Matematyczne modele zjawisk przyrodniczych

Mirosław LACHOWICZ i Dariusz WRZOSEK, Warszawa

Aproksymacje – XIV Szkoła Matematyki Poglądowej, Miętne, 27.01.–31.01.1995

Wstęp

W artykule przedstawiamy niektóre metody konstruowania modeli matematycznych i problemy, pojawiające się przy próbach zrozumienia relacji między różnymi modelami. Interesuje nas rola, którą myślenie matematyczne może spełniać w poszukiwaniu jedności wiedzy. Zagadnienia te wkraczają w trudne i jednocześnie podstawowe problemy filozoficzne. Nie jest jednak naszym celem przedstawienie pełnego przeglądu idei filozoficznych dotyczących podstaw nauki, gdyż przegląd taki, jak sądzimy, nie jest możliwy w ramach krótkiego artykułu.

W artykule pojawia się wiele cytatów. Nie zawsze podzielamy wyrażone w nich opinie, wydaje się nam jednak, że są one charakterystyczne dla współczesnego myślenia naukowców o nauce. Przedstawiamy kontrastujące ze sobą poglądy, ukazując jak daleki jest obecny stan wiedzy od pełnego opisania związku pomiędzy matematyką i rzeczywistością empiryczną.

Z przyjemnością dziękujemy naszemu koledze Grzegorzowi Łukaszewiczowi za wnikliwą krytykę pomocną przy opracowaniu ostatecznej wersji artykułu.

1. Jedność przyrody

Jedność wiedzy jest jednym z ideałów stale obecnych w myśleniu ludzkim. Wielu filozofów dochodziło do stwierdzenia, że „wiedzieć" oznacza „sprowadzić do jedności". W konsekwencji najwyższą formą wiedzy, ich zdaniem, powinno być ujęcie wszystkich zjawisk w jednym systemie. Ten system, z kolei, byłby tym doskonalszy im mniejsza byłaby liczba zasad leżących u jego podstaw. Ideałem najwyższym byłoby odzwierciedlenie świata zewnętrznego w systemie opartym na jednej zasadzie, nawet bardzo skomplikowanej. Poszukiwanie takiego systemu objawia się w różnych formach, na przykład poprzez postulat o absolutnej nadrzędności pewnej grupy zjawisk nad innymi, i w konsekwencji skoncentrowaniu wysiłku na osiągnięciu ścisłej unifikacji tych pierwszych w pewnej zamkniętej konwencji, przy założeniu, że unifikacja pozostałych albo nie ma istotnego znaczenia, albo jest wyprowadzalna z poprzedniej. Typowymi przykładami są „systemy świata", takie jak np. Laplace'a, które, opisując zjawiska typu mechanicznego, były traktowane przez zbyt entuzjastycznych interpretatorów jako ogólne modele całości świata.

Kilku czołowych fizyków o inklinacjach filozoficznych nawołuje do powrotu do założeń filozofii pitagorejsko – platońskiej i poszukiwania jedności nauki poprzez sprowadzenie wszystkiego co zachodzi w naturze – do praw fizyki, a tych z kolei – do struktur matematycznych. Z takim programem wystąpił laureat Nagrody Nobla z 1932, współtwórca mechaniki kwantowej (twórca zasady nieoznaczoności) W. Heisenberg ([He1], por. również [He2] i [He3]), a kontynuował jego uczeń (twórca wzoru na energię wiązania jąder atomowych, odkrywca tzw. cyklu węglowego) C. F. Weizsäcker ([We], por. również [OP]). Weizsäcker stwierdza: „ *Uważam, że jest możliwe, iż fizykę jako naukę podstawową da się zakończyć, tzn. wszystkie jej podstawowe prawa dadzą się odkryć,... . Fizyka wtedy znajdzie swe zakończenie, kiedy okaże się nauką strukturalistyczną o najprostszych elementach systemu, prostych i dających się empirycznie rozstrzygać alternatywach*". Przez naukę strukturalistyczną Weizsäcker rozumie matematykę. „*W ten oto sposób*" – jak zauważyli Olczyk i Przanowski w [OP] – „*fizyka ostateczna przekształca się u niego w specyficzny system dedukcyjny, w którym każde rozwiązanie ma swoją interpretację empiryczną*".

Należy jednak podkreślić, że – w przeciwieństwie do Weizsäckera – Heisenberg nie wierzył w możliwość „zakończenia fizyki".

Weryfikację teorii poprzez doświadczenie uważa Weizsäcker za nierozstrzygalną, gdyż każde doświadczenie musi być poprzedzone przyjęciem pewnej teorii. A zatem to nie doświadczenie powinno decydować o przyjęciu, lub odrzuceniu teorii, lecz prawa ogólne powinny być tak wiarygodne, jak doświadczenie (pogłębioną dyskusję tych poglądów oraz znaczenia pojęcia „doświadczenie" u Weizsäkera można znaleźć w [OP]).

„ *W. Heisenberg zwrócił uwagę na to, że rozwój fizyki dokonuje się w następujących po sobie „systemach zamkniętych", z których późniejsze zawierają wcześniejsze jako pewne przypadki graniczne. Szerszy system wiąże przy tym zjawiska, które dla węższego były nie powiązane, szerszy system jest bliższy ideału jedności fizyki*". „*Fizyka ponewtonowska tworzy na coraz wyższych stopniach abstrakcyjną jedność różnorodnych zjawisk. Elektrodynamika łączy elektryczność, magnetyzm i światło, teoria kwantów mechanikę i chemię, ogólna teoria względności strukturę przestrzeni i siłę ciężkości*". Heisenberg twierdził, że „*przyroda jest przecież matematycznie prosta*", co Weizsäcker uzupełnia : „*teorie stają się w zasadzie coraz prostsze*". W tym dopatruje się Weizsäcker przyszłych zrębów jedności fizyki. Jeżeli nawet te poglądy mogą wydać się nazbyt idealistyczne, to fakt, że są to przemyślenia jednych z najwybitniejszych postaci współczesnej fizyki powinien być znaczący dla matematyków.

Warto zaznaczyć, że zbliżony program tzw. redukcjonizmu w nauce próbuje się realizować wychodząc z przesłanek czysto materialistycznych, traktując fizykę, a dokładniej teorię cząstek elementarnych, jako teorię bazową wobec innych dziedzin nauki.

