3/2, 3/2)$ składa się ze wszystkich liczb naturalnych wiekszych od 1;

— jeśli $\nu(a) < 2$ dla pewnej normy 2-*adycznej* ν ciała $\mathbb{Q}(a)$, to spektrum czworokąta $C(a, a)$ składa się z liczb parzystych;

— jeśli a, b są liczbami naturalnymi, to spektrum czworokąta $C(a, b)$ składa się z wielokrotności liczby $(a + b)/(a, b)$;

— jeśli a, b, c, d są liczbami naturalnymi oraz $(a, b) = (c, d) = (a, c) = (b, d) = 1$, to spektrum czworokąta $C(a/b, c/d)$ składa się z wielokrotności liczby $ad + bc$;

— jeśli b jest elementem przestępnym nad ciałem $\mathbb{Q}(a)$, to spektrum czworokąta $C(a, b)$ jest puste.

Wszystkie powyższe fakty dają się dość łatwo uzyskać za pomocą opisanych w niniejszym artykule metod i zainteresowany Czytelnik może potraktować je jako zestaw zadań pomagający opanować używaną tu technikę.

Kasimatis i Stein podali również nieskończenie wiele liczb niewymiernych postaci $t = a + \sqrt{b}$, gdzie a, b, są liczbami wymiernymi, dla których spektrum czworokąta $C(1,t)$ jest niepuste. Jednakże nie udało im się znaleźć żadnego t tej postaci z $a = 0$ i w związku z tym sformuowali następującą, intrygującą hipotezę:

Jeśli b jest liczbą wymierną nie będącą kwadratem liczby wymiernej, to spektrum trapezu $C(1, \sqrt{b})$ jest puste.

Póki co, nie wiadomo nawet, czy powyższa hipoteza jest prawdziwa dla $b = 2$!

Wiele pytań dotyczących czworokątów pozostaje otwartych, ale chyba już dość uwagi im poświęciliśmy. Jeśli chodzi o dowolne wielokąty, to wiedza nasza o ich spektrum jest jeszcze bardziej uboga. W 1989 roku Kasimatis udowodnił następujące twierdzenie:

Jeśli $n \geq 5$, to spektrum n-kąta foremnego składa się z wielokrotności n.

Podamy ideę dowodu tego zadziwiającego twierdzenia dla $n = 6$. Otóż nietrudno zauważyć, że istnieje przekształcenie afiniczne przekształcające sześciokąt foremny na sześciokąt X o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$ i $(0,1)$. Używając normy 2-adycznej i związanego z nią pokolorowania łatwo otrzymujemy (z pomocą nierówności fundamentalnej), że dowolny element spektrum X jest podzielny przez 2, a używając pokolorowania związanego z normą 3-adyczną w ten sam sposób uzyskujemy podzielność przez 3 elementów spektrum X. Z drugiej strony nietrudno jest podzielić sześciokąt foremny na $6k$ trójkątów o równych polach i ogólnie n-kąt foremny na kn takich trójkątów. W przypadku innych wielokątów foremnych nie da się ich niestety przekształcić afinicznie na wielokąty o wierzchołkach z wymiernymi współrzędnymi i do analizy norm współrzędnych wierzchołków potrzebna jest szczypta algebraicznej teorii liczb. Idea dowodu pozostaje jednakże ta sama.

Podobnie jak dla czworokątów, nietrudno pokazać, że n-kątów mających puste spektrum jest „dużo", w szczególności takimi są wielokąty, których wierzchołki mają algebraicznie niezależne współrzędne.

Jeśli już zaczęliśmy badać spektra wielokątów, to dlaczego by nie spróbować podobnych rozważań dla wielościanów lub nawet n-wymiarowych wielościanów. Oczywiście ludzie zadali już sobie ten trud i pewne wyniki w tym kierunku osiągnięto. Naturalnie zamiast podziałów na trójkąty rozpatrywać należy podziały na czworościany (a w przypadku wielowymiarowym na tak zwane *sympleksy*). Okazuje się, że lemat Spernera ma swoje analogi w dowolnym wymiarze i z jego pomocą D. G. Mead udowodnił w roku 1979 że spektrum n-wymiarowej kostki składa się z wielokrotności liczby $n!$. Poza tym niewiele więcej wiadomo. Kasimatis i Stein pokazali, że spektrum ośmiościanu foremnego składa się z wielokrotności 4. Spektra dwunastościanu i dwudziestościanu formnego nie są znane, ale wiadomo, że spektrum tego pierwszego zawiera liczbę 60 i zawarte jest w zbiorze wielokrotności 30, a spektrum dwudziestościanu foremnego zawiera 20 i jest zawarte w wielokrotnościach 10.

Wiele pytań dotyczących spektrów pozostaje otwartych, wiele z nich nie zostało nawet sformułowanych. Jednym z celów niniejszego wypracowania jest przekonanie Czytelnika, iż może śmiało spróbować swych sił i przyczynić się do rozwoju tej dość młodej gałązki wielkiego drzewa matematyki. Następujące trzy problemy wydają się szczególnie interesujące:

— *co można powiedzieć o współrzędnych wierzchołków trójkątów podziału wielokąta na trójkąty o równych polach; w szczególności, czy jeśli wielokąt ma wierzchołki o współrzędnych wymiernych, to współrzędne trójkątów podziału muszą być algebraiczne nad ciałem liczb wymiernych?*

— *czy wielościan śrokowosymetryczny może mieć liczbę nieparzystą w swoim spektrum? - dla wielokątów środkowosymetrycznych negatywną odpowiedź anonsował Paul Monsky, ale dowód nie został, póki co, opublikowany;*

— *widzieliśmy powyżej, że spektrum wielokąta może składać się z wielokrotności pewnej liczby naturalnej, może też zawierać wszystkie liczby naturalne prócz 1; czy jeśli spektrum wielokąta (wielościanu) składa się z wielokrotności skończenie wielu liczb naturalnych (mówimy wtedy, że jest skończenie generowane), to musi ono w rzeczywistości składać sie z wielokrotności jednej liczby (tzn. być generowane przez jeden element)?.*

Literatura nieobowiązkowa

Jeśli autorowi udało się zainteresować Cię, Czytelniku powyższą problematyką, a język angielski nie jest Ci zupełnie obcy, następujące artykuły mogą okazać się pomocne:

[1] A. W. Hales & E. G. Straus, *Projective colorings*, Pacific Journal of Mathematics 99 (1982), strony 31–43.

[2] E. A. Kasimatis, *Dissections of regular polygons into triangles of equal areas*, Discrete Computations Geometry 4 (1989), strony 375–381.

[3] E. A. Kasimatis & S. K. Stein, *Equidissections of polygons*, Discrete Mathematics 85 (1990), strony 281–294.

[4] D. G. Mead, *Dissection of a hypercube into simplexes*, Proceedings of the American Mathematical Society 76 (1979), strony 302–304.

[5] P. Monsky, *On dividing a square into triangles*, American Mathematical Monthly 77 (1970), strony 161–164.

[6] J. Thomas, *A dissection problem*, Mathematical Magazine 41 (1968), strony 187–190.

Jeśli z jakichś powodów powyższe pozycje są Ci niedostępne nie przejmuj się tym za bardzo: będziesz mógł więcej czasu spędzić na własnych rozmyślaniach. Trudności jakie możesz napotkać w związku z teorią ciał pomoże Ci przezwyciężyć wspomniana już książka prof. J. Browkina *Teoria ciał*. Powodzenia!