

# O symetrii w fizyce

*Dariusz GRECH, Wrocław*

## 1. Wstęp

Od zarania dziejów idee symetrii fascynowały człowieka wytyczając kierunki jego intelektualnego, a więc i cywilizacyjnego rozwoju. Jeden z największych matematyków XX w. Hermann Weyl tak pisał [1]:

*Symetria, czy się ją określi w sposób mniej, czy bardziej szeroki, jest ideą, za pomocą której człowiek starał się przez wszystkie czasy ogarnąć myśl i tworzyć porządek, piękno i doskonałość.*

Najprostsze symetrie brył i figur stymulowały już w starożytności ewolucję w budownictwie i architekturze, co z kolei w zwrotnym sprzężeniu wpłynęło na powstanie i rozwój geometrii euklidesowej. Dziś tego typu symetrie określa się jako zewnętrzne, wizualne, gdyż można je łatwo zaobserwować na każdym kroku. W XIX w. zaczęto odkrywać inne symetrie, bezpośrednio niewidoczne, jakby ukryte przed człowiekiem, a związane z nieco bardziej abstrakcyjnymi formalizmami matematycznymi stosowanymi do opisu otaczającego nas świata. Początkowo istnienie takich symetrii uważano za interesującą ciekawostkę, nie zdając sobie sprawy z głębi tego odkrycia. Dopiero w bieżącym stuleciu przekonano się, że te tak zwane wewnętrzne symetrie mają fundamentalne znaczenie dla nauk przyrodniczych, a zwłaszcza fizyki.

Długa droga jaką rodzaj ludzki przebył przez te kilka tysiącleci – od czasów starożytnych po współczesne, pokazała, że symetrie można uznać za podstawową koncepcję przy budowie wszelkich fizycznych modeli świata, w którym żyjemy i to w rozmaitych skalach długości, czasu i energii – zarówno w mikro jak i makrokosmosie. Bez przesady można postawić tezę, że gdyby nie idee symetrii, nie zostałyby dokonane najdonioślejsze odkrycia fizyki XX wieku, jak chociażby powstanie teorii względności, zrozumienie istoty oddziaływań między cząstkami elementarnymi, poznanie ich właściwości czy też doniosłe w zastosowaniach odkrycia fizyki półprzewodników. Słowem nasze rozumienie przyrody zatrzymałoby się w początkach XX wieku. Siłę związku fizyki z symetrią najtrafniej ujął jeden z najwybitniejszych fizyków zajmujący się teorią oddziaływań fundamentalnych w następującym porównaniu [2]:

*Fizyków można określić jako myśliwych polujących na symetrie; w pewnym sensie różnią się oni od pozostałych ludzi tym, że odnajdują w Przyrodzie coraz bardziej ukryte i fundamentalne symetrie.*

Celem tego artykułu jest przybliżenie podstawowych koncepcji stosowanych w fizyce do ustalania związków między własnościami materii a symetrią. Skupimy się przy tym głównie, choć nie tylko, na fizyce wysokich energii, a więc tej dyscyplinie fizyki, która najwnikliwiej bada istotę wszelkich podstawowych oddziaływań w Przyrodzie, ustalając tym samym swoisty „kod genetyczny” materii, według którego narodziła się ona we Wszechświecie wiele miliardów lat temu i zgodnie z którym istnieje do dziś.

Symetrie, o których będziemy tu mówić, związane są z nieco bardziej abstrakcyjnymi strukturami matematycznymi stosowanymi przez fizyków do opisu otaczającego nas świata. Główne idee tu stosowane opisuję w następnych dwu paragrafach. Myślę, że warto się z nimi zapoznać, są bowiem podstawą współczesnego rozumienia przyrody materii nieożywionej. Pozostałe paragrafy poświęcone są omówieniu najbardziej spektakularnych wybranych przykładów zarówno wewnętrznych symetrii, ukrytych nawet przed najwnikliwszym ludzkim okiem, jak i przykładem tak zwanych symetrii zewnętrznych, związanych ze strukturą samego czasu i przestrzeni – areny, na której rozgrywa się nieustannie wielki spektakl wszystkich naszych obserwacji i doświadczeń.

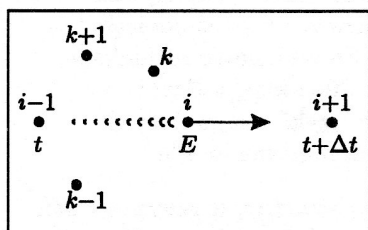
## 2. Układy dynamiczne w fizyce

W niedużym uproszczeniu można określić fizykę jako naukę zajmującą się głównie opisem i badaniem własności tzw. układów dynamicznych. Przez te ostatnie rozumiemy skończone lub nieskończone zbiory oddziałujących ze sobą obiektów. Założymy, że obiekty tworzące układy dynamiczne nie mają już struktury wewnętrznej tzn. przyjmiemy je za obiekty punktowe. Jest to pewne uproszczenie mające swe uzasadnienie w tym, że niemal we wszystkich interesujących przypadkach można zredefiniować oddziaływanie tak, by w ramach założonej dokładności zaniedbać strukturę wewnętrzną obiektów wytwarzających to oddziaływanie.

Zajmijmy się ogólnymi ideami w opisie układu dynamicznego. Najprostszym takim układem jest źródło oddziaływania i obiekt, na który oddziaływanie jest skierowane. Będą więc to, na przykład, dwa punkty materialne umieszczone w punktach  $\vec{x}_1$  i  $\vec{x}_2$  pewnego trójwymiarowego układu współrzędnych kartezjańskich, które w określony sposób przesyłają do siebie informacje o swym istnieniu, czyli oddziałują.

Przykładów układów dynamicznych można podać dowolnie dużo. W makrokosmosie jest to zarówno układ planetarny związany siłami grawitacyjnymi, jak i wiszący most, którego elementy oddziałują wzajemnie siłami sprężystości będącymi, w istocie, przejawem oddziaływań elektromagnetycznych wytwarzanych przez sieć krystaliczną metalu. W skali mikrokosmosu układem dynamicznym jest każdy poszczególny atom złożony z jądra i powłoki elektronowej utrzymywanych przez elementarne siły elektromagnetyczne, jak i kryształ będący zbiorem atomów oddziałujących efektywnymi siłami również pochodzenia elektromagnetycznego.

Metody stosowane w fizyce do opisu układów dynamicznych nie są jednolite i zależą od skali energii i odległości charakterystycznych dla danego układu. To stąd właśnie pochodzi budzący ciągle tyle emocji podział na fizykę klasyczną i kwantową. Ponieważ właściwe zrozumienie źródeł tego podziału jest kluczowe dla naszych dalszych rozważań postarajmy się go zrozumieć na prostym przykładzie.



Rys. 1. Układ dynamiczny oddziałujących poprzez zderzenia cząstek. Od zderzenia  $i$ -tej cząstki o energii  $E$  kolejno z  $(i-1)$ -ą oraz  $(i+1)$  upływa czas  $\Delta t$ . Działanie  $S$  jest proporcjonalne dla tej cząstki do  $E\Delta t$ , ta wartość określa czy opis klasyczny jest tu wystarczający.

Rozważmy układ złożony ze swobodnie poruszających się cząstek, które mogą od czasu do czasu zderzać się wymieniając wówczas informacje, czyli oddziałując. Popatrzmy na  $i$ -tą cząstkę (rys. 1). W chwili  $t$  zderzyła się ona z cząstką  $(i-1)$ , uzyskała pewną energię  $E$  i udaje się na spotkanie z cząstką  $(i+1)$ , co nastąpi w chwili  $(t+\Delta t)$ . Jeśli układ jest jednorodny, tj. jego elementy są równomiernie rozłożone w przestrzeni, to podobny czas  $\Delta t$  upłynie między zderzeniami dowolnej innej  $k$ -tej cząstki z  $(k-1)$ -ą i  $(k+1)$ -ą itd. Taki czas  $\Delta t$  można więc uznać za swoistą charakterystykę omawianego układu – elementarny czas trwania zmian w nim zachodzących. Drugą charakterystyką układu będzie średnia energia przypadająca na jedną cząstkę. Oznaczmy ją  $E$ . Wielkość  $S$  proporcjonalną do iloczynu tych charakterystyk

$$(1) \quad S \sim E \cdot \Delta t,$$

mającą wymiar (energia  $\times$  czas), nazywamy działaniem (precyzyjniejsza jego definicja będzie podana później).

Okazuje się, że jeśli

$$(2) \quad S \gg \hbar,$$

gdzie  $\hbar = (2\pi)^{-1} \cdot 6 \cdot 63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  jest pewną stałą uniwersalną Przyrody, zwaną stałą Plancka, to opis układu może być z powodzeniem dokonany przez przyporządkowanie poszczególnym składowym układem położenia  $\vec{x}$  w przestrzeni trójwymiarowej oraz tzw. pędów  $\vec{p}$ . Te ostatnie opisują już pewną dynamikę, jako że dla  $i$ -tej części układu (cząstki)

$$(3) \quad \vec{p}_i \stackrel{\text{df}}{=} m_i \vec{v}_i \equiv m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt},$$

gdzie  $m_i$  jest masą  $i$ -tej cząstki, a  $\vec{v}_i$  jej prędkością.