Poglądy te bezpośrednio wpisują się w klasyczne zagadnienie filozoficzne: dlaczego przyroda jest matematyczna. Zagadnienie to było dyskutowane m. in. w [F], [K] oraz [M]. Nie zamierzamy tutaj zajmować stanowiska w owej dyskusji, a jedynie nawiązać do „niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych".

2. Niepojęta skuteczność matematyki?

W roku 1960 Eugene Paul Wigner, wybitny fizyk amerykański pochodzenia węgierskiego (laureat nagrody Nobla z 1963 roku) opublikował artykuł [W] o znamiennym tytule: „Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych" (którego omówienie można znaleźć w [D], [B], por. także [M]).

Podstawową tezą Wignera jest, że „*przedziwna skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych jest czymś graniczącym z tajemnicą i że nie ma dla niej żadnego racjonalnego wyjaśnienia*". Matematykę traktuje Wigner jako naukę „*o zręcznych operacjach na pojęciach i regułach wymyślonych wyłącznie w tym celu*". Wigner przyznaje wprawdzie, że „*pojęcia matematyki elementarnej a zwłaszcza elementarnej geometrii zostały sformułowane, by opisać wielkości bezpośrednio podsuwane przez dostępny świat*". Stwierdza jednak, że „*to samo nie jest jednak prawdą, gdy chodzi o bardziej zaawansowane pojęcia, w szczególności te pojęcia, które grają tak ważną rolę w fizyce*". Większość zaawansowanych pojęć matematycznych, do których Wigner zalicza np. liczby zespolone, jest wymyślona w taki sposób, aby matematycy mogli na nich „*demonstrować swoją pomysłowość i zmysł formalnego piękna*". Jeżeli uzna się, że takie są właśnie podstawy działalności matematyka, to rzeczywiście „*trudno jest uniknąć wrażenia, że stajemy tu wobec cudu, zupełnie porównywalnego w swej uderzającej naturze z cudem polegającym na tym, że ludzki umysł może wiązać razem tysiące argumentów bez wpadania w sprzeczność, lub z dwoma cudami: istnieniem praw przyrody i zdolnością umysłu do ich przepowiadania*". Konkludując Wigner stwierdza „*Stosowanie języka matematyki do formułowania praw fizyki jest cudownym darem, którego ani nie rozumiemy, ani nań nie zasługujemy*".

Z poglądami Wignera można skontrastować poglądy zwolenników ewolucyjnej teorii poznania. Vollmer ([V], por. [Ku]) stwierdza: „*Nasz aparat poznawczy jest wynikiem ewolucji. Subiektywne struktury poznawcze pasują do świata, gdyż w czasie ewolucji powstały jako adaptacje do realnego świata*".

Wśród matematyków można znaleźć zwolenników idei, że matematyka jest rodzajem sztuki kreatywnej, jak muzyka, lub malarstwo, która istniałaby nawet bez żadnych zastosowań praktycznych. Logik i matematyk amerykański Halmos ([Hal], por. [B]) przyznaje, że matematyka – podobnie jak malarstwo – ma swoje źródła w świecie realnym, ale *„malarz nie jest aparatem fotograficznym, a matematyk nie jest inżynierem"*.

Browder i McLane ([BM], por. [B]) polemizują z tezą Wignera (że matematyka jest jedynie formalną manipulacją symbolami) uznając ją za doktrynę formalistyczną w swej najbardziej wulgarnej postaci. *„W jaki sposób gra symboli bez istotnego znaczenia mogłaby mieć jakąkolwiek relację z procesami świata fizycznego?"* – pytają matematycy amerykańscy. *„Z uwagi na swoje źródło i swoją naturę* – dodają – *matematyka nie jest w niepojęty sposób skuteczna, lecz jest po prostu skuteczna w sposób racjonalny"*.

3. Modele matematyczne

Pojęcie modelu matematycznego w naukach przyrodniczych jest używane w różnych kontekstach. Czasem rozumiane jest ono bardzo ogólnie jako przyporządkowanie obiektu matematycznego (np. układu równań różniczkowych) wyodrębnionej klasie obiektów lub procesów przyrodniczych. W tym rozumieniu pojęcie modelu matematycznego zbliża się do pojęcia teorii zmatematyzowanej związanej z pewnym obiektem matematycznym (najczęściej równaniem), np. równanie Newtona i mechanika klasyczna lub równanie Schrödingera i mechanika kwantowa.

W węższym sensie przez model matematyczny rozumie się strukturę matematyczną odnoszącą się do konkretnego zjawiska przyrodniczego skonstruowaną specjalnie dla wyjaśnienia tego zjawiska, i najczęściej będącą efektem przyjęcia dodatkowych założeń wykraczających poza grunt teorii podstawowych. Przyjmijmy za R.Aris [A] następujące określenie:

Model matematyczny jest dowolnym, pełnym i niesprzecznym układem równań matematycznych, mających odpowiadać jakiejś wielkości, jego prototypowi. Ten prototyp może być wielkością fizyczną, biologiczną, społeczną, psychologiczną czy pojęciową, a nawet innym modelem matematycznym.

Dodajmy, że czasami zamiast równań modelami mogą być bardziej skomplikowane struktury matematyczne.

Skonstruowanie modelu matematycznego zwykle jest poprzedzone rozumowaniem heurystycznym, którego celem jest wyodrębnienie cech (wielkości) istotnych dla przebiegu danego zjawiska, ustalenie, jakie istniejące teorie podstawowe obejmują to zjawisko oraz które spośród parametrów i zmiennych są mierzalne empirycznie i przez to mogą służyć do weryfikacji modelu. Na to składać się mogą rozważania czysto teoretyczne, ale także eksperymenty, w tym symulacje numeryczne. Efektem końcowym winien być jakiś dobrze określony, przynajmniej z formalnego punktu widzenia, obiekt matematyczny (np. liczba niewiadomych winna odpowiadać liczbie równań).

