Spór o umiejętności matematyczne Samuela Pepysa

Mieczysław KARPINIEC, Kielce

Wielka Encyklopedia Powszechna PWN podaje: Pepys (pi:ps) Samuel ur. 23 II 1633, zm. 26 V 1703, pamiętnikarz angielski; syn londyńskiego krawca, dzięki koligacjom i zdolnościom organizacyjnym osiągnął wysokie stanowisko w administracji państwowej (m.in. jako sekretarz Admiralicji 1672–79 i 1684–89 reorganizował flotę brytyjską); prowadzony 1660–69, czyli w pierwszym dziesięcioleciu restauracji, dziennik Pepysa (wydanie 1. 1825, wydanie pełne: Diary, t. 1–10 1893–99, wydanie polskie w wyborze i przekładzie M. Dąbrowskiej „Dziennik Samuela Pepysa" 1952) stanowi ogromnej wartości dokument obyczajowo-historyczny; Pepys jest aktywnym uczestnikiem życia publicznego, relacjonuje i opiniuje zmiany wiążące się z powrotem Stuartów, opisuje m.in. epidemię dżumy i wielki pożar w Londynie, jest bywalcem teatrów, miłośnikiem muzyki i książek, szczerym kronikarzem swej kariery i spraw osobistych, dzięki czemu dzieło jego tworzy bogaty obraz życia i umysłowości ówczesnego mieszczaństwa angielskiego.

Maria Dąbrowska

Samuel Pepys
Reprodukcja portretu pędzla
Johna Halesa

Hugo Steinhauss

Fotografie: z „Dzienników" Marii Dąbrowskiej, tom 4, i z „Dziennika Samuela Pepysa", tom 1.

W swych „Dziennikach" [1] Maria Dąbrowska, pod datą „Wrocław 20.VI.1953 Sobota", tak zanotowała wizytę prof. Hugona Steinhausa: „Nad wieczorem przyjechał prof. Steinhaus. Przybył specjalnie do mnie taksówką, aby omówić ze mną „korektę błędów" w „Dzienniku Pepysa", a m.in., by się jeszcze prawować o nieszczęsną tabliczkę mnożenia. Trzy osoby zakwestionowały, że Pepys mógł nie znać i uczył się tabliczki mnożenia: Kott, Steinhaus i Zimińska. I żadne argumenty nie są ich w stanie przekonać. Ani to, że „table of multiplication" znaczy „tabliczka mnożenia"; ani że nie było wówczas średniego wykształcenia równomiernie ogólnokształcącego i człowiek wychowany na filologii i filozofii mógł nie umieć tabliczki mnożenia; ani że mimo nieznajomości tabliczki mnożenia Pepys mógł robić wielkie transakcje handlowe. Ludzkość od wieków dokonywała transakcji handlowych i dokonywali ich ludzie nie znający nie tylko tabliczki mnożenia, ale nawet sztuki czytania i pisania. (...)
Jako dowód, że Pepys musiał umieć nawet wyższą matematykę, Steinhaus przyniósł mi dwie fotografie karty tytułowej pierwszego druku epokowego dzieła Newtona z 1686 roku, na której Pepys figuruje jako prezes Królewskiego Towarzystwa Naukowego i w tej roli pozwala dzieło to drukować. „Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses, July 5, 1686." Mnie się to nie zdaje żadnym dowodem. 1) Pepys, wyjątkowo uzdolniony i ciągle się kształcący, mógł już w 1686 znać cośkolwiek wyższą matematykę (było to w lat bez mała 20 po czasie, gdy się uczył tabliczki mnożenia). 2) Nawet nie znając jej i nie znając bodaj samego dzieła mógł na skutek decyzji specjalistów dać oficjalne imprimatur jako prezes Towarzystwa, co jest taką samą formalnością, jak np. przed wojną podpis tzw. „redaktora odpowiedzialnego" na czasopismach. 3) To, że Pepys został prezesem Towarzystwa Naukowego, nie znaczy jeszcze, że został znakomitym uczonym, gdyż różne okoliczności wpływały na wybór prezesa Królewskiego Towarzystwa i nie zawsze byli prezesami znakomici uczeni. Pepys też nigdy nim nie był, choć znał się po trosze na wszystkich rodzajach wiedzy. Ale przede wszystkim jako człowiek bogaty był mecenasem nauki i sztuk, fundatorem wielu naukowych przedsięwzięć i instytucji."

Ponadto Dąbrowska w trzecim wydaniu „Dziennika Samuela Pepysa" (PIW 1966) pisze w odnośniku do zapisu z 9 lipca 1662: „Czytelnikom, którzy po przeczytaniu pierwszego wydania „Dziennika" powątpiewali, czy Samuel Pepys rzeczywiście nie umiał tabliczki mnożenia, i zapytywali mnie, czy w danym wypadku „table of multiplication" nie znaczy czego innego, przytaczam komentarz Arthura Bryanta z jego monografii o Pepysie: „A znajdując, że wszystkie te nowe dla niego czynności wymagają przede wszystkim wiedzy matematycznej, (Samuel Pepys) cofnął się aż do jej pierwszych podstaw i on, człowiek dobiegający trzydziestki, wrócił do szkolnej nauki. Bo nająwszy niejakiego Coopera, szypra jednego z królewskich okrętów, by go naprędce wyuczył arytmetyki, zaczął od tabliczki mnożenia i wstawał co ranka przed świtem, aby powtarzać ją na pamięć, aż póki jej nie opanował." (Arthur Bryant, „Samuel Pepys, the man in the making", str. 175–176)."