Tego sposobu opisu uczymy się wszyscy na lekcjach fizyki w szkole, a równania rządzące ewolucją czasową  $\vec{x}_i(t)$  oraz  $\vec{p}_i(t)$  znane są jako II zasada dynamiki Newtona:

$$(4) \quad m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_i, t)$$

Prawa strona równania (4) wyraża oddziaływanie  $i$ -tej cząstki z resztą układu i otoczeniem zwane siłą klasyczną. Wyraża się ona przez gradient w punkcie  $\vec{x}_i$  pewnego pola skalarnego  $V(\vec{x}, t)$  zwanego energią potencjalną.

Równania (4) są podstawą fizyki klasycznej zwanej też niutonowską. Tym samym układy dynamiczne spełniają warunek (2) i podlegające ewolucji czasowej zgodnie z równaniami Newtona (4) noszą nazwę *układów klasycznych*. Ich bardzo ważną cechą jest możliwość dokładnego, jednoczesnego zmierzenia zarówno wszystkich położenia jak i pędów (prędkości) składających się nań obiektów i to w dowolnej chwili czasu. Jest to wynikiem równań ewolucji (4), które będąc równaniami różniczkowymi drugiego rzędu na  $\vec{x}_i(t)$  mają jednoznaczne rozwiązanie przy zadanych warunkach brzegowych, np. znajomości  $\vec{x}_i(0)$ ,  $\vec{p}_i(0)$  w chwili  $t = 0$ .

Patrząc na warunek (2) odczytujemy, że układami klasycznymi będą te, które są złożone z obiektów o stosunkowo dużej energii i długich czasach oddziaływań  $\Delta t$ , a więc na przykład wszelkie układy o dużych rozmiarach liniowych (czas  $\Delta t$  jest odwrotnie proporcjonalny do tych rozmiarów). Jest tak dzięki bardzo małej wartości  $\Delta t$  w (2). Co się jednak stanie, gdy rozważany układ też będzie bardzo mały? Choćby jak atom? W takim przypadku działanie  $S$  dane w (1) przybierze również małą wartość porównywalną z  $\hbar$ . Będziemy zatem mieli

$$(5) \quad S \sim E \cdot \Delta t \sim \hbar$$

Układy, w których zachodzi powyższa relacja, nazywamy *kwantowymi*.

Olbrzymią niespodzianką dla fizyków na początku XX wieku było odkrycie, że takie układy nie stosują się do praw ewolucji Newtona (4). Co więcej, nie można w nich jednocześnie zmierzyć z zadaną, dowolną dokładnością położenia i pędów. Dokładności tych pomiarów – odpowiednio  $\Delta x_i$  i  $\Delta p_i$  związane są tzw. relacją nieoznaczoności Heisenberga:

$$(6) \quad \Delta x_i \cdot \Delta p_i \gg \hbar.$$

Im więc dokładniej zmierzylibyśmy położenie, tym większa byłaby niepewność pomiaru pędu (prędkości) oraz na odwrót. Tym samym znając położenie  $i$ -tej cząstki w chwili  $t_0$  niewiele możemy powiedzieć o jej położeniu w infimezymalnie bliskiej chwili ( $t_0 + dt$ ), gdyż

$$(7) \quad \vec{x}_i(t_0 + dt) = \vec{x}_i(t_0) + \left. \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right|_{t=t_0} dt$$

zaś  $\frac{d\vec{x}_i}{dt}$  jest, zgodnie z (3), proporcjonalne do nieznanego dokładnie w chwili  $t_0$  pędu  $\vec{p}_i$   $i$ -tej cząstki.

Okazuje się zatem, że różnica między układami klasycznymi a kwantowymi ma zdecydowanie charakter jakościowy. O ile bowiem układy klasyczne opisują ewolucję położenia i pędu w pełni deterministycznie, a tym samym istnieje pełny determinizm ewolucji dowolnej wielkości fizycznej  $\omega(\vec{x}, \vec{p})$ , to tego typu determinizm w układach kwantowych nie jest możliwy. Często określa się powyższy problem stwierdzając, że położenie  $\vec{x}$  i pęd  $\vec{p}$  pełnią rolę zmiennych dynamicznych w układach klasycznych, ale nie mogą być takimi zmiennymi w opisie kwantowym. Przez zmienne dynamiczne fizycy rozumieją bowiem takie zmienne, które jednoznacznie opisują konfigurację i dynamikę układu w dowolnej chwili, dając maksimum fizycznej informacji o tym układzie.

Chcąc zachować determinizm w opisie układów kwantowych (chcemy jakiś determinizm utrzymać, w przeciwnym wypadku opis nie miałby mocy przepowiadania przyszłości układu) fizycy postulują nieco inne podejście do problemu. Otóż zamiast określać poszczególne fragmenty układu kwantowego przez podanie ich położenia i pędów jako funkcji czasu, przypisują im pewne

Objaśnienie dla matematyków: dla fizyka symbol  $\sim$  oznacza zarówno proporcjonalność, jak też ten sam rząd wielkości.

Red.

nowe funkcje zależne od punktu w przestrzeni i czasie zwane polem. Dla  $i$ -tej cząstki w układzie oznaczymy je  $\phi_i(\vec{x}, t)$ . Pola pełnią rolę nowych zmiennych dynamicznych, opisując konfigurację  $i$ -tej cząstki i są na ogół funkcjami zespolonymi.

Zazwyczaj do opisanego pojedynczej  $i$ -tej cząstki nie wystarczy podanie jednej funkcji pola  $\phi_i(\vec{x}, t)$ , ale pewnego ich zbioru, powiedzmy  $r$ -elementowego. Pole musi więc zdobyć dodatkowy indeks. Pola  $\phi_i^\mu(\vec{x}, t)$  ( $\mu = 1, \dots, r$ ;  $i = 1, \dots, n$ ) jako zmienne dynamiczne, gdzie  $n$  oznacza liczbę rodzajów cząstek w układzie, niosą pełną dostępną o nim informację. Oczywiście, otwarte jest pytanie, jak te informacje wydobyć. Jest to oddzielny problem, którym nie będziemy się w tym artykule zajmować. Ma on jednak rozwiązanie, a takie gałęzie fizyki jak mechanika kwantowa, czy kwantowa teoria pola podają przepisy na ewolucję  $\phi_i^\mu(\vec{x}, t)$  w postaci tzw. równań pola, będących odpowiednikiem równania (4) w fizyce klasycznej. Z postaci pola można również odczytać wszystkie mierzalne informacje o układzie, jak energię, pęd, moment pędu, ładunek elektryczny itp.

Na przykład w nierelatywistycznej mechanice kwantowej wielkość  $\rho(\vec{x}, t)$  zdefiniowana jako

$$(8) \quad \rho(\vec{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i^*(\vec{x}, t)\phi_i(\vec{x}, t) = |\phi_i(\vec{x}, t)|^2,$$

gdzie  $\phi_i^*$  jest zespoloną funkcją sprzężoną do  $\phi_i$ , ma sens gęstości prawdopodobieństwa znalezienia  $i$ -tej cząstki w punkcie  $\vec{x}$  w chwili  $t$ .

Ewolucja układu opisana jest w tym przypadku tzw. równaniem Schrödingera

$$(9) \quad i\hbar \frac{\partial \phi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = H \phi_i(\vec{x}, t),$$

w którym  $H$  jest pewnym operatorem różniczkowym zwanym *hamiltonianem* układu. Ma on postać

$$(10) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \vec{\nabla}_i^2 + V(\vec{x}_i)$$

gdzie  $m_i$  jest masą  $i$ -tej cząstki, a  $V(\vec{x}_i)$  potencjałem jej oddziaływania z resztą układu (odpowiednikiem analogicznego członu w (4)).

Świadomi podstawowych koncepcji stosowanych do opisu klasycznych i kwantowych układów dynamicznych możemy przejść do roli i miejsca symetrii w tym opisie.

### 3. Idea symetrii w fizyce

Ponieważ najbardziej fundamentalne symetrie odkryto w układach kwantowych, przeto z głównymi ideami symetrii w fizyce zapoznamy się bazując na takich układach. Przeniesienie tych idei na układy klasyczne będzie już proste, jeśli potraktujemy je jako pewien graniczny przypadek układów kwantowych opisywanych funkcjami pola  $\phi_i(\vec{x}, t)$ .

