Drogi i manowce początków algebry

Witold WIĘSŁAW, Wrocław

1. Wstęp

Algebra rodziła się kilka razy, ale początkowo miała zbyt mało do zaoferowania, aby skutecznie konkurować z geometrią. Pierwsza próba to *Elementy* Euklidesa, jak też inne dzieła, które je poprzedzały (*Elementy* Kritona (−430), *Elementy* Simmiasa z Teb (−400), dzieła Ksenokratesa (ok. −330) i inne). Tam algebra pojawia się w postaci nazwanej przez Neugebauera *algebrą geometryczną*. Druga próba, tym razem skuteczniejsza, to *Arytmetyka* Diofantosa. Składała się ona, jak przystało na dzieło klasyczne, z trzynastu ksiąg (podobnie jak *Elementy*), z których znanych jest tylko sześć. Termin *księga* jest tu trochę na wyrost, przynajmniej z naszego punktu widzenia. *Księgi* w owych czasach składały się z kilkunastu wąskich pasków papirusu, zszytych lub sklejonych z boku, a całe dzieła (tzn. zbiór złożony z kilku ksiąg) były przechowywane w naczyniach podobnych do wiader. Nieznane cztery księgi *Arytmetyki* Diofantosa odkrył w 1972 roku Gulchin Maani w bibliotece Meshedzkiej (rękopis nr 5466). Jest niemal pewne, że tekst arabski odkryty przez niego jest tłumaczeniem ze starogreckiego komentarzy Hypatii, córki Teona, do dzieła Diofantosa. Diofantos bada równania i układy równań o współczynnikach całkowitych. Co prawda unika języka geometrycznego, tak charakterystycznego dla matematyki greckiej, ale jego rozważania są – w gruncie rzeczy – geometryczne. Pokazuje na przykładach, że jeżeli krzywa stopnia 2 zadana równaniem $F(x, y) = 0$ ma punkt (x, y) o obu współrzędnych wymiernych (tzw. *punkt wymierny*), to ma ich nieskończenie wiele. Diofantos bada też rozwiązania wymierne równania $F(x, y) = 0$, gdzie F jest wielomianem stopnia 3 lub 4. Rozumowania Diofantosa są arytmetyczne, ale metoda – geometryczna. Diofantos prowadzi sieczną przez dwa wymierne punkty krzywej (np. zad. IV,25; IV,26), albo styczną w punkcie wymiernym, otrzymując (na ogół) punkt wymierny. Metoda ta, stosowana później przez Fermata w XVII wieku, została ostatecznie usankcjonowana przez Poincarégo w 1901.

Następna próba, niemal udana, to dzieło *Al dżabr wa-l-mukabala* Muhammeda ibn Musy al-Chorezmiego, urodzonego 1210 lat temu. Występują tam już symbole algebraiczne, pojawia się umiejętność przekształcania równań algebraicznych i klasyfikacja równań stopnia dwa. Algebra do XVI stulecia, nie licząc incydentalnych sytuacji, dotyczyła równań algebraicznych stopnia 1 i 2. Te incydentalne sytuacje, to wspomniany już Diofantos i prapoczątek geometrii algebraicznej w jego *Arytmetyce* oraz równania algebraiczne stopnia 3 i 4, które pojawiły się u astronomów arabskich w X wieku, a wcześniej u al-Chorezmiego. Potrzeby rozwiązywania równań stopnia 3 brały się stąd, że próbowano obliczać $\sin\frac{\alpha}{3}$ znając $\sin\alpha$.

Jednak właściwa historia algebry zaczyna się w XVI wieku, bynajmniej nie z powodu rozwiązania przez Cardano, Tartaglię i Ferrariego równań stopnia 3 i 4 w *sposób algebraiczny*, czyli jak dziś mówimy *przez pierwiastniki* (tj. przez zredukowanie rozwiązania do rozwiązania skończenie wielu równań dwumiennych). Oczywiście, należy chylić czoła przed ich osiągnięciem, które zaczyna się bardziej cenić, gdy się uświadomi, że nie było wtedy *jakiejkolwiek* symboliki algebraicznej, a rozwiązania zostały znalezione za pomocą wymyślnej konstrukcji podziału sześcianu na prostopadłościany. Historia algebry zaczyna się w ciągu stulecia, od drugiej połowy XVI wieku. Wtedy to burzliwie zaczęła się rozwijać symbolika algebraiczna i trwało to około stu lat. Za czasów Kartezjusza proces ten jest już niemal zakończony. Newton (*Aritmetica universalis*) używa prawie takiej samej symboliki, jakiej używamy współcześnie, z wyjątkiem nawiasu, który zapisuje jako $\overline{a+b}$. W ten sposób powstał symbol $\sqrt{a+b}$ oznaczający pierwiastek $\surd$ z liczby w nawiasie, tj. z liczby $\overline{a+b}$. Zapewne z tych i podobnych powodów wiek XVII nazywany jest w historii matematyki *wiekiem odkryć*. Nadchodził wiek XVIII – *wiek zastosowań*.

W XVIII wieku nie można jeszcze mówić o podstawowych pojęciach algebry abstrakcyjnej, choć implicite wiele wyników Eulera i Lagrange'a ma charakter abstrakcyjny: w przeprowadzonych przez nich dowodach twierdzeń używa się podstawowych własności grup i ciał. Lagrange dał początek teorii grup. Grupy u niego występujące to grupy permutacji zbioru skończonego. Pojawienie się ich w pracach Lagrange'a było całkiem naturalne – wiązało się to z zagadnieniem rozwiązywania równań algebraicznych w sposób *algebraiczny*.

Mówiąc jednak dokładniej, chodziło o zbadanie, ile różnych wartości może przyjmować funkcja wymierna pierwiastków wielomianu, jeżeli permutować te pierwiastki na wszystkie możliwe sposoby.