Szkoda, że Dąbrowska nie przytoczyła więcej argumentów Steinhausa, i że on w swoich „Wspomnieniach i zapiskach" [3] nic o tym sporze o Pepysa, nie napisał.

Myślę, że warto dalej o tym dyskutować. Opiszę więc, jak próbowałem wyrobić sobie pogląd na tę sprawę.

Przypuszczać można, że Pepys chciał się nauczyć posługiwać „tablicami do mnożenia", którymi mogły być, wówczas już do tego celu używane, tablice: kwadratów, funkcji trygonometrycznych lub logarytmów. Jaki był wtedy poziom wiedzy matematycznej, pięknie opisuje Marek Kordos w swych „Wykładach z historii matematyki" [4], więc zacytuję:

„Naprawdę istotna była jednak sprawa mnożenia. I tu już w XII wieku (oczywiście, u Arabów) pojawiają się tablice. Nie są to, rzecz jasna, bardzo duże tabliczki mnożenia, gdzie wypisane są wyniki wszystkich możliwych mnożeń liczb (dajmy na to) pięciocyfrowych – tablice takie byłyby strasznie niewygodne w użyciu. Najpierw są to tablice kwadratów. Używa się ich do mnożenia liczb naturalnych, ale to nic nie szkodzi – przesuwając odpowiednio przecinek możemy z każdej „skończonej" liczby dziesiętnej zrobić liczbę naturalną (oczywiście, po pomnożeniu przesuniemy przecinek z powrotem). Mnoży się za pośrednictwem wzoru

$$a \cdot b = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4,$$

na przykład

$$284 \cdot 391 = (675^2 - 107^2)/4 = (455625 - 11449)/4 = 444176/4 = 111044.$$

Oczywiście, kwadraty znajdujemy w tablicach. Dziś może nam się wydawać, że metoda taka jest bardziej pracochłonna od „zwykłego" mnożenia na kartce, ale dla bardziej rozbudowanych przykładów i przy nabytej zręczności w posługiwaniu się tablicami (której nam brakuje) liczyło się w ten sposób ponoć znacznie szybciej niż tradycyjnie, a ponadto znacznie mniej było pomyłek rachunkowych. Tablice były bardzo ważnym środkiem technicznym przy rachowaniu i wszystkie ośrodki naukowe były w nie wyposażone – wydane w 1592 roku (przypominam – druk!) tablice kwadratów liczb naturalnych od 1 do 100 000 były ponoć niezłym sukcesem kasowym – nic dziwnego, pozwalały mnożyć liczby pięciocyfrowe.

Znacznie bardziej subtelna jest technika mnożenia za pomocą tablic trygonometrycznych. Tu proces przygotowania liczb do mnożenia jest „odwrotny" do używanego z okazji tablic kwadratów – teraz przecinki przesuwamy tak, by liczby były mniejsze od 1. Następnie korzystamy ze wzoru

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta));$$

dla powyższego przykładu będzie to – przy użyciu tablic czterocyfrowych Wojtowicza, które mam z czasów szkolnych –

$$0{,}284 \cdot 0{,}391 = \cos 73°30' \cdot \cos 66°59' = \frac{1}{2}(\cos 140°29' + \cos 6°31') =$$

$$= \frac{1}{2}(-0{,}7714 + 0{,}9936) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2222 = 0{,}1111;$$

otrzymaliśmy 111 100, ale błąd jest konsekwencją tego, że użyte tablice były zaledwie czterocyfrowe. I tu wyjaśnia się, po co produkowano wielocyfrowe tablice trygonometryczne (patrz wykład IX) – bynajmniej nie chodziło o żadną geometrię; było to potraktowanie funkcji trygonometrycznych (jak to się mówi w analizie numerycznej) jako funkcji specjalnych. Rekord XVI wieku to tablice Rheticusa (dokończone po jego śmierci przez Otho) wydane w 1596 roku – zawierają one sześć funkcji trygonometrycznych co 10″ z dokładnością do 10 cyfr po przecinku. Przypominam, że żaden geometryczny cel praktyczny nie wymaga nawet dziś więcej niż ośmiu cyfr znaczących. Jednak dla celów obliczeniowych Pitiscus wydał w 1613 roku tablice piętnastocyfrowe. Ciekawe, że w naszym stuleciu, nawet wtedy, gdy uczono posługiwania się tablicami, nie podawano informacji skąd i po co tablice się wzięły."