Rzeczywiście, wprowadzając nowe oznaczenie  $x$  na notację punktu  $(\vec{x}, t)$  tak zwanej czasoprzestrzeni  $M^4$  o czterech wymiarach (trzy wymiary przestrzenne i jeden czasowy), można uczynić następujące przyporządkowanie strukturalne między zmiennymi polowymi układów kwantowych, a zmiennymi dynamicznymi układów klasycznych:

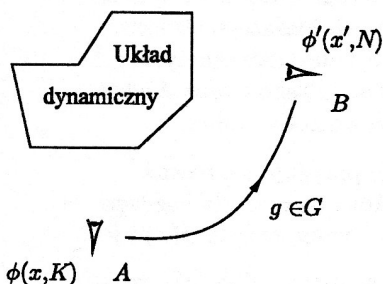
KWANTOWO	KLASYCZNIE
$\phi_i^\mu(x)$	$\vec{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3$
$x \in M^4$	$t \in \mathbb{R}$

Rozważmy układ opisywany funkcjami pola  $\phi_i^\mu(x)$ . Wprowadźmy nowy sposób zaindeksowania tych funkcji definiując multiindeks  $K \equiv (i, \mu)$ . Możemy teraz zapisać

$$(11) \quad \phi_i^\mu(x) = \phi^K(x) \equiv \phi(x, K)$$

Oznacza to, że na zbiór funkcji  $\phi_i^\mu(x)$  możemy patrzeć jak na funkcje określone na dwu przestrzeniach: ciągłej  $\mathcal{R} \ni x$  i dyskretnej  $\mathcal{E} \ni K$ . Przestrzeń  $\mathcal{R}$  określamy też inaczej jako zewnętrzną, obserwowalną, należą bowiem do niej





Rys. 2. Obserwatorzy  $A$  i  $B$  połączeni transformacją  $g$  grupy  $G$  używają różnych funkcji  $\phi(x, K)$  oraz  $\phi'(x', N)$  na opisanie tego samego układu dynamicznego. Symetria między  $A$  i  $B$  oznacza, że obaj jednak „widzą” tę samą fizykę.

punkty czasoprzestrzeni. Jest więc ona związana silnie z fizyką klasyczną. Druga z nich,  $\mathcal{E}$ , wiąże się z dodatkowymi dyskretnymi parametrami opisu kwantowego układu dynamicznego. Fizycy nazywają takie parametry wewnętrznymi stopniami swobody, a samą przestrzeń  $\mathcal{E}$  – wewnętrzną. W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że  $\mathcal{R}$  jest przestrzenią klasyczną, natomiast  $\mathcal{E}$  – kwantową.

Różne rodzaje symetrii działające we wspomnianych przestrzeniach i reprezentowane przez funkcje  $\phi(x, K)$  stanowią główny obiekt zainteresowania fizyki.

By dokładniej to zrozumieć, rozważmy dwu obserwatorów  $A$  i  $B$ , którzy z różnych miejsc przestrzeni zewnętrznej  $\mathcal{R}$  lub abstrakcyjnej przestrzeni wewnętrznej  $\mathcal{E}$  badają jeden i ten sam układ dynamiczny (rys. 2). Obaj opiszą tenże układ używając różnego zespołu zmiennych dynamicznych, podobnie jak klasycznie opisaliby położenie tego samego punktu, podając różne jego współrzędne  $\vec{x}$  i  $\vec{x}'$  – każdy w swym układzie odniesienia. Stąd zmienne dynamiczne użyte przez nich do opisu będą różne – odpowiednio  $\phi(x, K)$  i  $\phi'(x', N)$ . Związek między oboma obserwatorami będzie ustalony przez pewną transformację  $g$  i założymy, że zbiór wszystkich takich transformacji tworzy grupę.

Obserwator  $B$  powinien umieć wyrazić wyniki swych pomiarów przez wyniki pomiarów obserwatora  $A$  (i na odwrót). Najprostszy związek tego typu będzie miał charakter liniowy tj.  $\phi'$  będzie liniową kombinacją  $\phi$ . Jeśli transformacja między dwoma obserwatorami będzie transformacją ich współrzędnych zewnętrznych  $x \in \mathcal{R}$ , tj.:

$$(12) \quad x \xrightarrow{g \in G} x' \equiv gx,$$

to odpowiadająca jej transformacja zmiennych dynamicznych będzie dana przez

$$(13) \quad \phi(x, K) \xrightarrow{g \in G} \phi'(x', N) = \sum_K D_{NK}(g) \phi(x, K).$$

Taką transformację, generowaną przez zmianę współrzędnych w przestrzeni  $\mathcal{R}$ , nazywamy *zewnętrzną*, a współczynniki  $D_{NK}(g)$  są reprezentacją grupy  $G \ni g$  realizowaną na zbiorze funkcji (zmiennych dynamicznych)  $\phi(x, K)$ .

Można rozważyć też inny rodzaj transformacji – mieszającej jedynie indeksy w przestrzeni wewnętrznej  $\mathcal{E}$ . Oznaczając taką transformację przez  $g$  i zakładając, że ich zbiór też tworzy grupę  $\mathcal{G}$  mamy:

$$(14) \quad \begin{aligned} x &\xrightarrow{g \in \mathcal{G}} x' \\ \mathcal{E} \ni m &\xrightarrow{g \in \mathcal{G}} m' = gm \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

a zmienne dynamiczne przekształca się jak

$$(15) \quad \phi(x, K) \xrightarrow{g \in \mathcal{G}} \phi'(x, N) = \sum_K D_{NK}(g) \phi(x, K).$$

Taką transformację nazywamy *wewnętrzną*, a współczynniki  $D_{NK}(g)$  stanowią, jak poprzednio, reprezentację grupy  $\mathcal{G}$  na zbiorze zmiennych dynamicznych  $\phi(x, K)$ .

Przykładem grupy  $G$  w fizyce mogą być translacje, obroty czy odbicia w przestrzeni trójwymiarowej (lub czterowymiarowej czasoprzestrzeni  $M^4$ ), zaś grupami  $\mathcal{G}$  mogą być różne grupy macierzowe np.  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  itp. działające na „indeksach kwantowych”. Powiemy o tym więcej w następnych paragrafach.

Musimy jeszcze odpowiedzieć na pytanie, kiedy grupa  $G$  – czy  $\mathcal{G}$  – staje się grupą *symetrii* w fizyce i jakie są tego konsekwencje.

Symetria między obserwatorami  $A$  i  $B$  oznacza, że obaj „widzą” to samo. Widzenie tego samego w fizyce oznacza opis zjawiska tymi samymi równaniami wiążącymi w określony sposób wielkości fizyczne. Transformacja grupy  $G$  lub  $\mathcal{G}$  będzie zatem transformacją symetrii, jeśli nie zmieni relacji między wielkościami fizycznymi, czyli pozostawi niezmiennione równania fizyki. Mierzone wartości wielkości fizycznych mogą być oczywiście różne dla obserwatorów  $A$  i  $B$ .

Poszukiwanie symetrii równań fizyki nie jest na ogół sprawą prostą, ale jeśli już takie symetrie się znajdzie, prowadzi to do olbrzymich przełomów w rozumieniu Przyrody. Dla przykładu znalezienie pełnej symetrii równań elektryczności i magnetyzmu było równoznaczne ze stworzeniem przez Maxwella jednolitej teorii oddziaływań elektromagnetycznych opisanej w tak zwanych równaniach Maxwella. Podobnie odkrycie pewnych symetrii lokalnych w kwantowych równaniach elektromagnetyzmu i tak zwanych oddziaływaniach słabych (odpowiedzialnych chociażby za istnienie promieniowania  $\beta$  i syntezę termojądrową) doprowadziło w latach siedemdziesiątych bieżącego stulecia do opracowania jednolitej teorii oddziaływań słabych i elektromagnetycznych. Dokonali tego trzech fizycy: Stephen Weinberg, Sheldon Glashow oraz Abdus Salam, a ich sukces ukoronowany został w 1979 roku nagrodą Nobla.

W polowaniach na symetrie równań fizyki niezwykle przydaje się pewna koncepcja zwana zasadą ekstremalnego działania. Mówi ona, że dla każdego układu dynamicznego istnieje funkcja od zmiennych dynamicznych  $\phi(x)$  i ich pochodnych względem  $x$   $\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} \equiv \partial\phi(x)$  zwana lagranżianem  $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ , taka iż całka

$$(16) \quad S(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) dx,$$

określana jako działanie, przyjmuje wartość ekstremalną na fizycznie realizowanych przez układ (a więc będących rozwiązaniami równań fizyki) konfiguracjach  $\phi(x)$ . Całkowanie w (16) rozciąga się przy tym na cały obszar  $x \in \mathcal{R}$  ograniczony zadanymi warunkami brzegowymi – początkowym i końcowym.

Rachunek wariacyjny pozwala znaleźć konfigurację  $\phi_{\text{real}}(x)$ , dla której działanie (16) przyjmuje ekstremum. Wystarczy w tym celu przyrównać do zera pierwszą wariację  $S(\phi)$ :

$$(17) \quad \delta S(\phi)|_{\phi_{\text{real}}} = 0.$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla (17) jest, aby  $\phi_{\text{real}}$  spełniały tzw. równania Eulera–Lagrange’a:

$$(18) \quad \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i^\mu(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i^\mu(x)} = 0,$$

będące poszukiwanymi równaniami ewolucji zmiennych  $\phi(x, K)$ .