Inny ważny przykład grupy u Lagrange'a, to *grupa binarnych form kwadratowych z kompozycją* [La]. Lagrange rozważa binarne formy kwadratowe

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

ze współczynnikami całkowitymi a, b, c i wyróżnikiem $D = b^2 - 4ac$. Forma kwadratowa $F(x, y)$ o wyróżniku D jest *kompozycją* form binarnych f i g o wyróżniku D, gdy istnieją formy B_1 i B_2, dwuliniowe względem x, y i w, z, takie, że

$$f(x, y) \cdot g(w, z) = F(B_1(x, y; w, z), B_2(x, y; w, z)),$$

tzn. gdy $B_i(x, y; w, z) = a_i xw + b_i xz + c_i yw + d_i yz$, $i = 1, 2$, gdzie $a_i, b_i, c_i, d_i \in Z$. Dwie *formy* f i g *są równoważne*, gdy istnieją $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$, takie że $\alpha\gamma - \beta\delta = \pm 1$ i $g(x, y) = f(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y)$. Na przykład, jeżeli $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$, a $F(X, Y) = X^2 + 5Y^2$, to F jest kompozycją f z f, bo

$$(2x^2 + 2xy + 3y^2)(2w^2 + 2wz + 3z^2) = (2xw + xz + yw + 3yz)^2 + 5(xz - yw)^2.$$

Grupa binarnych form kwadratowych to zbiór klas równoważności binarnych form kwadratowych o danym wyróżniku D z kompozycją jako działaniem grupowym. Formalnym pojęciem grupy Lagrange jednak nie posługiwał się. W późniejszym okresie rozwój teorii grup toczył się dwutorowo – z jednej strony były to grupy permutacji i ich zastosowania do teorii równań algebraicznych (Ruffini, Abel, Galois, Betti, Jordan), z drugiej zaś strony pojawiły się różne konkretne grupy u Gaussa, Dirichleta i innych. Formalna aksjomatyzacja pojęcia grupy (Cayley) nie wniosła w istocie wiele nowego, była raczej próbą zwrócenia uwagi na to, że istota elementów nie odgrywa większej roli, a jedynie ich własności algebraiczne, takie jak rzędy elementów, generowanie itp. Początek wieku XX można uznać za koniec wstępnego okresu rozwoju teorii grup. W tym czasie ukształtowane już było zarówno samo pojęcie grupy, jak też pojęcia pokrewne.

Podobny rozwój miały inne pojęcia algebry: pojęcie pierścienia, ciała, przestrzeni liniowej. Zacznijmy na początek od tego ostatniego pojęcia.

Pojęcie to wyartykułował, zresztą bardzo nieprecyzyjnie, Grassmann w 1844 i niezależnie, jedynie dla przestrzeni skończenie wymiarowych, podał je Arthur Cayley o rok wcześniej. Pojęcie to pojawiło się poniekąd za wcześnie – obaj nie umieli sobie z nim poradzić. Mimo to Grassmann sformułował wiele niebanalnych twierdzeń tej teorii, np. różne twierdzenia o wymiarze przestrzeni [Wi 1]. Nie bardzo umiano poradzić sobie również z pojęciem liniowej niezależności i dopiero Dedekind, stosując je jedynie do ciał, zbudował elegancką teorię liczb algebraicznych, a pojęcie liniowej niezależności, zastosowane do automorfizmów ciała, pozwoliło mu na uproszczenie teorii Galois. Trzeba jednak było czekać do lat dwudziestych XX wieku na to, aby tacy uczeni jak Emma Noether, Emil Artin, czy też van der Waerden docenili rolę abstrakcyjnego pojęcia przestrzeni liniowej. Podobnie rzecz się miała z pojęciem ciała i pierścienia. Pojęcia te, nazywane i nie nazywane, występują już u Kroneckera, a później, w precyzyjniejszej formie, u Dedekinda. W użyciu było już pojęcie ciała liczbowego, w przeciwieństwie do ciał Galois. Pierwsze definiowane było jako podciało ciała liczb zespolonych; drugie było dość dziwnym, jak na owe czasy, obiektem, zdefiniowanym przez Galois, którym zaczęto się swobodniej posługiwać dopiero na początku XX wieku (np. Dickson). Nie zmienia to faktu, że pierwszym pierścieniem, poza pierścieniami wielomianów i pierścieniami liczbowymi, których *implicite* używał już Euler, był pierścień $\mathbb{Z}_n$ reszt modulo n, *de facto* wprowadzony (choć nie nazwany) przez Gaussa w jego *Disquisitiones Arithmeticae* z 1801 roku. Drugim ważnym bodźcem w badaniu pierścieni i ciał, i to niekoniecznie przemiennych, było odkrycie kwaternionów przez Hamiltona. Zainteresowanie pierścieniami liczbowymi, a głównie pierścieniami generowanymi nad pierścieniem liczb całkowitych przez pierwiastki z jedności stopnia n, wiązało się z sukcesami Kummera wokół Wielkiego Twierdzenia Fermata i nadziejami, że stworzone przez niego metody pozwolą na definitywne rozwiązanie tego problemu. Jak bardzo to było złudne wskazuje błędny dowód Lamé. Twierdził on w 1844, że $\mathbb{Z}[\varepsilon_n]$ (gdzie $\varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$) jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu, co w łatwy sposób pozwala już dowieść prawdziwości Wielkiego Twierdzenia Fermata dla wykładnika n, tzn. dowieść, że równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z $(n > 2)$. Do wyniku Lamé przyznawał się Liouville, aż do chwili, gdy okazało się, że jest to wynik fałszywy.

Algebra macierzy, zbudowana przez A. Cayleya (1858), badana później przez wielu innych, m.in. przez Sylvestra i kapitana artylerii Laguerre'a (1867), dostarcza wielu przykładów pierścieni nieprzemiennych. Pojawiły się nawet próby budowania algebry uniwersalnej – próby takie podjęli: Sylvester w latach osiemdziesiątych i nieco później Whitehead. Wychodząc z różnych przesłanek, mimo niezbyt precyzyjnego i konsekwentnego wyłożenia swoich koncepcji, doszli (niezależnie) do tego samego wniosku, że pożądanym byłoby badanie obiektów – zbiorów wyposażonych w kilka działań, spełniających takie czy inne układy aksjomatów. Dla Sylvestra podstawowym przykładem i wzorem do uogólnień była algebra macierzy Cayleya, dla Whiteheada – niemal cała matematyka, ale głównie algebry Boole'a (jeszcze tak nie nazwane) i pojęcia algebraiczne Grassmanna, które zdołał nieco uściślić.