Dalej Marek Kordos opisuje historię powstania logarytmów, stwierdzając, że „już w 1627 roku (w Gouda) Vlacq wydał pełne tablice (logarytmiczne), (uzupełnione dla liczb od 20 000 do 90 000 przez holenderskiego geodetę Ezechiela de Deckera)." W 1620 roku Edmund Gunter zbudował suwak logarytmiczny.

Czy wobec tego, że w interesującym nas roku 1662, opisane metody liczenia były już od dawna znane w Anglii, można sądzić, iż wychowanek Magdalene College w Cambridge, nie tylko ich nie znał, lecz nawet nie umiał tabliczki mnożenia? Jakżeż, w takim razie, mógł sprawdzać rachunki oraz kontrolować gospodarkę i finanse marynarki? Może to tylko wielebny John A. Smith przy odcyfrowywaniu zaszyfrowanego rękopisu „Dziennika" Pepysa, zrobił z „tablic do mnożenia" – „tabliczkę mnożenia"?

Wynotowałem z „Dziennika" następujące kalendarium:

Rok 1662
- dzień 1 lipca – Pepys postanowił uczyć się matematyki,
- 4 lipca – pierwsza lekcja z panem Cooperem,
- 7 lipca – druga lekcja,
- 9 lipca – „Wstałem o czwartej rano i przyłożyłem się mocno do mej tabliczki mnożenia, która z całej arytmetyki najwięcej przyczynia mi trudności."
- 11 lipca – „Wstałem o czwartej i tęgo wziąłem się do tabliczki mnożenia, którą już teraz bez mała opanowałem."
- 12 lipca – „Wieczorem lekcja arytmetyki z panem Cooperem",
- 18 lipca – „Przyszedł Cooper na lekcję matematyki, ale prawdę mówiąc, głowę mam tak pełną interesów, że nie pojmowałem wszystkiego tak, jak zazwyczaj pojmuję."

Rok 1663
- dzień 2 stycznia – „..., a zaś do urzędu, gdzie arytmetyką się zabawiałem,"
- 28 stycznia – „W urzędzie siedziałem dzisiaj do 12 w nocy z panem Lewesem, u którego uczyłem się jaką manierą płatnicy prowadzą rachunki, trudna sztuka i której moi koledzy urzędnicy wcale nie umieją, a bardzo potrzeba ją znać."
- 21 października – Pepys postanowił z ucznia stać się nauczycielem i zanotował: „Tego wieczoru zacząłem żonę uczyć arytmetyki, co bardzo dobrze przyjęła i mam nadzieję, że przywiodę ją do rozumienia wielu pięknych rzeczy."
- 3, 5, 6 grudnia – wytrwale uczy żonę arytmetyki, zaznaczając: „co czynię z wielką lubością", i nadmienia: „umie już dobrze dodawanie, odejmowanie i mnożenie, tedy nie chciałem jej dziś męczyć nauką dzielenia."

Rok 1664
- dzień 16 stycznia – „Browne przyniósł mi bardzo zmyślny instrument do rachunków arytmetycznych, ale muszę się poćwiczyć, zanim dojdę do perfekcji w jego użyciu."

Mamy więc nową zagadkę: czy był to suwak logarytmiczny, znany od czterdziestu lat, czy jakiś prototyp arytmometru, a może tylko liczydło?

Widzimy więc, że w ciągu szesnastu miesięcy Pepys z ucznia arytmetyki, stał się jej wytrwałym nauczycielem, ciekawym nowości i dążącym do perfekcji. Czy

„Jakkolwiek już w XVII w. wskazano możliwość i drogi skonstruowania urządzenia do wykonywania czterech działań arytmetycznych, to jednak praktyczna konstrukcja arytmometru pojawiła się dopiero na początku XIX w." (...) „opracowany w 1623 przez Szwajcara W. Schickarda „zegar do rachowania" wskazał drogę do automatycznego dodawania. Pierwszym jednak prawdziwym sumatorem z automatycznym dodawaniem przeniesień, stała się zbudowana w 1642 przez Pascala maszyna do zliczania pieniędzy wg ówczesnego francuskiego systemu monetarnego (1 liwr = 20 soldów = 240 denarów); później Pascal skonstruował również sumator dziesiętny." [5]

jednak, tak zdolny i pracowity człowiek, potrzebowałby aż tyle czasu, gdyby to chodziło tylko o tabliczkę mnożenia i najprostsze jej stosowanie?

Do odmiennego spojrzenia na omawianą sprawę pobudziło mnie zabawne opowiadanie Karola Dickensa, które zacytuję:

„W dawnych czasach wprowadzono w Ministerstwie Skarbu prymitywny system rachowania za pomocą karbowanych laseczek, przypominających kalendarz Robinsona Crusoe na bezludnej wyspie. Wielu rachmistrzów, księgowych i prokurentów zrodziło się i umarło od tego czasu... Atoli praktyka urzędowa trzymała się wciąż z uporem karbowanych laseczek jak filarów Konstytucji, a rachunki Ministra Skarbu przeprowadzano dalej za pomocą patyczków z twardego drzewa, zwanych „tallies". Za rządów króla Jerzego III jakiś duch niespokojny zadał pytanie, czy z faktu istnienia piór, atramentu, ołówków i tabliczek szkolnych nie wynika przypadkiem możliwość jakiejś zmiany, np. odstąpienia od tego przestarzałego sposobu rachowania? Maszyna biurokratyczna wysiliła się wtedy jedynie na zanotowanie w swych aktach tego pomysłu śmiałego i oryginalnego. Trzeba było czekać aż do roku 1826, aby doprowadzić do zniesienia karbowanych kijków. W r. 1834 zauważono, że jest ich jeszcze ogromna ilość w użyciu. Powstało tedy pytanie, co zrobić z tymi starymi kawałkami drzewa, nadgniłymi i stoczonymi przez robactwo? Umieszczono je w Westminsterze, choć każdemu rozumnemu człowiekowi przyszłoby na myśl, że najlepiej byłoby je oddać biedakom, mieszkającym w pobliżu, aby mieli czym w piecu napalić. Jakkolwiek nigdy nie były pożyteczne, biurokratyczna rutyna postanowiła, że nie mają być nigdy pożyteczne i wydano rozkaz dyskretnego spalenia ich. Postanowiono, aby spłonęły w piecu Izby Lordów. Piec napęczniał od tych idiotycznych kawałków drzewa stanął cały w płomieniach. Od pieca zajęła się Izba Gmin, obie Izby zamieniły się w zgliszcza. Powołano budowniczych, aby je odbudowali i stąd mamy teraz drugi milion niedoboru w budżecie." [6]

Dnia 20 marca 1665, Pepys zanotował: „Komisja utwierdziła mnie na urzędzie skarbnika z mocą wystawiania talonów."

Encyklopedia Britanica omawia sprawę „tallies" pod hasłem „tally".

Zaś Dąbrowska, w odnośniku objaśnia: „Tym nowożytnym terminem przełożyłam starodawne angielskie „tallies" oznaczające deszczułki, na których „karbowano" sumy pieniężne i zlecenia wypłat (*striking of tallies*); stąd zresztą i słowo „talon" pochodzi."

Zatem Pepys nie wystawiał talonów, tylko tallies – deszczułki na których karbowaniem znaczono odpowiednią kwotę pieniędzy – i po rozcięciu ich wzdłuż, na dwie części, kontrahenci przechowywali je jako dowód należnej zapłaty. Przy wypłacie przymierzano czy obie tallies (części) pasują do siebie, dla upewnienia się o rzetelności roszczenia. [7]

Jeżeli tak archaiczna – dosłownie drewniana – była dokumentacja, to może i metody obliczeniowe były pradawne?

We wstępie do „jednej z najstarszych książek matematycznych napisanych w języku angielskim „Craft of Nombrynge" („Kunszt liczby", 1300 r.)", napisano: „Powiedziano tu, że nowy kunszt ma siedem części, czyli działań. Pierwsze zwie się dodawaniem, drugie odejmowaniem, trzecie nazywają podwajaniem, czwarte połowieniem; piątym jest mnożenie, szóstym dzielenie, siódmym wyciąganie pierwiastków." [6]

Dlaczego podwajaniu i połowieniu, nadawano wówczas rangę odrębnych działań?

„W wiekach średnich, gdy dopiero zaczynano posługiwać się liczbami arabskimi, nie było zwyczaju uczenia się całej tabliczki mnożenia na pamięć. Umiano mnożyć w pamięci przez 2 i posługiwano się prymitywną metodą t.zw. „duplikacji" – czyli podwajania. [6]

Mógł więc Pepys liczyć, na przykład, tak:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\qquad}rcll}
287 & \cdot & 128 & \text{lub} & 287 & \cdot & 132 & \\
574 & \cdot & 64 & & 574 & \cdot & 66 & \\
1148 & \cdot & 32 & & 1148 & \cdot & 33 & — \ +1148 \\
2296 & \cdot & 16 & & 2296 & \cdot & 16 & \\
4592 & \cdot & 8 & & 4592 & \cdot & 8 & \\
9184 & \cdot & 4 & & 9184 & \cdot & 4 & \\
18368 & \cdot & 2 & & 18368 & \cdot & 2 & \\
36736 & \cdot & 1 & & 36736 & \cdot & 1 & — \ \underline{36736} \\
 & & & & & & & \quad\ \ 37884
\end{array}$$

(Gdy wypadało połowić liczbę nieparzystą, wynik zaokrąglano w dół, zaznaczając obok poprawkę uwzględnianą przy końcu obliczenia.) [8]

Oczywiście mniej pracochłonny jest, do dziś stosowany, sposób mnożenia przez wielokrotności kolejnych potęg dziesięciu:

$$\begin{array}{r}
\underline{287} \cdot 128 \\
287 \\
574 \\
\underline{2296} \\
36736
\end{array}$$

Jednak do takiego mnożenia trzeba znać biegle całą tabliczkę mnożenia, a nie tylko przez dwa.

Może więc Pepys do roku 1662 wykonywał mnożenie przez podwajanie i chciał się nauczyć mniej uciążliwego sposobu?