Zasada ekstremalnego działania pozwala przerzucić problem szukania symetrii równań ewolucji (18) na poszukiwanie symetrii samej całki działania lub wręcz symetrii lagranżianu. Jest to niezwykle pomocna technika przy konstruowaniu teorii oddziaływań w układach. Oto znając z doświadczenia grupy symetrii takich układów można łatwiej konstruować lagranżiany niezmiennicze względem takich grup, a tym samym produkować równania o żądanej niezmienniczości. Na odwrót, mając skonstruowany langranżian można łatwiej odczytać jego grupę symetrii, a tym samym grupę symetrii wywodzących się z niego równań. Doświadczalne sprawdzenie, w jakim stopniu takie przepowiedziane symetrie realizują się w Przyrodzie, jest wielokrotnie podstawowym, lub nawet jedynym, „experimentum crucis” dla sprawdzenia poprawności postulowanych teorii.

#### 4. Twierdzenie Noether

Rola symetrii w fizyce nie ogranicza się wyłącznie do zagadnień omówionych w poprzednim rozdziale. W 1918 roku Emmy Noether, znana matematykom z fundamentalnych prac z teorii liczb i algebry pierścieni, sformułowała i udowodniła twierdzenie, dzięki któremu na trwałe wpisała się również do fizyki. Twierdzenie to, znane dziś jako twierdzenie Noether, ustaliło głęboki związek między symetriami równań fizyki i lagranżianów a zachowanymi w czasie wielkościami fizycznymi, zwanymi też stałymi ruchu lub całkami ruchu.

Podstawowym pojęciem w twierdzeniu Noether są ciągłe, różniczkowalne grupy transformacji zwane grupami Liego. Grupa taka realizuje się na  $r$ -wymiarowej

przestrzeni funkcji  $\phi^\mu(x)$  ( $\mu = 1, \dots, r$ ) poprzez tzw.  $n$ -parametrową,  $r$ -wymiarową algebrę Lie. Oznacza to, że po transformacji zadanej przez dowolny element grupy Lie, funkcje  $\phi^\mu(x)$  przejdą w  $\phi'^\mu(x)$  według przepisu:

$$(19) \quad \phi'^\mu(x) = \sum_{\nu=1}^r \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k T_k \right\}^\mu \phi^\nu(x)$$

W powyższym wzorze  $T_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) są  $r$ -wymiarowymi macierzami, niezależnymi od elementu grupy, zwanymi generatorami. Spełniają one relacje komutacji

$$(20) \quad [T_k, T_l] \equiv T_k T_l - T_l T_k = i \sum_{m=1}^n f_{klm} T_m$$

gdzie  $i^2 = -1$ , a  $f_{klm}$  nazywają się stałymi strukturalnymi algebry. Parametry  $\varepsilon_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) opisują w zadanej algebrze poszczególne jej elementy, pełniąc rolę współrzędnych tych elementów, ich liczba zaś równa jest liczbie generatorów.

Twierdzenie Noether głosi, że

*Z każdą ciągłą  $n$ -parametrową symetrią lagranżianu wiąże się prawo zachowania dokładnie  $n$  wielkości fizycznych – całek ruchu, nazywanych też przez fizyków prądami.*

Zobaczmy, jak to twierdzenie pracuje w kilku wybranych przykładach układów klasycznych. Dla takich układów zmiennymi dynamicznymi są położenie  $\vec{x}_i(t)$  i prędkość  $\dot{\vec{x}}_i(t) \equiv \frac{d\vec{x}_i}{dt}$   $i$ -tego punktu jako funkcji czasu. Równania Eulera–Lagrange’a (18) przybiorą więc postać

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}_i} = 0$$

dla każdego punktu materialnego  $i$ .

Równania (21) powinny być tożsame z równaniami Newtona (4), stąd lagranżian powinien mieć tu postać:

$$(22) \quad \mathcal{L}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}, t).$$

Rzeczywiście, uwzględniając iż

$$(23) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = m_i \dot{\vec{x}}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}_i} = -\frac{\partial V(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}_i} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}, t)$$

i podstawiając (23) do (21), otrzymujemy równania (4).

Rozważmy teraz pewne wybrane symetrie lagranżianu (22) i równań (21) oraz ich konsekwencje.

Na początku założmy, że lagranżian jest niezmienniczy względem translacji o infinitezymalny, dowolny wektor  $\vec{a}$  w przestrzeni trójwymiarowej, czyli

$$(24) \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{L}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i) = \mathcal{L}(\vec{x}_i + \vec{a}, \dot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{a}}).$$

Innymi słowy, jeśli cały układ poddamy translacji, tak że wszystkie jego współrzędne zmieniają się zgodnie z relacją

$$(25) \quad \vec{x}_i \rightarrow \vec{x}'_i = \vec{x}_i + \vec{a},$$

to nie odbije się to na żadnych jego własnościach.

Spełnienie (24) oznacza, że  $d\mathcal{L} = 0$ , a biorąc pod uwagę postać lagranżianu (22) łatwo zobaczyć, iż będzie tak tylko, jeśli  $V(\vec{x}) = \text{const}$ , a więc przy braku oddziaływań układu z otoczeniem. Wtedy też, na mocy (21), jest

$$(26) \quad 0 = d\mathcal{L} \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} d\dot{\vec{x}}_i = \vec{a} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i},$$

skąd wnioskujemy, że wielkość

$$(27) \quad \vec{p} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i}$$

musi być zachowana w czasie. Przez porównanie z (3) odczytujemy, że jest to całkowity pęd układu!

Zatem konsekwencją niezmienniczości układu względem translacji w przestrzeni o dowolny wektor jest zachowanie pędu tego układu. Są przy tym zachowane trzy wielkości – składowe wektora pędu. Tyle też mamy parametrów w translacyjnej grupie symetrii. Pozostaje to w zgodzie z twierdzeniem Noether.

W drugim przykładzie rozważmy transformację obrotu układu  $O(\delta\vec{\varphi})$  o infinytesymalny kąt skierowany  $\delta\vec{\varphi}$  wokół środka układu odniesienia. Współrzędne  $i$ -tego punktu przejdą z  $\vec{x}_i$  w  $\vec{x}'_i$  zgodnie z równaniem

$$(28) \quad \vec{x}_i \rightarrow \vec{x}'_i = \vec{x}_i + \delta\vec{\varphi} \times \vec{x}_i.$$

Jeśli lagranżian (22) ma być niezmienniczy względem tej transformacji, to musi zachodzić

$$(29) \quad 0 = d\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}_i} d\vec{x}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} d\dot{\vec{x}}_i,$$

gdzie, zgodnie z (28),

$$(30) \quad d\dot{\vec{x}}_i = \delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{x}}_i.$$

Podstawiając (28) i (30) do (29) i wykorzystując równania Eulera–Lagrange’a dostajemy łatwo

$$(31) \quad 0 = \delta\vec{\varphi} \times \sum_i \{ \vec{x}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \dot{\vec{x}}_i \times \vec{p}_i \} = \delta\vec{\varphi} \times \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i,$$

gdzie  $\vec{p}_i$  jest pędem  $i$ -tego punktu materialnego. Równość (31), wobec dowolności  $\delta\vec{\varphi}$ , stwierdza zachowanie w czasie wektora

$$(32) \quad \vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i,$$

znanego jako wektor całkowitego momentu pędu układu. Tu również istnienie ciągłej trójparametrowej symetrii obrotowej lagranżianu implikuje istnienie trzech całek ruchu – składowych wektora całkowitego momentu pędu. Podobnie można wykazać, że wynikiem niezmienniczości lagranżianu względem grupy jednoparametrowej translacji w czasie byłoby zachowanie jednej wielkości fizycznej – energii.

Niezmienniczość układu względem translacji w przestrzeni i czasie nazywamy jego jednorodnością w przestrzeni i w czasie, zaś niezmienniczość względem obrotów w przestrzeni – izotropowością. Zauważyliśmy zatem, że prawa zachowania najbardziej podstawowych wielkości fizycznych – energii, pędu i momentu pędu, które kształtują ewolucję każdego układu dynamicznego, są jedynie objawem pewnych symetrii w czasie i przestrzeni opisujących go lagranżianów (równań ruchu). Zachowanie tychże wielkości dla odosobnionego punktu materialnego (tzn. nie podlegającego żadnym zewnętrznym oddziaływaniom) świadczy tym samym o jednorodności i izotropowości samej czasoprzestrzeni.

Paragraf niniejszy kończymy ważnym spostrzeżeniem, iż istnienie podstawowych symetrii równań fizyki klasycznej implikuje fundamentalne prawa Przyrody: zachowanie energii, pędu i momentu pędu.

## 5. Wybrane symetrie układów kwantowych. Spin i izospin

Ruch kwantowej cząstki naładowanej, na przykład elektronu, w zewnętrznym stałym polu magnetycznym wykazuje zachowanie istotnie różne od podobnego dla cząstki klasycznej. Oto okazuje się, że o ile w przypadku klasycznym istnienie takiego stałego pola nie zmienia całkowitej energii elektronu  $E$ , a więc zarówno przed jak i po włączeniu pola o wektorze indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  mamy

$$(33) \quad E(\vec{B} = 0) = E(\vec{B} \neq 0) = E_0 = \text{const},$$

to w przypadku kwantowym włączenie pola  $\vec{B}$  powoduje podwyższenie lub obniżenie energii w porównaniu z mierzoną wartością  $E_0$  przy  $\vec{B} = 0$  o stałą



wartość

$$(34) \quad \Delta E = \pm \frac{1}{2} \mu_B B,$$

gdzie  $\mu_B = 0,58 \cdot 10^{-14}$  MeV/gauss jest eksperymentalną stałą zwaną magnetonem Bohra.