Sukces metody aksjomatycznej, jakim niewątpliwie był wynik Hilberta w *Die Grundlagen der Geometrie* (1899), skierował większą uwagę świata naukowego na systemy aksjomatyczne. Co więcej, dawał prawo przypuszczać, że wszystko da się zaksjomatyzować. Wiarę tę rozpowszechniał w jakimś stopniu sam Hilbert, czego dobitnym dowodem może być jego II Problem, ogłoszony na Kongresie Matematycznym w Paryżu w roku 1900.

Nic więc dziwnego, że wielu matematyków, szczególnie w Nowym Świecie, zaczęło ugruntowywać podstawy algebry, a ściślej – budować precyzyjne układy aksjomatów dla grup, ciał, pierścieni, algebr nad ciałami, algebr Boole'a, przestrzeni liniowych itp. Prace na ten temat, głównie w Transactions of the American Mathematical Society, zamknęły okres kształtowania się podstawowych pojęć algebry. Umownie, okres ten można uważać za zamknięty przez pierwszą Wojnę Światową. W latach dwudziestych pojawiła się pierwsza książkowa próba aksjomatyzacji algebry – jest nią książka Becka [Be]. Co prawda klasyczny podręcznik Webera [Web 2] nie stroni od definicji, jednak dopiero książka Becka zawiera wykład aksjomatyczny. Za ostateczne zamknięcie okresu *pionierskiego* w algebrze uznać trzeba dzieło van der Waerdena (por. [Wi 3]).

W artykule naszkicujemy nieco dokładniej omówione tu pojęcia, jak też niektóre inne uwarunkowania rozwoju pojęć algebry abstrakcyjnej.

2. Powstanie teorii grup

Za początkowy okres tworzenia teorii grup uznać należy lata 1770–1846, tj. okres od pierwszych wyników Lagrange'a dotyczących grup permutacji, aż do ukazania się *Exercises* Cauchy'ego w 1844 roku [Cau 2]. W następnych dwóch latach Cauchy opublikował w Comptes Rendus Paryskiej Akademii Nauk dalsze prace z teorii grup.

Cofnijmy się jednak do okresu wcześniejszego. Główne wyniki Lagrange'a zawarte są w jego pracy "Réflexions sur la résolution algébrique des equations", opublikowanej w sprawozdaniach Berlińskiej Akademii Nauk z 1770–1771.

W pracy tej Lagrange zajmuje się *algebraicznym rozwiązywaniem równań*, tzn. pokazuje, jak rozwiązanie równania algebraicznego stopnia n można zredukować do rozwiązania kilku równań dwumiennych i równania stopnia n, nieco prostszej postaci, aniżeli równanie wyjściowe, o ile $n > 4$. W pracy przeanalizowane są wyniki jego poprzedników: Ferrariego, Cardana, Tschirnhausena, Eulera. Jednak przede wszystkim Lagrange bada liczbę wartości, które może przyjmować funkcja wymierna, jeżeli permutować jej zmienne. Tym samym pojawia się w pracy grupa permutacji S_n, oraz jej podstawowe własności. Explicite stwierdzone jest twierdzenie orzekające (we współczesnej terminologii), że rząd grupy tych permutacji $g \in S_n$, dla których $w(X_1, \ldots, X_n) = w(X_{g(1)}, \ldots, X_{g(n)})$ identycznościowo (w – dana funkcja wymierna) jest dzielnikiem $n!$. W pracy Lagrange konstruuje także równanie pomocnicze do rozwiązania równania algebraicznego stopnia n, zwane dziś *rezolwentą Lagrange'a* (szczegóły można znaleźć w [Wi 2]).

Wyniki Lagrange'a przyswoił Ruffini, stosując je do definitywnego rozstrzygnięcia zagadnienia, które było fundamentalne nie tylko w algebrze, ale w całej matematyce. Stosując podstawowe własności grup permutacji Ruffini udowodnił w 1799 w książce *Teoria Generale della Equazioni*, że ogólne równanie algebraiczne stopnia większego niż 4 nie jest rozwiązalne algebraicznie, tzn. nie można go zredukować do rozwiązania skończenie wielu równań dwumiennych. Mimo, że podał pięć różnych dowodów swego twierdzenia, jego wynik został przyjęty sceptycznie. Jedni nie wierzyli, że niemożliwe jest to, co uważali za pewne, a jedynie nie udowodnione, inni mieli zastrzeżenia co do dowodu twierdzenia – dowód był długi, trudny i używał mało znanych pojęć, dla wielu wreszcie był lekarzem, a więc w pewnym sensie profanem, zajmującym się matematyką. Jego dowód nierozwiązalności ogólnego równania stopnia co najmniej piątego sprowadzał się do podstawowego faktu, że grupa A_5 permutacji parzystych pięciu elementów generowana jest przez cykle długości trzy. Ponad ćwierć wieku później Abel, stosując podobne metody, udowodnił twierdzenie Ruffiniego, ale tylko dla równania stopnia 5. Dowód Abela też nie był całkowicie poprawny, jednak luka w jego dowodzie była łatwiejsza do przełknięcia przez ówczesnych matematyków. Nieco wcześniej, bo w 1815 roku Cauchy badał dalsze własności grup S_n [Cau 1]. Nie można się zgodzić z opinią Burnsa [Bu], że wspomniana praca Cauchy'ego była mało ważna w rozwoju teorii grup.

Formalnie rzecz biorąc termin *grupa* wystąpił po raz pierwszy u Galois, jednak raczej w znaczeniu zbioru, aniżeli grupy, bowiem tego samego terminu używał Galois na oznaczenie warstwy. W małym objętościowo, lecz bogatym w treści dorobku Galois znajdujemy następujące ważne fakty teorii grup:

1. Grupa A_5 jest prostą grupą nieprzemienną.
2. Część wspólna dwóch podgrup S_n jest jej podgrupą.
3. Jeżeli liczba pierwsza dzieli rząd grupy, to zawiera ona podgrupę tego rzędu (twierdzenie to znał już Cauchy [Cau 1]).