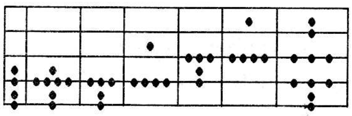
Wyjaśnienie takie komplikuje uwaga A.P. Juszkiewicza [9], że „stopniowo przestano traktować podwajanie i połowienie jako osobne działania arytmetyczne. Całkiem zanikły one wraz z pojawieniem się szeroko rozpowszechnionych podręczników Luca Paciolego (1494) i Jana Widmanna (1489)."

A więc mnożenie przez podwajanie znikło już w XV wieku, natomiast zjawiły się opisy posługiwania się „rachunkiem liniowym", to znaczy rachunkiem na liniowanej desce, za pomocą żetonów, po angielsku zwanych „counters".

Rachunek liniowy charakteryzuje się poziomym ułożeniem linii, na których kładziono nieznakowane żetony, oraz stosowaniem żetonów o wartości pięciu jednostek, przywodzących na myśl system piątkowy. Na desce lub stole poczynając od dołu, rysowano kredą proste poziome dla jednostek, dziesiątek, setek itd. Na każdej linii kładziono do czterech żetonów; żeton umieszczony między dwiema liniami oznaczał pięć jednostek rzędu najbliższej linii leżącej poniżej. Prócz tego dzielono deskę liniami pionowymi na kilka kolumn, przeznaczonych dla poszczególnych składników, czynników itp. oraz dla wyniku. Rysunek obok przedstawia schemat mnożenia

$$66 \cdot 96 = (36 + 540 + 360 + 5400) = 6336,$$

zaczerpnięty z rosyjskiego rękopisu z połowy XVII wieku.



„Prawdopodobnie ten sposób liczenia znany był znacznie wcześniej o czym wnioskuje się ze znalezisk żetonów z XIII wieku. (...)
Możliwe także, że rachunek na liniach powstał niewiele wcześniej przed pojawieniem się pierwszych znanych jego opisów, a starsze odeń żetony rachunkowe były używane w innych odmianach deski rachunkowej, w rodzaju szachownicy, jaką posługiwano się w Anglii w XIV wieku. Równie niejasne jest pochodzenie rachunku na liniach. Wprawdzie różni się on znacznie od abaka z X–XII wieku, lecz mógł z niego powstać przez uproszczenie i przystosowanie do wymagań nowej arytmetyki." [9]

Niektóre rodzaje desek rachunkowych były przystosowane do osobliwości rozmaitych systemów pieniężnych. W takich przypadkach oznaczano wiersze specjalnymi znakami wskazującymi wartości odpowiednich żetonów.

Wspomniany autor, [9], pisze: „Brak do końca XV wieku jakichkolwiek wzmianek o rachunku liniowym w literaturze algorystycznej oznacza w tym wypadku, że posługiwali się nim przeważnie ludzie dalecy od środowisk naukowych – pracownicy finansowi magistratów i władz miejskich, kupcy, rzemieślnicy i zwykli ludzie w codziennym życiu. Odpowiednich reguł rachowania można się było wyuczyć i używać bez znajomości sztuki pisania i czytania. (...)

Królowi pruskiemu Fryderykowi przypisuje się następujący dowcipny francuski czterowiersz:
Les courtisans sont des jetons,
leur valeur dépend de leur place:
Dans la faveur, des millions,
et des zeros dans la disgrace.
[Dworzanie są jak żetony,
ich wartość zależy od ich pozycji:
w łasce warci są miliony,
w niełasce – zero.]

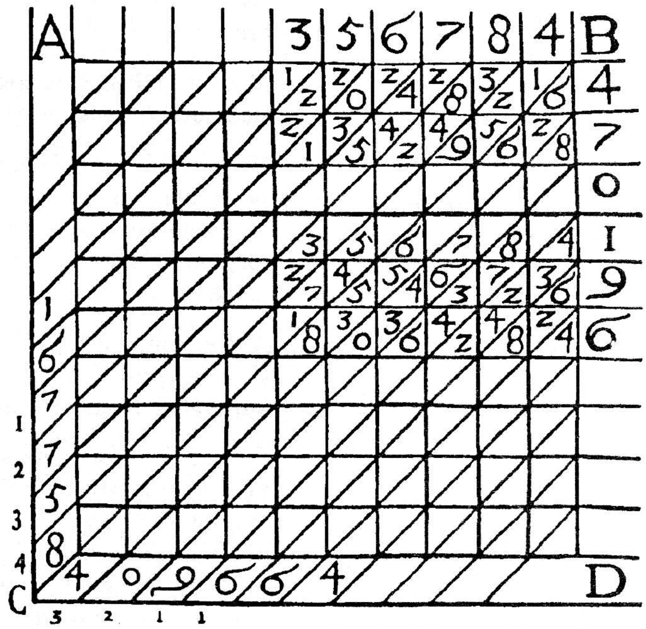
Rachunek liniowy był bardzo powszechnie używany do końca XVII wieku. Wzmianki o nim można znaleźć na przykład w utworach Szekspira i Moliera; Leibniz przedkładał go nad rachunek pisemny.