Zjawisko to, zwane efektem Zeemanna, wskazuje na dwoistą istotę elektronu. Tenże sam elektron może bowiem raz podwyższyć, raz obniżyć swą energię w polu magnetycznym. Do jego opisanie musimy więc, w myśl równania Schrödingera (9), użyć funkcji falowej  $\phi(\vec{x}, t)$  o dwu składowych

$$(35) \quad \phi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(\vec{x}, t) \\ \phi^{(-)}(\vec{x}, t) \end{pmatrix},$$

z których pierwsza będzie opisywać elektron z podwyższoną (+), a druga z obniżoną (-) energią.

Człon w hamiltonianie (10) odpowiedzialny za to oddziaływanie, które doświadczalnie okazuje się być liniowe w składowych pola  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ , powinien więc mieć postać

$$(36) \quad V_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mu_B \sum_{i=1}^3 \sigma_i B_i \equiv \frac{1}{2} \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B},$$

gdzie  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są pewnymi stałymi. Nie mogą to być jednak liczby, gdyż w myśl (9) działają one na dwukomponentową funkcję  $\phi(\vec{x}, t)$  produkując poprawki do energii dane w (34). By powiązać wszystko w zgrabną całość musimy założyć, że  $\sigma_i$  są macierzami  $2 \times 2$  o wartościach własnych  $\pm 1$ . Dzięki temu funkcja

$$(37) \quad \phi^{+\frac{1}{2}}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \phi^+(\vec{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

będąc wektorem własnym zdiagonalizowanej macierzy

$$(38) \quad \sigma_i^{\text{diag}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

odpowiadającym wartości własnej +1, opisze elektron z dodatnią poprawką do energii, a funkcja

$$(39) \quad \phi^{-1/2}(\vec{x}, t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^-(\vec{x}, t) \end{pmatrix},$$

jako wektor własny macierzy (38) z wartością własną -1, opisze tenże elektron z ujemną poprawką energetyczną.

Zauważmy, że macierze  $\sigma_i$  muszą być liniowo niezależne, podobnie jak liniowo niezależne są składowe wektora  $\vec{B}$ . Takie liniowo niezależne macierze hermitowskie (o rzeczywistych wartościach własnych), wymiarze  $2 \times 2$ , bezśladowe, o wartościach własnych  $\pm 1$ , są znane jako *macierze Pauliego*. Spełniają one relacje komutacji.

$$(40) \quad \left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2},$$

gdzie  $\epsilon_{ijk}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) jest całkowicie antysymetrycznym tensorem trzeciego rzędu, a  $\epsilon_{123} = 1$ .

Pełne równanie Schrödingera dla swobodnego elektronu w stałym polu magnetycznym  $\vec{B}$  zapiszemy więc w postaci

$$(41) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \phi(\vec{x}, t).$$

Zgodnie z naszą definicją symetrii w fizyce musi ono być niezmiennicze na przykład względem translacji i obrotów w przestrzeni trójwymiarowej. Oznacza to, że nowy obserwator, który umieścił elektron w innym, primowanym układzie współrzędnych, powinien opisać ruch tego elektronu w polu magnetycznym

równaniem analogicznym do (41) tj.:

$$(42) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi'(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}'^2 \phi'(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}' \phi'(\vec{x}, t),$$

gdzie  $\phi'(\vec{x}, t)$  jest funkcją falową dla nowego obserwatora,  $\vec{B}'$  – obserwowanym przez niego polem magnetycznym, a  $\vec{\nabla}'^2$  laplasjanem w jego primowanych współrzędnych.

Przejsie między  $\phi'$  a  $\phi$  musi być zgodnie z (13) zadane przez:

$$(43) \quad \phi'(\vec{x}', t) = U \phi(\vec{x}, t),$$

gdzie  $U$  jest zespoloną, unitarną macierzą  $2 \times 2$ . Jej unitarność związana jest z koniecznością zachowania prawdopodobieństwa przy przejściu od jednego do drugiego obserwatora (porównaj z (8)) tj.:

$$(44) \quad \phi'^+ \phi' \equiv \phi^+ U^+ U \phi = \phi^+ \phi,$$

gdzie  $\phi^+(\vec{x}, t) = (\phi^{(+)*}(\vec{x}, t), \phi^{(-)*}(\vec{x}, t))$  jest hermitowsko sprzężonym wektorem funkcji falowej  $\phi(\vec{x}, t)$ .

W przypadku translacji jest  $U = 1$ , gdyż  $\vec{B}' = \vec{B}$  i  $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$ . Jeśli zaś mamy do czynienia z obrotem układu współrzędnych, to podstawiając (43) do (42) i porównując z (41) łatwo się przekonać (do czego zachęcam Czytelnika), że równania (41) i (42) opisują ten sam proces o ile

$$(45) \quad U^+ \vec{\sigma} \cdot \vec{B}' U = \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

Ponieważ związek  $\vec{B}'$  z  $\vec{B}$  w przypadku obrotów dany jest przekształceniem ortogonalnym  $\Lambda = \{\Lambda_{ij}\} = \Lambda^T$ :

$$(46) \quad B'_i = \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij} B_j,$$

więc korzystając z (46) i podstawiając do (45) dostaniemy

$$(47) \quad \sum_{i,j=1}^3 \Lambda_{ij} U^+ \sigma_i U B_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_j B_j.$$

Ostatnia równość zachodzi dla każdej składowej  $B_j$ , o ile

$$(48) \quad \sum_{i=1}^3 \Lambda_{ij} U^+ \sigma_i U = \sigma_j,$$

lub, korzystając z ortogonalności  $\Lambda$ , gdy

$$(49) \quad U^+ \sigma_i U = \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij} \sigma_j.$$

Ponieważ w ostatnim związku  $\Lambda_{ij}$  są znane, można go traktować jako równanie na macierz przekształcenia  $U$ . Rozwiązaniem jest

$$(50) \quad U = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^3 \epsilon_k \frac{\sigma_k}{2} \right\}.$$

Porównując (19) z (50) spostrzegamy, że  $U$  jest elementem dwuwymiarowej algebry Lie o trzech generatorach  $\sigma_i/2$  z relacjami komutacji danymi w (40), a więc elementem algebry znanej jako algebra  $SU(2)$ . Obiekty transformujące się względem dowolnej reprezentacji grupy  $SU(2)$  nazywane są spinorami. Nasza funkcja falowa elektronu transformująca się według (43) jest więc też spinorem. Widzimy, że niezależny od położenia obserwatora opis układu kwantowego oznacza konieczność wprowadzenia spinorów. Tym samym elektron (i inne cząstki) muszą uzyskać dodatkową charakterystykę – tak zwany *spin* – określającą zawartość spinora  $\phi(\vec{x}, t)$ . Gdy cząstka opisywana jest przez część  $\phi^{(+)}(\vec{x}, t)$ , wtedy określamy ją jako mającą składową spinu wzdłuż wybranego kierunku (np. kierunku pola  $\vec{B}$ ) równą  $m = +1/2$ , gdy zaś opisuje ją jedynie  $\phi^{(-)}(\vec{x}, t)$ , mówimy, że ma składową spinu  $m = -1/2$ . W zależności od tej składowej różnie wygląda oddziaływanie elektronu z polem magnetycznym i tym samym pojawia się różnica dana przez wartości (34). Jest ona na tyle mała w porównaniu ze wszystkimi klasycznymi mierzonymi wartościami, że w fizyce

klasycznej można ją zaniedbać. Jednak w fizyce kwantowej, gdzie poziomem odniesienia wszelkich pomiarów są również bardzo małe wartości, zrobić tak już nie wolno.

O elektronie mówimy, że ma spin  $s = 1/2$  i możliwe dwie jego składowe  $m = \pm 1/2$ . Funkcja falowa elektronu transformuje się więc przy obrotach trójwymiarowej przestrzeni według dwuwymiarowej reprezentacji grupy  $SU(2)$ . Grupa ta ma jednak reprezentacje dowolnego wymiaru. Odpowiadają one innym cząstkom o tak zwanych wyższych spinach, a więc i większej liczbie komponent w spinorze  $\phi(\vec{x}, t)$  niezbędnych do prawidłowego opisu. Ogólnie, według  $(2j + 1)$ -wymiarowej reprezentacji grupy obrotów, gdzie  $2j \in \mathbb{Z}$ , będzie się transformował spinor o  $2j + 1$  niezależnych składowych, które można ponumerować wskaźnikiem  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ . O cząstce opisywanej takim spinorem mówimy, że ma spin  $s = j$  o możliwych składowych wzdłuż zadanego kierunku  $m = -j, \dots, +j$ . Możemy ją opisać za pomocą wielowskaźnikowej funkcji falowej (spinora)  $\phi^{(j,m)}(\vec{x}, t)$ . W szczególnym przypadku  $j = 1/2$ ,  $m = \pm 1/2$  otrzymamy opis cząstki o spinie  $s = 1/2$ , na przykład elektronu.