Warto tu podkreślić, że ów model matematyczny nie powstaje w sposób indukcyjny z faktów empirycznych. Jest on pewną hipotezą wypracowaną w wyniku spekulacji, a nawet odgadywania. Powinien być jednak tak skonstruowany, by umożliwiał poddanie się testom ukierunkowanym na jego odrzucenie. Według powszechnie dziś uznawanych kryteriów metodologicznych Karla Poppera [P] model bądź teoria, po przejściu takiego testu, zyskują pewien stopień wiarygodności i można je uważać za czasowo ustalone, ale nigdy za dowiedzione. Dodajmy, że źródeł takiej metodologii można doszukać się u Archimedesa (por. [Hl]), u którego daje się dostrzec następujący schemat postępowania:

- obserwacje oraz pomiary różnych wielkości,
- konstrukcja myślowa, czyli model matematyczny,
- porównanie z wynikami pomiarów.

Konstruując model powinno być się, przynajmniej wstępnie, przekonanym, że odpowiednie zagadnienie matematyczne ma rozwiązanie. Według klasycznego i zarazem rygorystycznego kryterium Hadamarda model matematyczny będący układem równań różniczkowych winien spełniać trzy warunki (tzw. poprawność modelu w sensie Hadamarda [H]), które bynajmniej nie są weryfikacją modelu, a jedynie pewnym jego kryterium dopuszczalności:

i) istnienie rozwiązań,

ii) jednoznaczność rozwiązań,

iii) stabilność rozwiązań względem warunków początkowych i innych danych występujących w modelu.

Drugi warunek nawiązuje do postulatu determinizmu. W trzecim warunku chodzi między innymi o to, aby rozwiązania równań zależały w sposób ciągły od warunków początkowych. Wszelkie pomiary wielkości fizycznych obarczone są błędem, dlatego wymaga się, aby rozwiązania odpowiadające bliskim danym (w ramach błędu pomiarowego) różniły się nieznacznie w odniesieniu do ustalonego odcinka czasu.

Kryterium poprawności wg. Hadamarda wyznacza pewien kierunek badań matematycznych. Często zdarza się, że badane zagadnienie ma wiele rozwiązań (np. bifurkacje rozwiązań przy pewnych krytycznych wartościach parametrów). Może to być charakterystyczną cechą procesu (np. zjawiska typu histerezy), w innych przypadkach taka sytuacja zmusza do odpowiedzi na pytanie: jaki fizycznie sensowny warunek trzeba dodać do modelu, aby implikował on jednoznaczność rozwiązań.

Na tym etapie konstrukcji modelu przyrodnik powinien współpracować z matematykiem, by odpowiedni model był poprawnie sformułowanym zagadnieniem matematycznym.

Podstawowe trudności w formułowaniu modelu matematycznego polegają, z jednej strony, na wyborze właściwych (tj. mierzalnych) parametrów fizycznych i znalezieniu odpowiednich obiektów matematycznych, w zgodzie z ogólnymi teoriami, a z drugiej zaś, na dojściu do możliwie prostych struktur matematycznych. Celem przyjęcia postulatu prostoty jest otrzymanie takiego modelu matematycznego, co do którego można żywić nadzieję, że jego własności można badać na drodze analitycznej, lub na drodze przybliżania rozwiązania za pomocą efektywnych algorytmów numerycznych.

Trudno zatem stwierdzić, że przybliżamy się w takim procesie „do rzeczywistości", raczej, chcąc ją zrozumieć, oddalamy się od niej na tyle, by uchwycić istotę zjawisk i jednocześnie znaleźć prostą strukturę matematyczną dla ich opisu (por. Zakończenie).

Zwróćmy tu uwagę na niektóre strategie postępowania prowadzące do skonstruowania modelu matematycznego.

I. Równanie stanowiące model matematyczny może być wyprowadzone z równań odpowiedniej teorii podstawowej przez zastosowanie tzw. metody małego parametru (o której obszerniej piszemy w następnym paragrafie). W praktyce sprowadza się to do wyodrębnienia, w równaniach ogólnej teorii, członu poprzedzonego małym parametrem (wybór parametrów w równaniach ogólnej teorii np. stałych materiałowych „konkretyzuje" model ustalając relacje między parametrami) i przejściem z tym parametrem do zera. W konsekwencji otrzymujemy równania będące uproszczeniem wyjściowych. Przejście z małym parametrem do zera oznacza zaniedbanie jakiegoś oddziaływania bądź efektu w sytuacji, gdy spodziewamy się, że mają one nikły wpływ na przebieg modelowanego zjawiska.

Przykład 3.1. Nawet najprostsze procesy biologiczne charakteryzuje udział wielu czynników bezpośrednio oddziałujących ze sobą. Analiza tak skomplikowanych układów jest praktycznie niemożliwa i dlatego istotną rolę spełniają metody pozwalające uprościć zagadnienie. Może to się odbywać (por. [CRS]) poprzez wyodrębnienie czynników zmieniających się bardzo wolno oraz bardzo szybko w stosunku do zmian tych czynników, które uznamy za „bazowe". Tego typu postępowanie prowadzi do redukcji wyjściowego układu do pewnego uproszczonego układu przybliżającego dany układ. Przybliżenie realizuje się poprzez odpowiednie przejście graniczne parametrów charakteryzujących szybkości zmian poszczególnych czynników (por. [C, CRS, Om]). W efekcie otrzymujemy opis dynamiki czynników „bazowych", przy założeniu, że zmienność czynników powolnych można zaniedbać, a czynniki szybkie osiągnęły stan równowagi. Tego typu uproszczenia stosuje się efektywnie przy opisie reakcji enzymatycznych (por. [CRS]).

Warto tu dodać, że udowodnienie zbieżności rozwiązań równań teorii do rozwiązań nowego modelu, gdy mały parametr zbiega do zera, nastręcza zwykle wiele poważnych trudności matematycznych (por. przykłady 5.5, 5.6, 5.7). Mimo to model powstały w wyniku tej procedury zwykle uznaje się za dobrze ugruntowany.

II. Często zdarza się, że nie znamy adekwatnej teorii podstawowej, bądź nie jest ona w dostatecznym stopniu zmatematyzowana. Taka sytuacja ma miejsce, na przykład, w naukach biologicznych, medycznych i społecznych, a ogólnie występuje wtedy, gdy mamy do czynienia ze zjawiskami złożonymi, na których przebieg wpływa wiele czynników różnego typu, trudnych do jednoczesnego uchwycenia. Wtedy model matematyczny musi być skonstruowany niejako od „samego początku".