W „Dzienniku" pana Samuela jest też, następująca, pochlebna wzmianka o Polsce:

Mateusz Wren, sekretarz lorda Clarendona (kanclerza), a po jego upadku sekretarz księcia Yorku, aż do swej śmierci w roku 1672.

„28 września 1667. – Do urzędu i całe rano nad rozkazem Rady Królewskiej, żeby puścić do domu marynarzy, z czym srogi kłopot, bo jakże tu ich puścić z kwitami, a przed styczniem nie mamy pieniędzy na zapłacenie im żołdu, jako że Parlament od stycznia dopiero daje na to pieniądze. Z tej okazji pan Wren (obradujący dziś z nami) powiedział, że jeśli kiedy jeszcze zajdzie potrzeba nagłego ściągania pieniędzy, przygodziłoby się na taką okazję, żeby było jak w Polsce, gdzie jest dwu Podskarbich i dwa Skarby – jeden dla Króla, a drugi dla Królestwa."

Skoro mieliśmy, wówczas, lepszą organizację skarbowości niż Anglicy, to i nasze metody rachunkowe zapewne były nie gorsze od angielskich. Sięgnąłem więc po, wydaną w roku 1620, „Arytmetykę liczb całkowitych" („Arithmetica integrorum") Jana Brożka (1585–1652) profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego [10]. Zaczyna on od stwierdzenia, że zbytecznym jest traktowanie podwajania i połowienia jako szczególnego rodzaju działań, a objaśniając reguły mnożenia pisze: „Często „zachowywanie w pamięci dla następnej cyfry" jest uciążliwe, toteż najdogodniejszy jest sposób mnożenia na abaku poliniowanym, który tak się przedstawia:



Sposób liczenia łatwo rozpoznać z powyższego rysunku, gdzie 356784 mnożone jest przez 470196 i liczby te zapisane są na bokach tablicy, schodzących się w górnym rogu. Pierwszy fragment tego mnożenia: 4 × 4 = 16, wpisany jest w prawym rogu – cyfra 1 w górnym, a 6 w dolnym trójkąciku; następne – podobnie. Wynik obliczono sumując zapisane liczby wzdłuż przekątni, od najniższej przekątni zaczynając. Iloczyn zapisany jest na ramionach tablicy, schodzących się w lewym dolnym rogu = 167758409664.

Angielskim śladem liczenia na tego rodzaju pokratkowanej tablicy, czyli szachownicy („chessboard"), jest jeszcze dziś nazywanie ministra skarbu: „kanclerzem szachownicy".

Oba sposoby mnożenia: „liniowy" i „na szachownicy", wymagają umiejętności posługiwania się małą tabliczką mnożenia, do 10 × 10. Brożek pisze, że zwano ją zwykle tablicą Pitagorasa. Znamienną jest jego wyrozumiałość dla nie umiejących jej. Chce im pomóc podsuwając „inny sposób mnożenia", i pisze: „Mnożenie liczb, zwłaszcza większych, można wykonywać także w inny sposób przez samo dodawanie, sporządzając na początek tablicę z danej mnożnej.

Sporządzimy zaś ją w ten sposób: zapisz mnożną i obok niej wskaźnik 1; masz pierwszy wiersz.
Aby otrzymać wiersz drugi, dodaj mnożną do siebie i naprzeciw sumy umieść wskaźnik 2.
Aby otrzymać wiersz trzeci, dodaj wiersz drugi do pierwszego i naprzeciw umieść wskaźnik 3, oznaczający, że w liczbie mu przyporządkowanej mnożna

mieści się trzy razy. W ten sposób będziesz prowadzić dalej dodawanie, liniami nie przerywając go aż do wiersza dziesiątego.

Oto przykład: Mamy pomnożyć liczbę 3795473 przez 457892. Sporządzam następującą tablicę mnożnej:

03795473	1
07590946	2
11386419	3
15181892	4
18977365	5
22772838	6
26568311	7
30363784	8
34159257	9
37954730	

(...) Kiedy już masz tak ułożoną tablicę mnożnej, zapisz wyrażony cyframi mnożnik i podkreśl go linią. Biorąc ostatnią cyfrę mnożnika szukaj jej między wskaźnikami tablicy, gdyż obok wskaźnika znajdziesz liczbę, którą należy zapisać pod linią."