Podsumujmy powyższe rozważania. Przekonaliśmy się, że niezmienniczość równań fizyki kwantowej względem grupy obrotów w przestrzeni wymaga wprowadzenia wielokomponentowego, spinorowego opisu cząstek. Poszczególne składowe takiego spinora mogą być „odczytane” przez fizyków. Mają one bowiem interpretacje dodatkowych stopni swobody cząstki, które objawiać się mogą w różny sposób na poziomie kwantowym. W przypadku wspomnianego elektronu może to być przesunięcie jego poziomu energii. Można powiedzieć, że te dodatkowe efekty są mierzalnym sygnałem niezmienniczości równań w świecie fizyki kwantowej względem ciągłych transformacji współrzędnych przestrzeni.

Innym ciekawym przykładem symetrii w fizyce kwantowej jest tak zwana symetria izotopowa. W odróżnieniu od poprzedniej, indukowanej przez transformacje współrzędnych, symetria izotopowa jest typową symetrią ukrytą, mieszającą zgodnie z równaniem (15) indeksy pól  $\phi(x, K)$  jedynie w przestrzeni wewnętrznej  $\mathcal{E}$ . Dzięki symetrii izotopowej możliwe stało się uporządkowanie najobszerniejszej klasy cząstek elementarnych zwanych hadronami, a także otworzone zostało okno na badanie ich wewnętrznej struktury. Jak z tego wynika, jest to jedna z głębszych koncepcji fizyki i poświęcimy jej omówieniu resztę tego rozdziału.

Spośród czterech fundamentalnych oddziaływań poznanych przez fizykę, to jest silnych, elektromagnetycznych, słabych i grawitacyjnych, oddziaływania silne mają krótki zasięg rzędu rozmiarów protonu,  $10^{-15}$  m, i jak ich nazwa wskazuje, są spośród wszystkich najsilniejsze. Cząstki elementarne zdolne do tego typu oddziaływań nazwano hadronami. Związanie protonów i neutronów w jądrze atomowym zawdzięczamy właśnie oddziaływaniu silnemu między nimi. Nukleony (protony i neutrony) były też historycznie pierwszymi odkrytymi hadronami. Pierwszym krokiem w odkryciu ich ciekawych symetrii wewnętrznych była obserwacja dotycząca tak zwanych jąder zwierciadlanych.

Tym mianem określa się jądra o tej samej liczbie masowej  $A$ , lecz o różnych liczbach atomowych  $Z$ ,  $Z' = A - Z$ . Są to więc jądra, w których protony i neutrony zamieniono miejscami. Przykładem może być jądro izotopu węgla  ${}^{11}_6\text{C}$  i boru  ${}^{11}_5\text{B}$  zawierające odpowiednio 6 protonów i 5 neutronów w przypadku izotopu węgla oraz 5 protonów i 6 neutronów w przypadku izotopu boru. Okazuje się, że izotopy jąder zwierciadlanych wykazują daleko idące podobieństwa w oddziaływaniach. Dla przykładu stany wzbudzone  ${}^{11}_6\text{C}$  i  ${}^{11}_5\text{B}$  mają energie różniące się o mniej niż 5%. Ilustruje to tabelka obok.

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
${}^{11}_6\text{C}$	2,00	4,31	4,79
${}^{11}_5\text{B}$	2,12	4,44	5,02

Tabela 1. Energie pierwszych trzech stanów wzbudzonych  $E_1, E_2, E_3$  w MeV dla jąder  ${}^{11}_6\text{C}$  i  ${}^{11}_5\text{B}$ .

W 1932 r. Heisenberg spróbował wyjaśnić tę prawidłowość stawiając tezę, iż oddziaływania silne nie „czują” różnicy między neutronami i protonami. Dlatego, gdyby cząstki te oddziaływały wyłącznie silnie, to objawiałyby się nam jak jedna cząstka. Możliwość odróżnienia powstaje tylko dzięki temu, że biorą one udział też w pozostałych oddziaływaniach – słabych

i elektromagnetycznych. Proton ma choćby ładunek elektryczny  $+e$  ( $e$  – ładunek elektronu  $= 1,6 \cdot 10^{-19}C$ ), podczas gdy neutron jest elektrycznie neutralny. Różnice w pozostałych typach oddziaływań między protonem i neutronem miały być według Heisenberga zaburzeniem tłumaczącym dlaczego poziomy energetyczne jąder zwierciadlanych nie są dokładnie równe, jak to sugeruje tabela 1.

Ograniczając się wyłącznie do oddziaływań silnych możemy założyć za Heisenbergiem, że neutron  $n$  i proton  $p$  to dwa identyczne obiekty. Co za tym idzie, jeśli oznaczymy ich funkcje polowe przez  $\phi_n$  i  $\phi_p$ , to każda teoria silnych oddziaływań winna być niezmiennicza względem transformacji

$$(51) \quad \begin{aligned} \phi_n &\rightarrow \phi_p, \\ \phi_p &\rightarrow \phi_n. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ideowo jest to podobna sytuacja jak z omawianymi poprzednio dwoma stanami elektronu  $\phi^{(+)}$  i  $\phi^{(-)}$  o spinach  $m = +1/2$  i  $m = -1/2$ . Były one nieodróżnialne tak długo, jak długo nie było pola magnetycznego, ale z chwilą włączenia pola pojawiały się mierzalne sygnały pozwalające wyróżnić te stany. Dla każdego obserwatora  $\phi^{(+)}$  i  $\phi^{(-)}$  były przy tym innymi funkcjami.

Nowy, primowany obserwator „widział” górną składową  $\phi' = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(-)} \end{pmatrix}$  jako

pewną kombinację liniową składowych spinora  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(-)} \end{pmatrix}$  w układzie

starego obserwatora. W szczególności mogło się zdarzyć, iż  $\phi^{(+)\prime} = \phi^{(-)}$ .

Takie transformacje zapewniały jednakową postać równań ewolucji układu dla wszystkich obserwatorów, niezależnie od ich usytuowania w przestrzeni zewnętrznej  $\mathcal{R}$ .

Stosując tę analogię do przypadku nukleonów można rozszerzyć transformację (51) żądając by oddziaływania silne były niezmiennicze względem transformacji unitarnej (patrz (43)):

$$(52) \quad \begin{pmatrix} \phi_p \\ \phi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi'_p \\ \phi'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_p \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

Przez analogię ze spinem dwukomponentową funkcję  $\begin{pmatrix} \phi_p \\ \phi_n \end{pmatrix}$  nazwiemy *izospinorem*, a grupę transformacji  $U \in SU(2)_I$  – *grupą izospinową* lub *grupą izotopową*. Składowe izospinora odróżnimy przypisując im, jak w przypadku spinora, wartości wybranej składowej izospinu, tj. wartości  $M = \pm 1/2$ .

Jeśli nukleony realizują dwuwymiarową reprezentację grupy izotopowej (podobnie jak elektrony ze spinem  $m = +1/2$  i  $m = -1/2$  realizują dwuwymiarową reprezentację grupy spinowej  $SU(2)$ ), to czy istnieją cząstki transformujące się względem reprezentacji  $SU(2)_I$  wymiaru większego niż dwa? Byłoby to potwierdzeniem uniwersalności symetrii izotopowej w świecie hadronów.

Począwszy od lat pięćdziesiątych nastąpiły odkrycia takich hadronów. Okazało się, że tworzą one rodziny o podobnych własnościach względem oddziaływań silnych i niemal identycznych masach w ramach rodziny. Poklasyfikowano je przypisując im wewnętrzne liczby spinu izotopowego  $I$  (odpowiednika spinu  $j$ ) oraz jego składowej  $M$  (odpowiednika składowej spinu  $m$ ), gdzie  $M = -I, -I + 1, \dots, I - 1, I$ . Funkcje hadronów uzyskały zatem dodatkowe indeksy:  $\phi^{I,M}$ .

Oto przykłady kilku rodzin hadronów, tzw. multipletów izospinowych, realizujących różnowymiarowe reprezentacje grupy symetrii izotopowej  $SU(2)_I$ .

$$1^\circ \text{ tryplet mezonów } \pi : \langle \pi^+, \pi^0, \pi^- \rangle_{M=+1,0,-1}^{I=1}$$

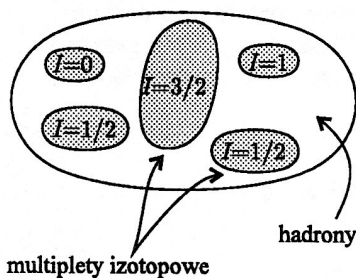
$$2^\circ \text{ dublet mezonów } K : \langle K^+, K^0 \rangle_{M=+1/2,-1/2}^{I=1/2}$$

$$3^\circ \text{ singlet mezonowy } \eta' : \langle \eta'^0 \rangle_{M=0}^{I=0}$$

$$4^\circ \text{ singlet barionowy } \Lambda : \langle \Lambda^0 \rangle_{M=0}^{I=0}$$

$$5^\circ \text{ tryplet barionowy } \Sigma : \langle \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^- \rangle_{M=+1,0,-1}^{I=1}$$





Rys. 3. Wszystkie hadrony można przedstawić jako rozłączne zbiory cząstek ponumerowane wartością izospinu  $I$  i zawierające po  $2I + 1$  elementów – cząstek o identycznych właściwościach w oddziaływaniach silnych.