Wyodrębnia się wtedy pewne elementy badanego układu i ich pewne cechy, które wydają się najistotniejsze. Celem modelu matematycznego jest wtedy wyrażenie, za pomocą terminów matematycznych, odziaływań między elementami układu oraz ewentualnie odziaływań elementów układu z otoczeniem.

Takie modele najczęściej nie są weryfikowalne ilościowo, tzn. różnica między wartością rozwiązania i danymi empirycznymi może być bardzo duża. Można wtedy mówić o weryfikacji jakościowej, tzn. porównywać pewne cechy jakościowe rozwiązań (np. istnienie orbit okresowych dla układu równań różniczkowych) z pewnymi cechami charakterystycznymi danych empirycznych lub obserwacyjnych. Rolą modelu matematycznego jest tu zwrócenie uwagi na pewne zależności między elementami badanego układu, które są niedostrzegalne na poziomie czysto opisowym. Model matematyczny może zatem pogłębić rozumienie danego zjawiska i zasugerować kierunek dalszych badań.

III. Ostatnio coraz częściej przy konstruowaniu modeli matematycznych stosuje się symulacje komputerowe i tzw. eksperymenty numeryczne, wykorzystujące metody grafiki komputerowej. Często, zanim odpowie się na pytanie, czy istnieje rozwiązanie odpowiedniego problemu (i jakie ma własności jakościowe), implementuje się schemat numeryczny przybliżający „spodziewane" rozwiązanie zagadnienia wyjściowego próbując określić, czy własności rozwiązania numerycznego odzwierciedlają efekty znane z empirii. Niejednokrotnie jest wielką sztuką oddzielenie efektów czysto numerycznych (związanych, na przykład, z kumulacją błędów zaokrągleń) od spodziewanych własności rozwiązań.

Postępuje się tak nie wiedząc jeszcze, czy istnieje rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia i czy dany schemat numeryczny jest zbieżny do rozwiązania. Schemat numeryczny winien jednak spełniać pewne kryteria poprawności (tzw. konsystentność i numeryczna stabilność).

Model matematyczny, który „przejdzie" przez tego typu wstępny test, uważa się za dopuszczalny i staje się on obiektem badań dla matematyków.

Warto podkreślić, że modelowanie matematyczne jest niewyczerpanym źródłem zagadnień matematycznych, często wykraczających poza sferę tzw. matematyki stosowanej, a więc, przynajmniej w zamierzeniu, utylitarnej. Bardzo często bywa tak, że zagadnienia powstałe na tym gruncie „odrywają się od rzeczywistości" stając się przedmiotem badań czysto matematycznych.

Są dziedziny matematyki, które trudno sobie wyobrazić w obecnej postaci bez tego stałego źródła inspiracji np. teoria układów dynamicznych, teoria równań cząstkowych, analiza nieliniowa czy teoria procesów stochastycznych, by wymienić tylko niektóre.

Przykład 3.2. Elementami układu (np. ekosystemu) mogą być wybrane populacje pewnych gatunków zamieszkujące na danym terenie, wybraną cechą może być liczebność populacji, rozkład wiekowy itp. Odziaływanie między populacjami może być antagonistyczne (typu drapieżnik-ofiara), konkurencyjne (współzawodnictwo o dostęp do zasobów pokarmowych) bądź kooperatywne (symbioza). Każde z tych oddziaływań prowadzi oczywiście do różnych funkcji opisujących tempa zmian liczebności populacji.

Przedstawimy przykład rozumowania prowadzącego do skonstruowania stosunkowo prostego modelu matematycznego opisującego zmianę liczebności populacji ofiar i drapieżników.

Chcemy opisać zmiany liczebności dwóch populacji antagonistycznych uwzględniając jedynie odziaływanie między tymi populacjami i pewne cechy demograficzne każdej populacji z osobna.

Oto główne założenia, prowadzące do konstrukcji modelu matematycznego.

(Z1) Ograniczamy rozważania do dwóch populacji dokonując tym samym wyboru dwóch elementów z całego ekosystemu. Taka redukcja jest uzasadniona, jeśli liczebność populacji ofiar jest kontrolowana głównie przez populację drapieżnika i jeżeli dominującym składnikiem pożywienia drapieżnika są osobniki z populacji ofiar (mają najistotniejszy wpływ na przyrost biomasy). Obserwacje pozwalają stosunkowo dokładnie rozpoznać główne składniki „menu" każdego gatunku.

(Z2) Populacje rozmnażają się w sposób ciągły tak, że osobniki z różnych pokoleń współegzystują w pewnym przedziale czasu. Uprawniony jest zatem model z czasem ciągłym.

(Z3) Osobniki obu populacji zamieszkują na określonym terenie, którego nie opuszczają (nie uwzględniamy migracji). Rozmieszczenie osobników na tym terenie jest równomierne. Nie uwzględniamy przestrzennego rozkładu ich występowania.

(Z4) Populacja drapieżnika natychmiast „odpowiada" na wzrost liczebności ofiar. Innymi słowy, pomijamy efekt opóźnienia (w czasie) pomiędzy wzrostem liczebności ofiar i reakcją (w postaci wzrostu przeżywalności potomstwa) populacji drapieżnika. Na przykład, niektóre drobne ssaki mają tak duże tempo reprodukcji, że reagują na wzrost liczby ofiar jeszcze w tym samym sezonie (por. [Ho]).

(Z5) Wśród osobników populacji ofiar ma miejsce konkurencja o ograniczone zasoby pokarmowe. Powoduje ona ograniczenie tempa wzrostu liczebności ofiar do pewnej wartości, a potem jej spadek do zera. Nie uwzględniamy konkurencji wśród drapieżników. Często zdarza się, że drapieżniki żyją w populacjach na tyle rozrzedzonych, że bezpośredni wpływ wzajemny poszczególnych osobników jest pomijalnie mały.

(Z6) Osobniki rozważanych populacji są dostosowane do stałego środowiska, w którym żyją. Nie uwzględniamy tu wpływu procesów ewolucyjnych, których przebieg jest zdecydowanie wolniejszy w stosunku do tempa zmian liczebności badanych populacji. Pozwala to przyjąć, że parametry charakteryzujące cechy gatunkowe (np. wydajność układu pokarmowego, średnia liczba potomstwa itp.) są niezmienne w interesującej nas skali czasu (por. Przykład 3.1).