Oszczędzając dalszego opisu, podam jego konkluzję: „Oto przykład: zapisuję mnożnik posługując się jego cyframi jako wskaźnikami i biorę z tablicy liczby w sposób podany w regule.

```
        457892
   ----------------
   4  15181892
   5   18977365
   7    26568311
   8     30363784
   9      34159257
   2       07590946
      -------------
      1737916722916        [10]
```

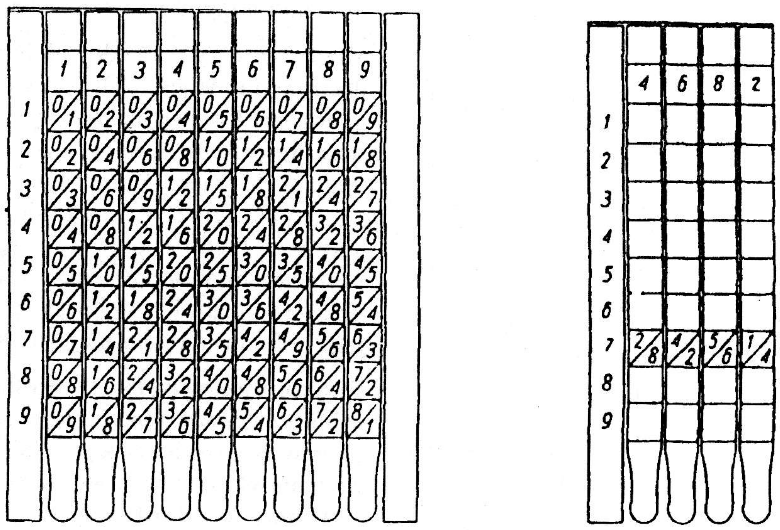
Podobnie przy dzieleniu, by uniknąć „uciążliwej" tabliczki mnożenia, Brożek radzi sporządzić – posługując się dodawaniem – tabelę wielokrotności dzielnika (od 1 do 9) i korzystać z niej, by odejmować, już gotowe, odpowiednie iloczyny.

„Arytmetykę" swą kończy Brożek rozdziałem XVI „O laseczkach" – pisząc tak:

„Wyłożyliśmy już różne sposoby liczenia. Przedstawimy jednak jeszcze laseczki wzięte z Rabdologii Nepera. Są one nadzwyczaj przydatne do szybkiego mnożenia i dzielenia.

Wykonanie ich jest następujące: sporządź dziesięć kwadratowych laseczek z twardego materiału, na przykład srebra, miedzi, kości słoniowej lub bukszpanu (...)". Oszczędzę Czytelnikowi dalszego opisu, zastępując go rysunkiem:

Rysunek zaczerpnięty z „Śladami Pitagorasa" – Szczepana Jeleńskiego – W-wa 1988, Wyd. Szk. i Ped. [7]



Sztabki środkowe, zaopatrzone w rękojeści, można przestawiać; dwie boczne sztabki są nieruchome.

Łatwo dostrzec, że te „sztabki rachunkowe Nepera", oszczędzają trudu przypominania sobie tabliczki mnożenia. Brożek jest nimi zachwycony: „Aby zaś ułatwić uczniom stosowanie tej metody, ofiarowuję pałeczki drewniane szkołom prywatnym naszej Akademii oraz szkole tucholskiej (...). Ofiarowałbym chętnie

„Rabdologia" Nepera wydana została w roku 1617, a książka Brożka – w 1620. Obaj korespondowali ze sobą.

złote i srebrne na cześć ich pierwszego wynalazcy, gdyby mi na to pozwalał stan mego majątku."

Przypuszczam, że to właśnie „sztabki Nepera" były owym „zmyślnym instrumentem do rachunków arytmetycznych", o otrzymaniu którego pisał Pepys 16 stycznia 1664.

Z lektury „Arytmetyki" Brożka wynika – dla interesującego nas zagadnienia – wniosek, że cytowana już uwaga Lancelota Hogbena [6], iż „w wiekach średnich, nie było zwyczaju uczenia się całej tabliczki mnożenia na pamięć" – jest słuszną jeszcze i dla wieku siedemnastego.

Współczujemy często Anglikom, że trudzą się przeliczaniem funtów po 20 szylingów lub 240 pensów, i że pamiętać muszą, iż gwinea to 21 szylingów. Myliłby się jednak ktoś, myśląc, że Polacy w XVII wieku nie mieli takich uciążliwości. Wręcz przeciwnie. Naszą jednostką monetarną była wówczas grzywna (= $\frac{1}{2}$ funta srebra), która dzieliła się na 20 szelągów po 12 denarów, a denar miał 2 obole; 18 oboli tworzyło jeden grosz polski; floren wynosił 30 groszy [10].

Jak biegle radzono sobie z tym, świadczy wzmianka Brożka, wymieniającego wśród przysłowiowych przykładów nieudolności rachunkowej i taki: „Opowiadają również, że w Polsce był pewien człowiek w podeszłym wieku, który nie umiał policzyć, ile szelągów zawiera grosz polski." [10]

Przykład ten nasuwa myśl, że zapewne wówczas uważano tabliczkę mnożenia za trudniejszą od przeliczeń monetarnych, natomiast nam dziś wydaje się odwrotnie.

W końcu rozpatrzmy dwie, wykluczające się wzajemnie, możliwości:

I. Pepys nie umiał tabliczki mnożenia, rachował pracochłonnymi sposobami, takimi jak opisane mnożenie „przez podwajanie", lub „przez samo dodawanie".

   Celem nauki było więc przejście do mniej uciążliwych metod, takich jak mnożenie „na liniach", „na szachownicy", i dalej do pisemnego sposobu do dziś powszechnie stosowanego.