Jednakże, mimo tych ważnych przyczynków do teorii grup, za formalnego twórcę teorii grup uznać jednak należy Cauchy'ego. Podstawowe wyniki dotyczące grup S_n, ich podgrup, tranzytywności, można znaleźć w jego *Exercises* z 1844 roku [Cau 2]. Jednakże prace Cauchy'ego zawierają sporo błędów, zarówno natury logicznej, jak i merytorycznej. Nieco wcześniej, bo już w pracach Legendre'a, Gaussa, a potem Dirichleta, wystąpiły inne grupy. Są to m.in. wspomniana wcześniej grupa klas binarnych form kwadratowych czy też grupa jednostek ciała liczb algebraicznych. Gauss w *Disquisitiones Arithmeticae* nie tylko dowodzi, że zbiór klas form jest grupą, ale także wykazuje skończoność tej grupy. Fakt ten znany był już Legendre'owi. Żaden z tych faktów nie jest banalny i każdy wymaga precyzyjnego dowodu. Liczne twierdzenia w tym dziele to często szczególne, lecz ważne przypadki podstawowych twierdzeń teorii grup.

Formalną definicję grupy podał po raz pierwszy Cayley [Cay 3–5]. Uściślił ją później i przeformułował w pracy [Cay 6] z 1878 roku. Cayley definiuje pojęcie grupy w cytowanych pracach, odwołując się do Galois, od którego, jak pisze, zapożyczył termin *grupa*. Następnie wprowadza tabelki działań dla grup, zapis w postaci: zbiór generatorów i relacje pomiędzy generatorami. W pracy [Cay 5] podany jest opis wszystkich nieizomorficznych grup rzędu 8. W późniejszych latach Cayley nadal pasjonował się opisem wszystkich nieizomorficznych grup danego (skończonego) rzędu. Np. w 1889 podał opis wszystkich grup rzędu nie większego niż 12, w postaci tabelek działań dla tych grup [Cay 7]. Cayley, oprócz grup opisanych za pomocą tabliczek, podaje też przykłady z całej matematyki: grupa klas binarnych form kwadratowych, n-wymiarowa grupa liniowa, grupa kwaternionowa. Do aksjomatycznego pojęcia grupy doszedł także Kronecker w roku 1870 [Wu].

W 1852 roku Betti uściślił wyniki Galois, w szczególności podał dalsze własności grup. Jednak jego praca nie była doceniona przez współczesnych mu matematyków (por. [Wi 2]) i dopiero traktat Jordana z 1870 o permutacjach i rozwiązywaniu równań algebraicznych spełnił podwójne zadanie – z jednej strony upowszechnił teorię Galois, z drugiej zaś, co nie mniej ważne – dał początek nowoczesnej teorii grup. I choć nie można tu nie wspomnieć o pracach Liego, to jednak, jak sądzę ich znaczenie leży poza teorią grup.

Początkowy okres rozwoju teorii grup to okres rozwoju teorii grup skończonych. Jak już wspomniano na wstępie, mniej lub bardziej udane próby aksjomatyzacji różnych działów matematyki, objęły też pojęcie grupy. Okres mało precyzyjnych aksjomatów, zapoczątkowany przez Cayleya w 1854 roku, można uznać za zamknięty na początku naszego stulecia, kiedy to tacy autorzy, jak Dickson, Huntington czy też Moore przedyskutowali i przeanalizowali różne definicje grupy. Ich prace (por. bibliografia) kończą wstępny okres rozwoju teorii grup. Dopiero jednak książka van der Waerdena *Moderne Algebra* ugruntowała powszechnie do dziś używany układ aksjomatów.

3. Przestrzenie liniowe i algebry macierzy

Trudno dokładnie powiedzieć, kiedy po raz pierwszy w precyzyjny sposób sformułowane zostało pojęcie przestrzeni liniowej. Z całą jednak pewnością za pierwszą próbę określenia tego pojęcia uznać należy dwie prace: dzieło Grassmanna [Gra] z 1844, które zresztą tak źle sprzedawało się, że jego wydawca, Otto Wigand zdecydował się wycofać książkę z rynku (dzięki czemu wiele lat później egzemplarze antykwaryczne osiągały zawrotne ceny), oraz krótka praca Arthura Cayleya [Cay 1] z 1843 roku. Cayley ograniczył się do definicji przestrzeni n-wymiarowej, podając, po prostu, opis przestrzeni K^n, gdzie K jest ciałem. Drugie wydanie *Ausdehnungslehre* z 1862 podaje już precyzyjniejszą definicję przestrzeni liniowej – pozostawia ona jednak jeszcze wiele do życzenia. Grassmann definiuje ponadto różne działania na wektorach, które staną się obiektem intensywnych badań wielu uczonych w XIX wieku: iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy; definiuje liniową niezależność, a wreszcie – wymiar (skończony) przestrzeni liniowej. Jednak skrzętnie unika posługiwania się tymi pojęciami, przechodząc szybko do działań na wektorach i zastosowań geometrycznych zbudowanej teorii.

Pojęcie macierzy oraz ogólne własności algebry macierzy są zasługą Cayleya. Pojęcie macierzy oraz mnożenie macierzy zdefiniował w pracy z 1855 (por. [Wi 1]), podając od razu zastosowanie wprowadzonych pojęć do rozwiązywania układów równań liniowych (wzory Cramera). Między innymi we wspomnianej pracy zdefiniowana została macierz odwrotna. W ciągu następnych 15 lat Cayley dość gruntownie przebadał algebrę macierzy, oraz podał jej zastosowania. Udowodnił m.in. dla macierzy 2×2 i 3×3 twierdzenie nazywane dziś twierdzeniem Hamiltona–Cayleya. Trzeba tu podkreślić, że miał on, często mimo braku precyzji w formułowaniu swoich wyników, ogromny talent w budowaniu, rozwijaniu i porządkowaniu nowo powstałych dyscyplin. Tak było z teorią grup, tak było z algebrą macierzy, którą nie tylko stworzył, ale usystematyzował, zdefiniował większość do dziś używanych pojęć, oraz wprowadził terminy, które także wytrzymały próbę czasu.