Niech zatem $V(t)$ oznacza gęstość populacji ofiar (tj. średnią liczbę osobników przypadającą na jednostkę powierzchni) w chwili t, a $P(t)$ gęstość populacji drapieżnika.

Sformułujemy równania opisujące zmianę P oraz V w czasie. Przyrost populacji ofiar ΔV i drapieżnika ΔP w przedziale czasu Δt jest wywołany dwoma czynnikami: „wewnętrznym" tempem wzrostu każdej z tych populacji oraz efektem oddziaływania między nimi. Otrzymujemy zatem:

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= R_1(V)\Delta t - F_1(V)P\Delta t\,, \\
\Delta P &= R_2(P)\Delta t + F_2(V,P)\Delta t\,,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

gdzie:

$R_1(V)\,, R_2(P)$ – tempa wzrostu populacji ofiar i drapieżnika, odpowiednio, związane z cechami demograficznymi i środowiskowymi, określone przy założeniu braku oddziaływania między populacjami;

$F_1(V)$ – odpowiedź drapieżnika na wzrost liczby ofiar określająca średnią liczbę osobników populacji ofiar konsumowaną przez jednego drapieżnika w jednostce czasu;

$F_2(V,P)$ – przyrost populacji drapieżników wywołany przez konsumpcję ofiar.

Dzieląc każde z równań przez Δt i przyjmując, że wszystkie występujące w równaniach funkcje są różniczkowalne, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= R_1(V) - F_1(V)P\,, \\
\frac{dP}{dt} &= R_2(P) - F_2(V,P)\,.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

W ramach takiego opisu można uwzględnić różne modele szczegółowe, poprzez nadanie funkcjom występującym w (3.2) konkretnej postaci. Przyjmijmy zatem zgodnie z założeniem **Z5** , że

$$
R_1(V) = rV\left(1 - \frac{V}{k}\right) \quad \text{oraz} \quad R_2(P) = -dP\,,
\tag{3.3}
$$

gdzie r jest współczynnikiem rozrodczości ofiar, d – współczynnikiem śmiertelności populacji drapieżnika, a k określa tzw. pojemność środowiska wyrażoną jako „stabilną"wartość gęstości populacji mogącej egzystować w danej niszy ekologicznej. Zauważmy, że wtedy $R_1(k) = 0$. Powyższa postać funkcji R_1 została zaproponowana przez Verhulsta, a określa ona tzw. logistyczny wzrost populacji.

Uwzględnia się różne typy funkcji odpowiedzi drapieżnika na wzrost liczby ofiar. W standardowym modelu Lotki-Volterry [Vo] przyjmuje się, że odpowiedź drapieżnika jest wprost proporcjonalna do gęstości populacji ofiar. Bardziej realistyczne wydaje się przyjęcie, że liczba ofiar konsumowana przez jednego drapieżnika, w jednostce czasu, nie przekracza pewnej liczby niezależnie od stopnia dostępności ofiar. Kształt funkcji odpowiedzi może być ustalony na podstawie obserwacji, bądź eksperymentów ([Ho]). Jeden z rozważanych typów odpowiedzi jest określony przez następujące warunki: F_1 jest funkcją ograniczoną, wklęsłą oraz $F_1(0) = 0$.

Uwzględniając **Z4**, przyjmujemy, że przyrost populacji drapieżników jest proporcjonalny do liczby ofiar zjadanych przez drapieżnika w jednostce czasu. Zatem

$$
F_2(V,P) = bF_1(V)P\,,
$$

gdzie b jest parametrem uwzględniającym „kaloryczność" pokarmu oraz wydajność układu pokarmowego drapieżnika.

Naszym celem było przedstawienie pewnych elementów konstrukcji modelu matematycznego. Przedstawienie dalszej analizy układu równań (3.2) przekracza ramy tego artykułu: zainteresowanych odsyłamy do [Wr].

Zwróćmy jednak uwagę na niektóre własności rozwiązań. Istnienie rozwiązań lokalnie w czasie i ich jednoznaczność wynika wprost z ogólnej teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Dalsza analiza wymaga zastosowania jakościowej teorii równań różniczkowych. Można udowodnić, że rozwiązania startujące z danych początkowych

$$V(0) = V_0, \quad P(0) = P_0 ,$$

gdzie $V_0 > 0$, $P_0 > 0$ są funkcjami ograniczonymi oraz

$$V(t) > 0, \quad P(t) > 0 \quad \text{dla} \quad t > 0 .$$

Dla pewnych wartości parametrów układ (3.2) ma trajektorie okresowe, a dokładniej tzw. cykle graniczne. Dodajmy, że problem liczby cykli granicznych dla tego typu układów nie jest do tej pory w pełni rozwiązany (por. [Wr]) i nawiązuje do drugiej części XVI problemu Hilberta, dotyczącego liczby cykli granicznych dla układów dwóch równań różniczkowych zwyczajnych o prawych stronach wielomianowych (por. [Ż]).

Znane są dane obserwacyjne świadczące o okresowym wahaniu liczebności populacji ofiar i drapieżnika [U]. Analiza modelu matematycznego wskazuje tu między innymi, że wahania liczebności populacji dają się wyjaśnić, gdy weźmie się pod uwagę jedynie oddziaływania między osobnikami obu populacji, bez konieczności uwzględniania dodatkowego trzeciego czynnika „wymuszającego" te wahania.

Omówiony model mieści się w nurcie klasycznej ekologii matematycznej. Zainteresowanego Czytelnika możemy odesłać do książki [U], gdzie można znaleźć krytyczny przegląd tego typu modeli.

W przypadku modeli uwzględniających odziaływanie większej od dwóch liczby populacji pełna analiza modelu staje się bardzo trudna i prowadzi do zaawansowanych zagadnień z zakresu teorii układów dynamicznych (np. istnienie zbiorów niezmienniczych, dziwnych atraktorów itp.).

Na zakończenie naszych rozważań o modelach zacytujmy, z książki „Świat Matematyki" [DH], nieco krytyczną opinię o epistemologicznej roli modeli matematycznych:

„... wszystko to doprowadziło do pragmatycznego uznania modelu jako „rzeczy chwilowej", bardziej dogodnego przybliżenia stanu rzeczy niż wyrażanie odwiecznej prawdy. Model może być uznawany za dobry lub zły, prosty lub skomplikowany, estetyczny lub okropny, użyteczny lub bezużyteczny, w mniejszym natomiast stopniu jako „prawdziwy" lub „fałszywy"."