Każdą cząstkę oznaczyliśmy dodatkowo jej ładunkiem elektrycznym (+, -, 0) w jednostkach ładunku protonu. Hadrony zwane mezonami (pierwsze trzy multiplety) mają spin całkowity ( $j \in \mathbb{Z}$ ). Hadrony zwane barionami mają spin półowkowy ( $j \notin \mathbb{Z}$ ,  $2j \in \mathbb{Z}$ ). Podobnie można poklasyfikować wszystkie odkryte hadrony, a jest ich niemało, bo około 300. Pokazuje to schematycznie rys. 3.

Analizując własności hadronów w jednym ustalonym multiplecie izotopowym można zauważyć ciekawą zależność:

$$(53) \quad \Delta Q = \Delta M,$$

gdzie  $\Delta Q$  jest zmianą ładunku elektrycznego przy przejściu między najbliższymi sąsiadami w multiplecie izotopowym, a  $\Delta M$  odpowiadającą temu przejściu zmianą składowej spinu izotopowego. Rozwiązaniem powyższego równania różnicowego jest tzw. wzór Gell-Manna–Nishijimy:

$$(54) \quad Q = M + \frac{1}{2}Y,$$

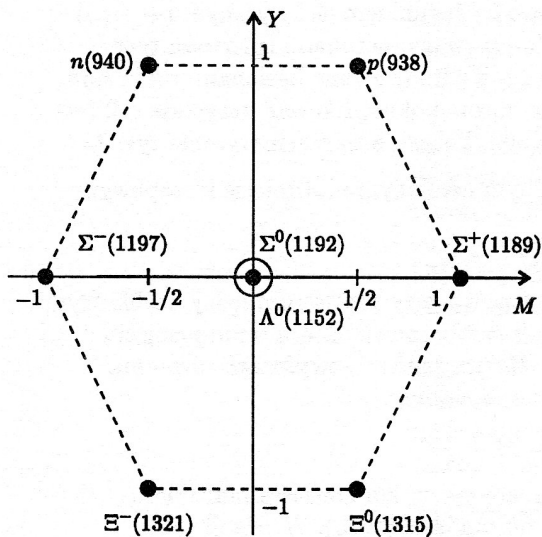
gdzie  $Y$  jest stałą addytywną zależną jedynie od konkretnego multipletu (współczynnik  $1/2$  dobrano w celach normalizacyjnych). W relacji (54) wszystkie występujące wielkości są zachowane w czasie. Rzeczywiście,  $SU(2)_I$  jest dokładną symetrią oddziaływań silnych, więc na mocy twierdzenia Noether można wykazać, że zachowana będzie składowa izospinu  $M$ . Ładunek elektryczny  $Q$  jest także zachowany we wszelkich oddziaływaniach. Z tego wynika, że  $Y$  musi być zachowaną wielkością w oddziaływaniach silnych. Nazywamy ją silnym hiperładunkiem. Powołując się na twierdzenie Noether raz jeszcze, oznaczać to musi istnienie dodatkowej ciągłej symetrii oddziaływań silnych – tym razem jednoparametrowej. Grupą Liego o żądanej własności może być tylko  $U(1)$ . Stąd pełna symetria hadronów powinna mieć postać iloczynu prostego dwu grup:  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ , gdzie indeks  $u$  do symbolu grupy oznacza wielkość, za której zachowanie ona odpowiada.

Skąd się jednak taka symetria wzięła? Najprostszym rozwiązaniem byłoby istnienie szerszej niż  $SU(2)_I \times U(1)_Y$  symetrii hadronów, której szczególnym przypadkiem byłby iloczyn prosty grup odkrytych. Ta szersza symetria byłaby przybliżona, a najprostszym kandydatem na takową byłaby ciągła symetria oparta na niezmienniczości względem grupy  $SU(3)$ , tj. grupy unimodularnych macierzy zespolonych o wymiarze  $3 \times 3$ . Grupa  $SU(3)$  ma bowiem taki sam rząd (tj. liczbę generatorów, które można jednocześnie zdiagonalizować) jak  $SU(2) \times U(1)_Y$ . Istnienie takiej symetrii wymagałoby jednak, by multiplety izospinowe hadronów łączyły się w większe rodziny (po kilka multipletów) zbierające cząstki o podobnych fizycznych właściwościach np. masach i sposobach oddziaływania. Czy tak jest?

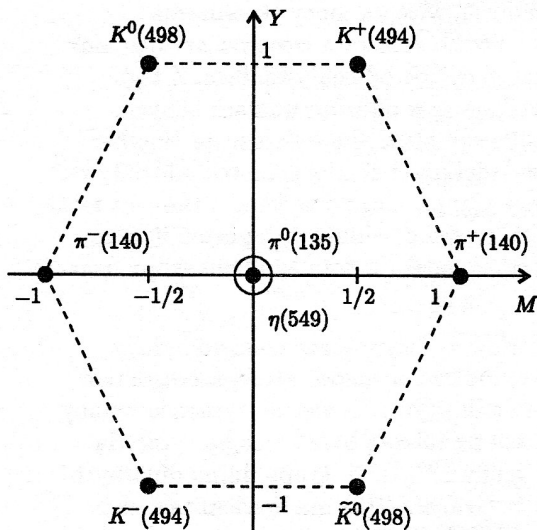
Dokładniejsze badania pokazały, że rzeczywiście niektóre multiplety wykazują między sobą duże podobieństwa. Widać to na rys. 4, na którym zaznaczono po kilka przykładów rodzin multipletów o podobnych właściwościach (jednakowym spinie, podobnych masach i podobnym zachowaniu w oddziaływaniach silnych). Cząstki te w układzie prostokątnym o osiach  $(M, Y)$  tworzą zadziwiająco symetryczne figury! Bez trudu można w nich odczytać tak zwane diagramy wagowe różnych reprezentacji grupy  $SU(3)$ . Hadrony grupują się w większe rodziny po 8 lub 10, choć są też samotne singlety. Ich występowanie w grupach jedno, ośmio i dziesięcioelementowych potwierdza istnienie symetrii  $SU(3)$ , choć nie jest ona aż tak dokładna jak  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ . Widać to choćby w różnicach mas.

Nad wyjaśnieniem pochodzenia symetrii  $SU(3)$  hadronów wiele myślał wspomniany już Murray Gell-Mann. Wysunął on hipotezę, że przyczyna tej symetrii musi tkwić głęboko wewnątrz samych hadronów, a więc, że nie są to obiekty elementarne, bez struktury wewnętrznej. Uwagę Gell-Manna skierowało na tę koncepcję następujące rozważanie.

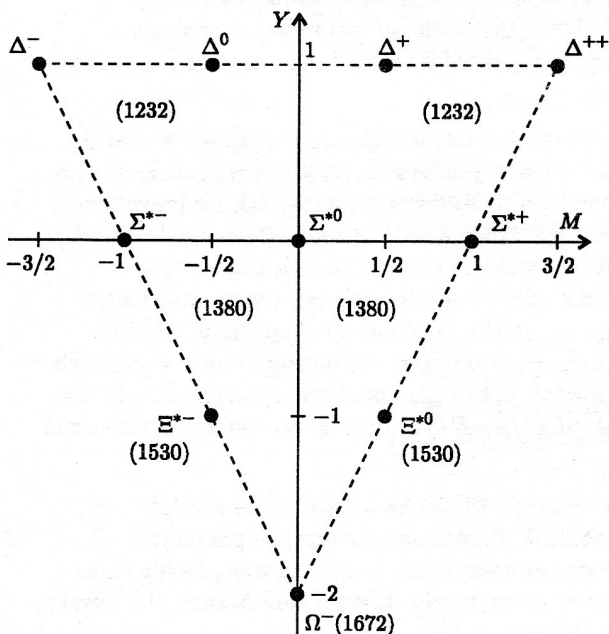
Reprezentacje 1, 8 i 10-wymiarowe, w które wbudowują się hadrony na rys. 4 można otrzymać z iloczynu tensorowego dwu fundamentalnych, nierównoważnych reprezentacji  $SU(3)$  mianowicie 3 i 3\*-wymiarowej, gdzie



a)



b)



c)

Rys. 4. Przykłady hadronów zebranych w grupy o podobnych własnościach i masach (podanych w nawiasach)  
a) oktet barionów, b) oktet mezonów, c) dekwplet barionów

gwiazdka oznacza reprezentację sprzężoną. Iloczyny tensorowe reprezentacji fundamentalnych dla grupy  $SU(3)$  rozkładają się następująco na reprezentacje nieredukowalne:

$$(55) \quad \underline{3} \times \underline{3} = \underline{3}^* + \underline{6},$$

$$(56) \quad \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = \underline{1} + \underline{8} + \underline{8} + \underline{10},$$

$$(57) \quad \underline{3} \times \underline{3}^* = \underline{1} + \underline{8}.$$