Przez cały XIX wiek pojęcie przestrzeni liniowej nie było doceniane – nie było w użyciu z jednym chlubnym wyjątkiem: R. Dedekind w swoim słynnym XI Suplemencie, jak też w wykładach w Getyndze (1857/58) z teorii Galois, traktując skończone rozszerzenie ciała liczbowego jako przestrzeń liniową nad swoim podciałem, uzyskuje podstawowe twierdzenia teorii w sposób elegancki i zwięzły.

Bardziej udana próba zdefiniowania pojęcia abstrakcyjnej przestrzeni liniowej pochodzi od Whiteheada z 1898 [Wh]. Jest to niemal w pełni poprawna (z dzisiejszego punktu widzenia) definicja przestrzeni liniowej – wszystko jest jednak poprzedzone bardzo ogólnymi rozważaniami o *algebrze uniwersalnej*, a nawet rozważaniami o charakterze filozoficznym. Jako ciekawostkę można tu odnotować fakt, że Whitehead definiował n-wymiarową przestrzeń afiniczną, choć explicite nie zostało to w jego dziele nazwane.

Rozkwitająca wkrótce po odkryciu kwaternionów ogólna teoria skończenie wymiarowych algebr nad ciałami doczekała się nie tylko intensywnego rozwoju w pracach m.in. Peirce'a, Frobeniusa i innych, ale także precyzyjnych aksjomatów na początku XX stulecia (Dickson, Huntington, Wedderburn). Warto zwrócić uwagę, że wbrew panującym opiniom, nie w XX, ale już w połowie XIX wieku znane były reprezentacje macierzowe algebr, a nawet ciał: Sylvester [Sy 1-2] zauważył już w 1883 roku, że kwaterniony można uważać za macierze zespolone specjalnej postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. Podobne reprezentacje znalazł dla liczb zespolonych i innych ciał. Warto też wspomnieć w tym miejscu, że Sylvester zafascynowany był stworzoną przez Cayleya dyscypliną: algebrą macierzy. Nie tylko posługiwał się często w swoich pracach algebrą macierzy, ale też, nie bez słuszności nadał jej charakter uniwersalny. Świadczy o tym praca [Sy 3] z 1884 roku. W pracy tej Sylvester podjął próbę precyzyjnego zdefiniowania algebry macierzy oraz podał dowody podstawowych jej własności.

4. Rozwój pojęcia ciała i pierścienia

Jak już było wspomniane we wstępie, pojęcia ciała i pierścienia zaczęły kształtować się na przełomie XVIII i XIX wieku. Już Euler w połowie XVIII stulecia posługiwał się liczbami postaci $a + db$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi, a d jest pierwiastkiem z jedności stopnia trzy. Jednakże dopiero Legendre i Gauss zaczęli konsekwentnie używać takich obiektów. Były to różne pierścienie i ciała złożone z liczb zespolonych specjalnej postaci. Pierwszy nieliczbowy przykład, jakim posługiwał się Gauss to pierścień $\mathbb{Z}_n$ reszt modulo n. W *Disquisitiones Arithmeticae* Gauss używał swobodnie także pierścieni wielomianów, dowodząc wielu podstawowych twierdzeń, np. słynnego *Twierdzenia Gaussa.* Pierścień $\mathbb{Z}[i]$ liczb postaci $a + ib$ $(a, b \in Z)$ do dziś nazywany jest pierścieniem Gaussa.

Postępujący rozwój matematyki dostarczył nowych obiektów: Galois konstruował swoje *liczby zespolone*, tj. zbudował *ciała Galois*, a więc skończone rozszerzenia ciała $\mathbb{F}_p$ reszt modulo p (1829), a Hamilton – słynne kwaterniony (*Quaternions*, Dublin 1853). Kummer, pracując przez pół wieku nad Wielkim Twierdzeniem Fermata, posługiwał się ciałami cyklotomicznymi $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ (ε_n – n-ty pierwiastek z 1), lub też pierścieniami liczbowymi $\mathbb{Z}[\varepsilon_n]$. Jednak w żadnej ze swoich prac nie używa specjalnej nazwy dla obiektów, którymi się posługiwał. Nazywał je po prostu: *n-ten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen* w przypadku ciał cyklotomicznych, nazywając pierścienie $\mathbb{Z}[e_n]$ *nombres entieres.*

Kronecker, naśladując w jakimś stopniu konstrukcję Galois ciał $\mathrm{GF}(p^n)$, podał ogólną konstrukcję ciała, w którym dany wielomian nieprzywiedlny f o współczynnikach z ciała K ma pierwiastek, a nawet ciała, w którym leżą wszystkie pierwiastki tego wielomianu. Konstruuje mianowicie ciało $K[X]/(f)$, w którym wielomian f ma pierwiastek. Wcześniej na ten sam temat ukazała się praca Cauchy'ego [Cau 3]. Najważniejszym rezultatem tej pracy była konstrukcja implicite liczb zespolonych jako pierścienia ilorazowego $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$. Prowadzi to bezpośrednio do formalnej konstrukcji ciała liczb zespolonych jako przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z odpowiednio określonymi działaniami, czyli do konstrukcji Hamiltona z 1837 roku [Ham]. Hamilton definiuje w $\mathbb{R}^2$ dwa działania:

odejmowanie

$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

oraz mnożenie

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2),$$

dowodząc, że otrzymujemy liczby zespolone. Cytuje w tym miejscu *Cours d'Analyse* Cauchy'ego z 1821 roku (str. 176). Wstęp [Ham] do dzieła *Quaternions* jest dziś znacznie ciekawszy od samego dzieła. Hamilton opisuje tam kolejne próby zdefiniowania w logiczny sposób, jak w $\mathbb{R}^2$, działań w $\mathbb{R}^3$ i uzasadnia, dlaczego to mu się nie udało. Następnie przechodzi do $\mathbb{R}^4$ i tu udaje mu się odpowiednia konstrukcja, znana dziś jako konstrukcja kwaternionów. Wynika stąd niezbicie, że odkrycie kwaternionów nie było przypadkiem, lecz poprzedzone zostało gruntownymi poszukiwaniami i próbami przeniesienia znanych mu konstrukcji na przestrzenie wymiaru większego niż 2. Odkrycie kwaternionów tak zafascynowało Hamiltona, że wydrapał na moście w Dublinie (Brougham Bridge) notatkę o swoim odkryciu. Ponieważ ten fragment mostu nie zachował się do dziś, więc władze Dublina uczciły ten chuligański wybryk tablicą następującej treści:

Here as he walked by
*on the **16th** of October **1843***
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it in a stone on this bridge.

Jak już wspomniano w poprzednim rozdziale, reprezentację kwaternionów w postaci odpowiednich macierzy zespolonych znalazł Sylvester [Sy 1] w 1883, wbrew temu, co pisze Juszkiewicz w [Ma], że odkrycia tego dokonał Cayley [Cay 2] w 1858 (por. [Ma], str. 75). W książce [Ma] są też inne błędy historyczne.

Pojęcie ciała ukształtowało się w pracach Kummera, Kroneckera i Dedekinda. Jedną z pierwszych prób zdefiniowania ciała można znaleźć w książce Hankla [Han] z 1867; nie wywarła ona jednak większego wpływu na ówczesnych matematyków. Pierwszą definicję ciała podał Dedekind z X Suplemencie do wykładów Dirichleta z teorii liczb (1871). Dedekind pisał tam: *Unter einem Körper wollen wir jedes System von unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen verstehen, welches in sich so abgeschlossen und vollständig ist, daßdie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von je zwei dieser Zahlen immer vieder eine Zahl desselben Systems hervorbringt.*

Jak widać, mimo pełnej precyzji, definicja ta jest dość ograniczona. W szczególności nie obejmuje ona obiektów już znanych, takich, jak ciała Galois, czy też ciała funkcji wymiernych wielu zmiennych, którymi posługiwał się Kronecker. Jest to całkowicie zrozumiałe – Dedekind zajmował się w tym czasie arytmetyką ciał liczbowych. Różnica pomiędzy definicją ciała u Dedekinda i Kroneckera polega na tym, że Dedekind używa aksjomatów, natomiast Kronecker podaje postać elementów. Ponadto Kronecker posługiwał się równoważnym terminem *Rationalitätsbereich.* Początkowo Dedekind rozpatrywał jedynie ciała przemienne. Później, w 1885 dopuścił w definicji nieprzemienność mnożenia, rozważając skończenie wymiarowe algebry z dzieleniem nad danym ciałem [Pu 1]. Tematyką tą zajmował się w tym czasie także Frobenius.

W §163 X Suplementu podał Dedekind definicję ideału w pierścieniach liczb algebraicznych całkowitych ciał liczb algebraicznych. Dedekind i Weber uogólnili w 1882 pojęcie ciała, ideału, elementu całkowitego nad pierścieniem itd., przenosząc te pojęcia na przypadek ciał funkcji algebraicznych. Wydaje się, że prace Dedekinda nie miały wielkiego wpływu na twórczość Kroneckera w omawianej dziedzinie [Pu 1]. Kronecker unikał abstrakcji, o ile nie widział bezpośredniego jej zastosowania. Np. w 1870 w pracy o liczbie klas ciała liczb algebraicznych (Werke, Bd.1, 271–282) podał definicję skończonej grupy abelowej stosując ją jedynie do grupy klas ideałów [Wu].

Ogólną definicję ciała podał Weber w 1893 [Web 1]. W jego dziele [Web 2] podana jest też definicja grupy i pierścienia w formie niewiele odbiegającej od definicji dziś używanych. Hilbert w swoich pracach posługuje się już terminem *ciało* (Körper), odnosząc go do ciał liczbowych i ciał funkcji algebraicznych.

Początek XX stulecia przynosi ostateczne sformułowanie abstrakcyjnego pojęcia ciała. Stworzona przez Sylvestra w latach osiemdziesiątych XIX w. szkoła algebraików w John Hopkins University, jak też szkoła Benjamina Peirce'a w Harvardzie [Pa], prowadzą badania w zakresie algebry. Wyniki tych prac publikują w nowo założonym czasopiśmie *Transactions of the American Mathematical Society*. Wymieńmy tu tylko kilku ważniejszych autorów: Dickson ([Di 1–3]), Huntington ([Hu 1–6]), Wedderburn [We].

Praca Steinitza [St] z 1910 zamyka okres kształtowania się pojęcia ciała. Praca ta zawiera systematyczny wykład teorii ciał i do dziś nie straciła swojego znaczenia.

Kształtowanie się pojęcia pierścienia zakończone zostało w latach dwudziestych naszego stulecia, dzięki pracom Emmy Noether, van der Waerdena, Emila Artina i innych. Książka Becka [Be] z 1926 zawiera już aksjomatyczny wykład algebry. Dopiero jednak *Moderne Algebra* van der Waerdena zamyka ostatecznie okres kształtowania się pojęć aksjomatycznych w algebrze. Od tego czasu algebra jest nauką aksjomatyczną.