4. Jedność jako harmonia w wielości

Dla danego zjawiska przyrodniczego może istnieć kilka teorii (modeli) opisujących jego przebieg. Szczególnie często jest tak w fizyce, gdzie funkcjonuje wiele różnych równań będących modelami matematycznymi podstawowych zjawisk z, lepiej lub gorzej, określonymi zakresami stosowalności. Wybór modelu, właściwego dla danego zjawiska, częstokroć jest jedynie intuicyjny, a zawsze jest kompromisem między prostotą opisu i ujęciem podstawowych własności danego zjawiska (por. Rozdział 3).

Jednakże skuteczność matematycznego modelowania przejawia się również w tym, że modele, wybrane w tak mało precyzyjny sposób, opisują aspekty danego zjawiska nawet dość odległe od tych, które stanowiły kryterium wyboru opisu. Zatem równania określające model wykraczają poza informacje w nie włożone (por. [M] – str. 2): „równania są mądrzejsze niż ci, którzy je pisali" (Hertz).

Pierwszy krok ku jedności wiedzy mógłby polegać na dążeniu do skonstruowania „gęstej" struktury teorii i modeli, o dobrze sprecyzowanych relacjach pomiędzy nimi, z określoną klasyfikacją pozwalającą dla danego zjawiska stwierdzić, w ramach jakich teorii możliwy jest opis poszczególnych jego aspektów. Zatem dochodzenie do jedności przyrody może być realizowane poprzez poszukiwanie jedności opisu świata. Tym bardziej wiedza o świecie będzie wiarygodna, im wyraźniej będą widoczne relacje między różnymi opisami.

Rolę matematyka w tym procesie widzielibyśmy w szukaniu matematycznych związków między rozwiązaniami równań odpowiadających różnym teoriom, lub różnym modelom, opisującym to samo zjawisko przyrodnicze.

Pozostaje jednak pytanie: jak realizować taki program. Oczywiście, trudno oczekiwać jednoznacznej odpowiedzi. Wydaje się jednak, że dużą rolę powinna tu odegrać teoria zaburzeń (w tym zaburzeń osobliwych) omówiona w następnym rozdziale.

5. Osobliwe zaburzenia

Relacje między dwoma, w jakimś sensie „przystającymi" modelami (bądź teoriami) można badać w ten sposób, by w ramach jednego z tych modeli wyodrębnić pewien parametr, mający sens fizyczny i taki, że graniczne przejście tego parametru do pewej krytycznej wartości, oznacza przejście od jednego modelu do drugiego.

Podajmy kilka przykładów.

Przykład 5.1. Rozważmy mechanikę klasyczną i mechanikę relatywistyczną. W tej drugiej wyodrębnijmy parametr $\gamma > 0$ określający stosunek charakterystycznej prędkości zjawiska do prędkości światła. Przejście graniczne $\gamma \longrightarrow 0$ oznacza „przejście od mechaniki relatywistycznej do mechaniki klasycznej".

Przykład 5.2. Rozważmy mechanikę klasyczną i mechanikę kwantowa. Przejście $\mathbf{H} \longrightarrow 0$, gdzie $\mathbf{H}$ jest stosunkiem stałej Plancka do charakterystycznej wielkości momentu pędu, oznacza „przejście od mechaniki kwantowej do mechaniki klasycznej".

Przykład 5.3. Rozważmy teorię płynu nielepkiego i teorię płynu lepkiego. Jeżeli $\mathbf{Re}$ jest tak zwaną liczbą Reynoldsa, tzn. bezwymiarowym parametrem, którego odwrotność określa „rozmiar lepkości", to przejście $\mathbf{Re} \longrightarrow +\infty$ oznacza „przejście od teorii płynu lepkiego do teorii płynu nielepkiego".

Przykład 5.4. Rozważmy opis materii „na poziomie makroskopowym" w ramach teorii ośrodka ciągłego oraz opis „mikroskopowy" w ramach teorii kinetycznej. Jeżeli $\mathbf{Kn}$ jest tzw. liczbą Knudsena, tzn. bezwymiarowym parametrem określającym „rozmiar drogi, jaką cząstka przebywa średnio między kolejnymi zderzeniami", to przejście $\mathbf{Kn} \longrightarrow 0$ oznacza „przejście od opisu mikroskopowego do opisu makroskopowego".

W matematycznym sformułowaniu powyższe zagadnienia sprowadzają się do badania zachowania rozwiązań równania modelowego, gdy pewien parametr, zawarty w owym równaniu, zbiega do swojej krytycznej wartości. Można oczywiście przyjąć, że tą krytyczną wartością jest 0, i rozważać „zagadnienie z małym parametrem". W większości przypadków tego typu zagadnienia prowadzą do trudnych problemów teorii osobliwych zaburzeń (por. [Om]). Trudności związane są ze zmianą typu równania. Mogą pojawić się efekty warstwy początkowej, warstwy brzegowej i fal uderzeniowych, których ważność w matematyce dorównuje ważności odpowiednich efektów w przyrodoznawstwie. Przykłady tego typu zagadnień podamy poniżej.

Teoria osobliwych zaburzeń narodziła się na III Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Heidelbergu w 1904 roku, a jej ojcem był L. Prandtl, który zaprezentował odczyt „O ruchu płynów z małym tarciem" [Pr]. Prandtl zbudował teorię warstwy brzegowej dla przepływu płynu o małej lepkości (por. Przykład 5.3).

Dużym impulsem dla rozwoju teorii osobliwych zaburzeń była praca D. Hilberta [Hi], który badał operatory pojawiające się w teorii kinetycznej jako przykłady operatorów całkowych. Pracą tą Hilbert rozpoczął badanie związków między opisem mikroskopowym a makroskopowym (patrz Przykład 5.4) dokonując niewątpliwie przełomu w fizyce. Pokazuje to, że nie tylko *„fizyka, która przy badaniu przyrody sama szeroko korzysta z poznanych metod* *i środków matematycznych, „odwdzięcza się" matematyce stawianiem nowych problemów matematycznych, które po „edukacji" matematycznej mogą być efektywnie wykorzystane do rozwiązywania zagadnień fizycznych*" ([S]), ale sama matematyka (albo przynajmniej matematycy) może powodować przełomy w fizyce.