II. Jeżeli zaś przyjąć, że Pepys umiał tabliczkę mnożenia, wówczas podejmowania nauki mnożenia oznacza, że nie kontentował się już tylko „rachunkiem liniowym", który Leibniz przedkładał nad rachunek pisemny, lecz chciał osiągnąć większą umiejętność, przez posługiwanie się tablicami matematycznymi (omówione na początku).

   Mogło by to być prawdopodobne, przy ambicji i zdolnościach, jakie dostrzegamy w jego „Dzienniku". Wtedy jednak trzeba się zgodzić, że jego nauczyciel Cooper już taki wysoki poziom wiedzy posiadał. Z „Dziennika" – poza wstępną wzmianką, przed lekcjami, że „to bardzo zmyślny człowiek" – nic pochlebnego o nim się nie dowiadujemy. Przeciwnie. Major Holmes „opowiada dziwne rzeczy o błędach swojego młodego oficera, Coopera" – którego Pepys skierował na jego okręt. Pepys usiłuje bronić swego protegowanego, lecz w końcu zapisuje: „Po południu w urzędzie sprawa Coopera i kapitana Holmesa, ale widząc, że Cooper jest hulaka i kłopotliwy jegomość, przystałem na jego usunięcie z okrętu."

   Przyjąć więc wypada, iż z posługiwania się przez ówczesnych matematyków tablicami kwadratów, funkcji trygonometrycznych i logarytmów, nie wynika jeszcze, że przeciętny szyper również umiejętności te posiadał. O poziomie matematyki szeroko stosowanej, świadczą raczej omówione fragmenty „Arytmetyki" Brożka. Był to podręcznik uniwersytecki – i wprawdzie autor pisze, że „Jan Neper wydał Arytmetykę miejsc, w której wykonuje dzielenie, mnożenie i pierwiastkowanie w sposób szczególny i nie pozbawiony pewnej przyjemności" – to jednak dominuje troska o nauczenie studentów przynajmniej mnożenia i dzielenia „przez samo dodawanie", gdyż wątpliwym było czy opanują kiedykolwiek tabliczkę mnożenia.

Charakteryzując owe czasy Trevelyan pisze:

„Wiek, który wydał „Principia" Newtona, „Raj utracony" Miltona, „Absaloma i Achitofela" Drydena, utwory muzyczne Purcella i kościoły Wrena oraz te różnorakie zainteresowania i osobliwości powszedniego życia, o których wspominają Evelyn i Pepys, ten wiek należy do największych epok myśli i kultury angielskiej. Nie mógłby się był stać tym, czym się stał, bez prasy drukarskiej, godne uwagi jest jednak, jak niewielka ilość druków zaspokajała jego potrzeby." [11]

Nieliczna więc była elita kulturalna, a wśród niej interesujący się nowościami matematyki stanowili niewielką grupę, zapewne nie należeli do niej szyprowie pokroju pana Coopera.

Opowiadam się więc za poglądem, że Pepys, w roku 1662, nie umiał tabliczki mnożenia i dopiero zaczynał się jej uczyć.

Nie chcę przez to twierdzić, że spór rozstrzygnąłem – przedstawiłem tylko ewolucję moich zapatrywań, by wszcząć na nowo dyskusję sprzed lat. Warto przecież zdać sobie sprawę jak dalece anachroniczne mogą być wyobrażenia o posługiwaniu się matematyką w dawnych czasach.

Literatura:

[1] Maria Dąbrowska: „Dzienniki", tomów 5, Czytelnik 1988, cytaty z tomu 4.

[2] „Dziennik Samuela Pepysa", wybór i przekład Marii Dąbrowskiej, wydanie trzecie, tomów 2, Państwowy Instytut Wydawniczy, W-wa 1966.

[3] Hugo Steinhaus: „Wspomnienia i zapiski", „Aneks", Londyn 1992.

[4] Marek Kordos: „Wykłady z historii matematyki", Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, W-wa 1994, cytaty str. 125–126; 127.

[5] „Encyklopedia odkryć i wynalazków", Wiedza Powszechna, W-wa 1979, cytaty str. 20; 200.

[6] Lancelot Hogben: „Matematyka dla milionów", Książka i Wiedza, W-wa 1952, cytaty str. 284; 277; 122.

[7] Szczepan Jeleński: „Śladami Pitagorasa", Państwowe Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, W-wa 1988, str. 208; 220.

[8] Szczepan Jeleński: „Lilavati", Państwowe Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, W-wa 1968, str. 142–143.

[9] A.P. Juszkiewicz: „Historia matematyki w wiekach średnich", Państwowe Wydawnictwa Naukowe, W-wa 1969, str. 342; 344–345.

[10] Jan Brożek: „Wybór pism", opracowała Jadwiga Dianni, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, W-wa 1956, tom II, str. 129; 135; 138; 300; 301; 112.

[11] George Macaulay Trevelyan: „Historia społeczna Anglii", Państwowy Instytut Wydawniczy, W-wa 1961, s. 258.

[12] Andre Maurois: „Dzieje Angljі", Wydawnictwo J. Przeworskiego, W-wa 1938, str. 105–106.