5. Próby budowania algebry uniwersalnej

Druga połowa XIX w. oprócz intensywnego rozwoju poszczególnych działów algebry przynosi też tendencje scalające [No 2]. Praca Sylvestra [Sy 3] z 1884 poświęcona jest, co prawda, tylko algebrze macierzy, formalnym definicjom działań i własnościom tych działań. Zawiera prócz tego zarys ogólnej koncepcji algebry uniwersalnej. Próby zbudowania algebry w nowy sposób sięgają jeszcze czasów Newtona. Próbą taką była *Arithmetica literalis*. W XIX w. próby te podjęli na nowo Peacock, Gregory i de Morgan. Charakteryzując krótko punkt widzenia Sylvestra można powiedzieć, że miał on koncepcję algebry uniwersalnej jako teorii obejmującej wszystkie znane mu systemy algebraiczne. Ograniczoność jego punktu widzenia polegała na tym, że rozpatrywał jedynie skończenie wymiarowe algebry nad ciałami, tzw. liczby hiperzespolone. Aparatem tej teorii był język macierzy. Jak już było wspomniane, Sylvester zauważył po raz pierwszy, że różne algebry hiperzespolone to po prostu pewne algebry macierzowe [Sy 1]. Wszystko to sprawiło, że Sylvester cenił bardzo wyniki Cayleya, jako twórcy arytmetyki macierzy, nie doceniając równocześnie wyników Grassmanna.

Znacznie dalej zaszedł Whitehead [Wh] w budowaniu ogólnych koncepcji w algebrze. Jego książka, planowana na kilka tomów, doczekała się tylko tomu pierwszego. Książka ta była w jakimś stopniu wprawką przed napisaniem monumentalnego dzieła wspólnie z B. Russelem *Principia Mathematica* (tomy I–III, 1910–1913). Poglądy Whitheada na matematykę przedstawione są w obszernym wstępie do książki [Wh]. Jeżeli matematyka była dotychczas nauką o liczbach (ew. o innych wielkościach) i przestrzeni, które dane nam były poprzez doświadczenie, to tylko dlatego, że nie były znane inne systemy myślenia dedukcyjnego, które ilustrowałyby naszą koncepcję matematyki. Cel swojej pracy widzi on w stworzeniu algebry uniwersalnej, która dowiedzie jedności całej matematyki. Ideałem matematyki będzie stworzenie rachunku algebraicznego, który zagwarantuje poprawność procesu myślenia w dowolnej dziedzinie. Podejście Whiteheada jest teoriomnogościowe. Jednakże w swoich rozważaniach ogranicza się on jedynie do algebr z dwoma binarnymi działaniami, które nazywa odpowiednio dodawaniem i mnożeniem. Zatem jego *algebry uniwersalne* nie obejmują takiego pojęcia, jak grupa, mimo, że posługiwał się tym pojęciem. W ramach jego koncepcji nie mieści się też pojęcie ciała. Główną podstawą konstrukcji i rozważań Whiteheada były prace Boole'a, Grassmanna i Hamiltona. Każdy system dedukcyjny uważał za matematykę. We wstępie do *Algebry uniwersalnej* pisał m.in.:

Mathematics in its widest signification is the development of all types of formal, necessary, deductive reasoning.
The reasoning is formal in the sense that the meaning of propositions forms no part of the investigation. The sole concern of mathematics in the inference of proposition from proposition. The justification of the rules of inference in any branch of mathematics is not properly part of mathematics: it is the business of experience or of philosophy.
I dalej:
Thus no external verification of definitions is required in mathematics, as long as it is concerned mearly as mathematics.
W tym samym duchu wyraża pogląd na algebrę:
Ordinary algebra in its modern developments is studied as being a large body of propositions, inter-related by deductive reasoning, and based upon conventional definitions which are generalizations of fundamental conceptions.

Za twórców Algebry Uniwersalnej Whitehead uważał Hamiltona i de Morgana, gdyż oni jako pierwsi pokazali w przejrzysty sposób ogólne możliwości symbolizmu algebraicznego.

Prace Sylvestra i Whiteheada o algebrze uniwersalnej dość dobrze ukazują tendencje panujące w matematyce w ostatnich latach XIX wieku. Dokładniejsza analiza rozwoju matematyki w tym okresie pozwala dojść do wniosku, że brak było tendencji do scalania i uogólniania pojęć w celu tworzenia jednolitych, ogólnych teorii. Z tego punktu widzenia prace obu autorów są cenne i ważne, gdyż były próbą takiej właśnie unifikacji w zakresie algebry, a w przypadku Whiteheada nie tylko algebry, ale niemal całej matematyki.

6. Omówienie

W artykule zostało naszkicowane, i to zaledwie pobieżnie, kształtowanie się podstawowych pojęć algebry. Niektóre zagadnienia zostały tylko zasygnalizowane (prace Boole'a, de Morgana, rozwój teorii pierścieni – związki z arytmetyką i geometrią algebraiczną), na inne brakło miejsca. Wiele zagadnień posiada już obszerną bibliografię, żeby wymienić tylko większe opracowania: [Da], [ENP], [Ma], [No 1], [Pa].

Mamy jednak nadzieję, że przedstawiony tu w zarysie rozwój podstawowych pojęć algebry pozwoli czytelnikowi wyrobić sobie właściwy pogląd zarówno na algebrę, jak też na jej rozwój i rolę w matematyce.

Bibliografia

[Be] H. Beck, *Einführung in die Axiomatik der Algebra*, Walter de Gruyter, 1926.

[Bo 1] G. Boole, *Exposition of a general theory of linear transformations*, Cambridge Mathematical Journal 3 (1841), 1–20.

[Bo 2] —, *Exposition of a general theory of transformations*, ibidem 3 (1841), 106–119.

[Bo 3] —, *An investigation of the laws of thought*, London Cambridge, 1854.

[Bu] J. E. Burns, *The foundation period in the history of group theory*, American Mathematical Monthly 20 (1913), 141–148.

[Cau 1] A. L. Cauchy, *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*, Journal de l'Ecole Polytechnique 17° Cahier, T.X, 1815. (Oeuvres de Cauchy, 2° s.T.I, 64–90)

[Cau 2] —, *Le Mémoire sur les Arrangements que l'on peut former avec des lettres données et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre. Exercises d'analyse et de physique mathématique*, Tome III, Paris 1844; Oeuvres de Cauchy, 2° s.,T. XIII, 171–282.

[Cau 3] —, *Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et de équivalences*, C.R. Acad. Sci. Paris 24 (1847), 1120. (Oeuvres de Cauchy 1° s., T.X, 312-323; No 369).

[Cay 1] A. Cayley, *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions,* Cambridge Mathematical Journal 4 (1843), 119–127. (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. I, No 11, 55-62).