Rozważmy dwa przykłady ilustrujące zjawiska pojawiające się w teorii osobliwych zaburzeń.

Przykład 5.5. Warstwa początkowa. Rozpatrzmy dwa równania opisujące zachowanie się pewnej wielkości x w czasie t:

$$x = 1 \tag{5.1}$$

oraz

$$\varepsilon \dot{x} + x = 1 , \tag{5.2}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest małym parametrem. Przejście $\varepsilon \longrightarrow 0$ oznacza przejście od „teorii" (5.2) do „teorii" (5.1) (umówmy się, że nie zauważamy trywialności naszych teorii).

Równanie (5.2) uzupełniamy o warunek początkowy

$$x\big|_{t=0} = x_0 , \tag{5.3}$$

gdzie x_0 jest zadanym początkowym ($t = 0$) stanem wielkości x.

Jedynym rozwiązaniem zagadnienia (5.2-5.3) jest funkcja

$$x_\varepsilon(t) = 1 + (x_0 - 1)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \tag{5.4}$$

dla $t > 0$. Zauważmy, że dla każdego $t > 0$ mamy

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} x_\varepsilon(t) = 1.$$

Dla $x_0 \neq 1$ mamy

$$\begin{tikzcd} x_\varepsilon(t) \arrow[rr, "\varepsilon \to 0"] \arrow[d, "t \to 0"'] & & 1 \\ x_0 & & \end{tikzcd}$$

To pokazuje, że zbieżność $\varepsilon \longrightarrow 0$ nie jest jednostajna w żadnym (prawostronnym) otoczeniu $t = 0$. Tego typu zachowanie nazywa się warstwą początkową i wiąże się z nim pewne otoczenie (prawostronne) $t = 0$, również nazywane warstwą początkową. Zauważmy, że rozwiązanie zagadnienia (5.2-5.3) jest sumą funkcji (tu: stałej) zmiennej czasowej t i funkcji „rozciągniętej zmiennej czasowej" $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ (która to funkcja znika, gdy $\tau \longrightarrow \infty$). Ta pierwsza funkcja $X_\varepsilon(t) = 1$ przedstawia tzw. rozwiązanie zewnętrzne (odpowiadające „teorii" (5.1)), podczas gdy druga jest poprawką w warstwie początkowej, opisującą niejednostajny charakter zbieżności w pobliżu $t = 0$.

Przejście z „teorii" (5.2) do „teorii" (5.1) jest zatem możliwe dla t dostatecznie dużych w porównaniu z ε.

Przykład 5.6. Warstwa brzegowa, fala uderzeniowa.

Rozważmy następujące równanie

$$\varepsilon u'' + uu' = 0, \ u = u(r), \ 0 \leq r \leq 1 . \tag{5.5}$$

Jest to stacjonarne równanie Burgersa (uproszczenie równania Naviera–Stokesa opisującego ruch lepkiej cieczy nieściśliwej), $u(r)$ można interpretować jako prędkość cieczy w punkcie r, natomiast $\varepsilon > 0$ odpowiada lepkości. Przejście $\varepsilon \longrightarrow 0$ jest analogiem przejścia do przepływu nielepkiego (por. Przykład 5.3).

Graniczne równanie

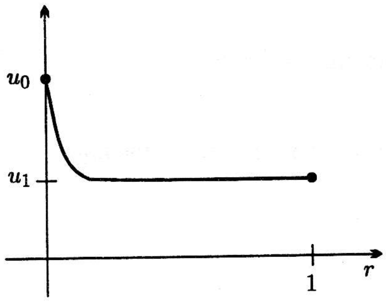
$$uu' = 0$$

sugeruje, że graniczne rozwiązanie powinno być stałe. Uzupełnijmy równanie

(5.5) warunkami brzegowymi:

$$u\Big|_{r=0} = u_0\,, \qquad u\Big|_{r=1} = u_1\,. \tag{5.6}$$

Rozważmy teraz trzy przypadki.



Rys. 1

1. Niech $u_1 > 0$ oraz $u_0 > -u_1$.

Rozwiązania poszukujemy w postaci

$$u_\varepsilon(r) = u_1 + v\left(\frac{r}{\varepsilon}\right),$$

tzn. w postaci sumy rozwiązania zewnętrznego i poprawki w warstwie brzegowej w pobliżu $r = 0$, przy czym

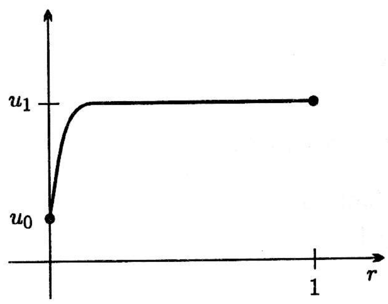
$$\lim_{\varepsilon\to 0} v\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) = 0\,.$$

dla każdego $r \in (0,1]$. Z postaci funkcji v można zauważyć (por. [Om]), że v maleje monotonicznie do 0, gdy

$$u_0 > u_1 \qquad \text{(rys. 1)}$$

oraz rośnie monotonicznie do 0, gdy

$$-u_1 < u_0 < u_1 \qquad \text{(rys. 2)}.$$



Rys. 2

Natomiast jeżeli $u_0 < -u_1$, to v staje się nieskończone w skończonym czasie.

2. Analogicznie dla $u_0 < 0$, $u_1 < -u_0$ rozwiązania poszukujemy w postaci

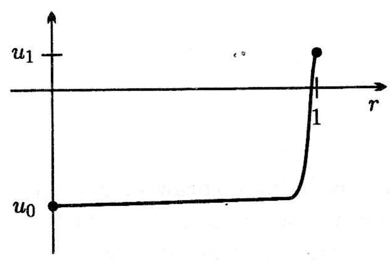
$$u_\varepsilon(r) = u_0 + w\left(\frac{1-r}{\varepsilon}\right),$$

gdzie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w\left(\frac{1-r}{\varepsilon}\right) = 0$$

dla każdego $r \in [0,1)$. Rozwiązanie ma zatem postać jak na rysunku 3.

Oba przypadki 1 i 2 odpowiadają pojawieniu się warstw brzegowych w pobliżu $r = 0$ i $r = 1$, odpowiednio.



Rys. 3

3. Niech teraz $u_0 = -u_1 < 0$.

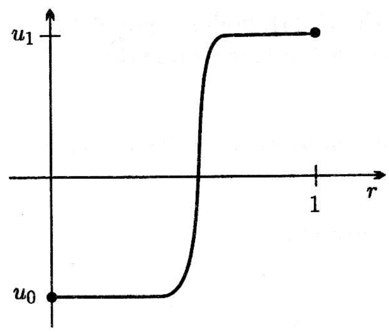
Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$u_\varepsilon(r) = U(\varrho)\,, \quad \text{gdzie } \varrho = \frac{t-\frac{1}{2}}{\varepsilon}$$

oraz

$$\lim_{\varrho\to-\infty} U(\varrho) = u_0\,, \quad U(0) = 0, \quad \lim_{\varrho\to\infty} U(\varrho) = u_1\,.$$

Rozwiązanie ma postać z rysunku 4 i przedstawia pojawienie się fali uderzeniowej w $r = \frac{1}{2}$.



Rys. 4

Zakończenie

Nasze rozważania zakończmy poetycką wizją związku pomiędzy światem realnym i matematyką z „Wszystko jest poezją" E. Stachury [St]. *„Jeżeli optymalnym opisem naukowym jest znak matematyczny, a nauka poprzez uogólnienie zdąża do opisywania zjawisk w formie najprostszej i, stale wiążąc nowymi relacjami różne dziedziny, zagęszcza swoją strukturę – to można sobie wyobrazić naukę przyszłości jako punkt o skomplikowanym ruchomym wnętrzu. Wnętrze tego punktu coraz bardziej się komplikuje i coraz bardziej zagęszcza. Sam punkt, zawierając w sobie jakiś obraz świata, jest w stosunku do świata przesunięty. Ostrość tego obrazu jest słaba, choć trudno to stwierdzić, ponieważ nie znamy innego intelektualnego obrazu świata. Można również nazwać naukę zamglonym okiem świata"*.

Literatura

[A] R. Aris, *Mathematical modelling techniques*, Pitman, San Francisco 1978.

[B] U. Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, UTET Libreria, Torino 1989.

[BM] F. E. Browder i S. MacLane, *The relevance of mathematics*, w *Mathematics today*, pod redakcją L.A. Steen, Springer, New York 1978, 323–350.

[C] J. Cronin, *Electrically active cells and singular perturbation theory*, Math. Intelligencer **12**(4), 1990, 57–64.

[CRS] D. S. Czernawski, J.M. Romanowski i N.W. Stiepanowa, *Co to jest biofizyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1974.

[D] J. Dembek, *Komentarz do artykułu Wignera*, w *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* **XIII**, Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych, Kraków 1991, 19–21.

[DH] Ph. J. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki*, PWN, Warszawa 1987.

[F] *Filozofować w kontekście nauki*, pod redakcja M. Hellera, A. Michalik i J. Życińskiego, Polskie Towarzystwo Teologiczne, Kraków 1987.

[H] J. Hadamard, *Théorie des equations aux derivées partielles*, Ed. Sc., Pekin 1964.

[Ha1] P. R. Halmos, *Mathematics as a creative art*, American Scientist **56**, 1968, 375–389.

[Ha2] P. R. Halmos, *Applied mathematics is bad mathematics*, w *Mathematics tomorrow*, pod redakcją L.A. Steen, Springer, New York 1981.

[He1] W. Heisenberg, *Fizyka a filozofia*, Warszawa 1965.

[He2] W. Heisenberg, *Physics and beyond. Encounters and conversations*, New York.

[He3] W. Heisenberg, *Część i całość*, PIW, Warszawa 1987.

[Hi] D. Hilbert, *Begründung der kinetischen Gastheorie*, Math. Ann. **72**, 1912, 562–577.

[Hl] M. Heller, *Nowa fizyka, nowa teologia*, Biblos, Tarnów 1992.

[Ho] C. S. Holling, *The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pine sawly*, Can. Entomol. **91**, 1959, 293–320.

[K] W. Krajewski, *Platonizm, czy jednak materializm?*, Studia Filozoficzne **11**, 1988, 3–13.

[Ku] W. J. Kunicki-Goldfinger, *Szukanie możliwości*, PWN, Warszawa 1989.

[M] *Matematyczność przyrody*, pod redakcja M. Hellera, J. Życińskiego i A. Michalik, Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych przy Wydziale Filozofii Papieskiej Akademii Teologicznej, Kraków 1992.

[OP] S. Olczyk i M. Przanowski, *Fizyka jako filozofia: przypadek Carla Friedricha von Weizsäckera*, w *Wizje człowieka i społeczeństwa w teoriach i badaniach naukowych*, PWN, Warszawa 1984, 229–252.

[Om] R. O'Malley, Jr., *Singular perturbation methods for ODE*, Springer, New York 1991.

[P] K. Popper, *Wiedza obiektywna. Ewolucyjna teoria epistemologiczna*, PWN, Warszawa 1992.

[Pr] L. Prandtl, *Über Flüssigkeits – bewegung bei kleiner Reibung*, Verhandlungen, III Int. Math. Kongresses, Tuebner, Leipzig 1905, 484–491.

[S] E. T. Sokołow, *Centaur, czyli jak matematyka pomaga fizyce*, PWN, Warszawa 1987.

[St] E. Stachura, *Wszystko jest poezją*, PIW, Warszawa 1975.

[U] J. Uchmański, *Klasyczna ekologia matematyczna*, PWN, Warszawa 1992.

[V] G. Vollmer, *Evolutionare Erkenntnisstheorie*, Hirzel, Stuttgart 1980.

[Vo] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier–Villars, Paris 1931.

[W] E. Wigner, *The unreasonable effectivness of Mathematics in the Natural Sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 1960, 1–14 (polskie tłumaczenie: w *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* **XIII**, Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych, Kraków 1991, 5–18).

[We] C. F. von Weizsäcker, *Jedność przyrody*, PIW, Warszawa 1978.

[Wr] D. Wrzosek, *Limit cycles in predator–prey models* , Math. Biosc. **98**, 1990, 1–12.

[Ż] H. Żołądek, *Druga część XVI-tego problemu Hilberta*, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie **14**, 1995, WSRP Siedlce, 26–30.