[Cay 2] —, *A memoir on the theory of matrices*, Philos. Trans. 148 (1858), 17–37. (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. II, 475–496).

[Cay 3] —, *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $Q^n = 1$, Philosophical Magazine 7 (1854), 40–47. (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. II, No 125, 123–130).

[Cay 4] —, *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $Q^n = 1$. *- Second part,* Philosophical Magazine 7 (1854), 408–409 (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. II, No 126, 131–132).

[Cay 5] —, *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $Q^n = 1$. Third part, Philosophical Magazine 18 (1859), 34–37. (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. IV, No 243, 88–91).

[Cay 6] —, *On the theory of groups,* Proceedings of the London Mathematical Society 9 (1878), 126–133. (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. X, No 690, 324–330).

[Cay 7] —, *On the theory of groups,* American Journal of Mathematics 11 (1889), 139–157. (The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. XII, No 887, 639–656).

[Da] A. Dahan, *Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept de groupe*, Archive History Exact Sci. 23 (1980), No 4, 279–319.

[Di 1] L. E. Dickson, *Definition od a field by independent postulates*, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), 13–20.

[Di 2] —, *Definitions of a linear associative algebra by independent postulates*, ibidem 4 (1903), 21–30.

[Di 3] —, *Definition of a group and a field by independent postulates*, ibidem 6 (1905), 198–204.

[Ed] H.M.Edwards, *The genesis of ideal theory*, Archive History Exact Sci., 23 (1980), No 4, 321–378.

[ENP] H. Edwards, O. Neumann, W. Purkert, *Dedekinds "Bunte Bemerkungen" zu Kroneckers "Grundzüge"*, Archive History Exact Sciences 27 (1982), No 1, 49–85.

[Gra] H. Grassmann, *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre,* I wydanie: 1844, Leipzig, Verlag von Otto Wigand; II wydanie: 1862, *Die Ausdehnungslehre, Vollständig und in strenger Form.*

[Ham] W. R. Hamilton, *Preface to "Lectures on Quaternions"* Dublin, 1853. (The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, vol. III, Algebra; Edited for the Royal Irish Academy by H.Halberstam and R.E.Ingram, Cambridge University Press 1967, VI, 117–155).

[Han] H. Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung,* Leipzig, 1867.

[Hu 1] E. V. Huntington, *Definitions of a field by sets of independent postulates,* Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), 31–37.

[Hu 2] —, *Complete sets of postulates for the theory of real quantities*, ibidem 4 (1903), 358–370.

[Hu 3] —, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, ibidem 5 (1904), 288–309.

[Hu 4] —, *A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups*, ibidem 6 (1905), 17–41.

[Hu 5] —, *Note on the definitions of abstract groups and of fields be sets of independent postulates*, ibidem 6 (1905), 181–197.

[Hu 6] —, *A set of postulates for ordinary complex algebra*, ibidem 6 (1905), 209–229.

[Kr] L. Kronecker, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, J. Reine Angew. Math. 92 (1882), 1–122.

[La] J. L. Lagrange, *Recherches d'Arithmétique*, 1773–1775.

[Ma] *Matematika XIX veka, pod redakciej A. N. Kołmogorowa i A. P. Juszkiewicza*, (ros.), „Nauka", Moskwa 1978.

[Moo] E. H. Moore, *On a definition of abstract groups*, ibidem 6 (1905), 179–180.

[Mor] A. D. de Morgan, *On the Foundation of Algebra*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 7 (1841), part II, 173–188; no 2: ibidem 7 91841), part III, 287–300; no 3: ibidem 8 (1844), part II, 139–142; no 4: ibidem 8 (1847), part III, 241–254.

[No 1] L. Nový, *Origins of modern algebra*, Academia, Prague 1973.

[No 2] —, *Universalnaja algebra u Sylvestra i Whiteheada*, Istoriko-matematizeskije issledovanija, wypusk XXI (1976), 113–128.

[Pa] K. H. Parshall, *America's first school of mathematical research: James Joseph Sylvester at the Johns Hopkins University 1876–1883*, Archive History Exact Sciences 38 (1988), no 2, 153–196.

[Pu 1] W. Purkert, *Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs, NTM-Schriftenreihe Geschichte, Naturwissenschaften*, Technik und Medizin, Leipzig 10 (1973), No 2, 8–20.

[Pu 2] —, *Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie*, ibidem 13 (1976), No 2, 1–16.

[St] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, J. Reine Angew. Math. 137 (1910), 167–309.

[Sy 1] J. J. Sylvester, *On the involution and revolution of quaternions*, Philosophical Magazine 16 (1883), 394–396. (The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester; vol. IV, No 11, 112–117).

[Sy 2] —, *On quaternions, nonions, sedenions, etc.*, Johns Hopkins University Circulars, III (1884), 7–9. (The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester, vol. IV, No 14, 122–132).

[Sy 3] —, *Lectures on the principles of universal algebra*, Amer. J. Math. 6 (1884), 270–286. (The Collected Mathematical Papers of J.J.Sylvester, vol. IV, No 31, 208–224).

[We] J. H. M. Wedderburn, *Algebraic fields*, Annals of Mathematics 24 (1923), 237–264.

[Web 1] H. Weber, *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie*, Math. Annalen 43 (1893), 521–549.

[Web 2] —, *Lehrbuch der Algebra, 3 Bde*, Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1895–1896.

[Wh] A. N. Whitehead, *A treatise on universal algebra with applications*, vol. I, Cambridge: at the University Press, 1898.

[Wi 1] W. Więsław, *Poczatki algebry liniowej, Matematyka XIX wieku, Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 1988; 85–100.

[Wi 2] —, *Rozwój teorii równań algebraicznych*, ibidem, 101–123.

[Wi 3] —, *Nauczanie algebry w XIX i XX wieku* (preprint, 1988).

[Wu] H. Wussing, *O genezisie abstraktnogo ponjatja gruppy, Istoriko-matematičeskije issledovanija*, vypusk XVII (1966), 11–30.