Hadrony budują jedynie reprezentacje grupy  $SU(3)$  dane równaniami (56) i (57), przy czym dekwplety ( $\underline{10}$ -wymiarowe) pojawiają się tylko w przypadku cząstek o spinie połówkowym (barionów) (patrz rys. 4). Nie stwierdza się rodzin trój- czy sześcioczęściowych sugerowanych przez rozkład (55). Można to wyjaśnić zakładając, że hadrony składają się z dwu lub trzech elementarniejszych obiektów transformujących się względem działania grupy  $SU(3)$  jak  $\underline{3}$  i  $\underline{3}^*$ -wymiarowe reprezentacje fundamentalne, tj.:

$$(58) \quad \phi^i \rightarrow \phi'^j = \sum_{i=1}^3 U^{ji} \phi^i,$$

lub

$$(59) \quad \phi^i \rightarrow \phi'^j = \sum_{i=1}^3 U^{*ji} \phi^i,$$

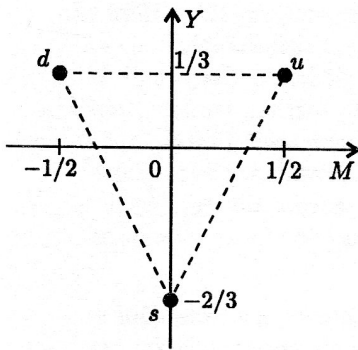
gdzie  $\phi^{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) są funkcjami polowymi opisującymi te elementarniejsze obiekty, zaś  $U = \{U^{ji}\} \in SU(3)$ . Gell-Mann nazwał je *kwarkami*.

W myśl (55) nie byłoby hadronów zbudowanych z dwu kwarków. Zasady rozgałęzień (56) i (57) wskazują natomiast, że będą istniały hadrony złożone z trzech kwarków lub z kwarku i antykwarku (funkcje  $\phi$  transformujące się względem  $\underline{3}^*$ -wymiarowej reprezentacji fundamentalnej grupy  $SU(3)$  interpretujemy jako opisujące antycząstki; antycząstki przenoszą m.in. przeciwny ładunek elektryczny niż odpowiadające im cząstki, mając większość pozostałych właściwości, w tym masę, identyczną z cząstkami).

Kwarki miałyby spin  $j = 1/2$ . Tylko w takim przypadku udałoby się złożyć spin całkowity z dwu, a połówkowy z trzech z nich, jak tego wymagają związki (56) i (57) (porównaj też z rys. 5). Przyjęto dla nich oznaczenia *u*, *d*, *s*, jako skróty angielskich słów: *up* (górnny), *down* (dolny), *strange* (dziwny). Ich najciekawszą przewidywaną własnością powinny być ułamkowe ładunki elektryczne w jednostce ładunku protonu (+e). Można je obliczyć z formuły Gell-Manna-Nishijimy korzystając z diagramu na rys. 5. Łatwo sprawdzić, że

$$(60) \quad Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = Q_s = -\frac{1}{3}$$

Czy kwarki naprawdę istnieją? Pozytywna odpowiedź miałaby ogromne znaczenie. Potwierdzenie hipotezy Gell-Manna byłoby dowodem na to, że poszukiwania teoretycznego opisu nowych zjawisk i cząstek w mikroświecie oraz wyjaśnienie istoty oddziaływań powinno odbywać się w języku grup symetrii. Nic więc



Rys. 5. Diagram ukazujący położenie trzech kwarków realizujących reprezentację trójwymiarową 3 grupy  $SU(3)$  na płaszczyźnie izotopowo-hiperładunkowej  $(M, Y)$ . Reprezentację  $\underline{3}^*$  uzyskamy dokonując odbicia powyższego diagramu względem osi poziomej  $M$ .

Kwark  $c$  jest też nazywany powabny. Sądzi się też, że  $t$  został w 1994 roku odkryty eksperymentalnie.

Red.

dziwnego, że środowisko fizyków przyjęło z ogromnym przejęciem doniesienia w latach sześćdziesiątych o pozytywnej eksperymentalnej weryfikacji hipotezy kwarkowej. W przeprowadzonych reakcjach zderzeń elektronów o bardzo dużej energii z protonami okazało się, że elektrony po takim zderzeniu rozpraszają się w sposób wskazujący jednoznacznie na bogatą strukturę wewnętrzną hadronów. Mając dużą energię mogą one po prostu wnikać w głąb hadronu (protonu) i niejako „ogłądać” go od środka. Proces ten fizycy nazywają procesem głęboko nieelastycznego rozpraszania. Jego wyniki pozwoliły jednoznacznie stwierdzić, że hadrony zbudowane są z elementarnych obiektów o ładunkach elektrycznych i własnościach przewidzianych przez symetrię  $SU(3)$ .

Dzisiaj znamy aż 5 fundamentalnych kwarków. Prócz już wymienionych są to kwarki  $c$  (*charm* – ang. oczarowany) i  $b$  (*beauty* – ang. piękny), a pewne istotne względy teoretyczne również związane z symetrią wskazują na potrzebę istnienia szóstego, najcięższego zwanego  $t$  (*top* – ang. szczytowy). Symetria  $SU(3)$  powinna być więc rozszerzona do  $SU(5)$  lub  $SU(6)$  czyli do  $SU(n)$ , gdzie  $n$  jest liczbą różnych typów kwarków (fizycy nazywają typy kwarków zapachami). Jednak duże różnice w masach między kwarkami  $u, d, s, c, b$  i ewentualnie  $t$  powodują, że symetria  $SU(n)$  dla  $n \geq 4$  jest o wiele bardziej przybliżona. Często powiada się, że  $SU(n)$  dla  $n \geq 4$  jest silnie łamana do  $SU(3)$ , a przyczyną tego łamania są różnice mas kwarków. Niestety pochodzenie tych różnic nie jest jeszcze dobrze zrozumiane.

## 6. Symetrie lokalne a oddziaływania elementarne

Symetrie, o których mówiliśmy w poprzednim paragrafie, noszą nazwę ciągłych symetrii globalnych. Oznacza to, że elementy grup tych symetrii zadane są wzorem (19), w którym parametry  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) są stałymi i nie podlegają zmianie wraz z upływem czasu lub przeniesieniem obserwacji do innego punktu w przestrzeni. Na przykład, jeśli jakiś układ charakteryzuje się symetrią obrotową, to oznacza to, że będzie identycznie wyglądał po obrocie wszystkich swych części o ten sam kąt. Można jednak pokusić się o zbadanie niezmienniczości względem ogólniejszych przekształceń. Czy gdyby w przykładowym układzie o globalnej symetrii obrotowej obrócić każdą jego część o inny kąt (a więc o kąt zależny od położenia  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ), to otrzymamy układ identyczny z wyjściowym? Odpowiedź na to pytanie będzie, oczywiście, na ogół negatywna, co oznacza że globalna symetria układu nie będzie zazwyczaj jego symetrią lokalną. Niemniej okazuje się, że istnieją pewne istotne układy fizyczne charakteryzujące się taką właśnie lokalną symetrią. Równania, którymi je opisujemy mają tę samą postać, nawet jeśli dokonamy transformacji  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$  przy użyciu (19), ale z parametrami  $\varepsilon$  będącymi dowolną funkcją czasu  $t$  i położenia  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ .

Pierwszą historycznie teorią, której równania okazały się być niezmiennicze względem lokalnej transformacji, była podana przez Alberta Einsteina w 1915 r. jednolita teoria czasu, przestrzeni i grawitacji zwana Ogólną Teorią Względności (OTW) [3]. Jej równania są zbyt skomplikowane by je tu przytaczać; podamy jedynie, że lokalną grupą transformacji pozostawiającą je niezmienniczymi jest grupa lokalnych translacji i obrotów w czterowymiarowej czasoprzestrzeni  $M^4$ . Elementy tej grupy można zapisać, w myśl (19), jako:

$$a) \text{ translacje } \tau(\varepsilon_\mu) = \exp\{i \sum_{\mu=1}^4 \varepsilon_\mu P_\mu\}; \varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu(\vec{x}, t),$$

$$b) \text{ obroty } \omega(\varepsilon_{\mu\nu}) = \exp\{i \sum_{\mu,\nu=1}^4 \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} M_{\mu\nu}\}; \varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}(\vec{x}, t),$$

gdzie  $P_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) są czterema generatorami translacji w  $M^4$ ,  $M_{\mu\nu} (= -M_{\nu\mu})$  zaś sześcioma generatorami obrotów w  $M^4$  (trzy z nich odpowiadają obrotom w „zwykłej” trójwymiarowej  $\mathbb{R}^3$ , pozostałe trzy generują obroty w trzech płaszczyznach zbudowanych przez oś czasu i kolejne trzy osie układu współrzędnych przestrzennych).

Einstein sądził, że sukces symetrii lokalnej w opisie pola grawitacyjnego nie jest przypadkowy i podobna idea powinna doprowadzić do opisu pola



elektromagnetycznego. Propozycję w tym względzie wysunął wkrótce Hermann Weyl, przyjaciel wspomnianej już Emmy Noether. Weyl zażądał lokalnej niezmienniczości równań względem cechowania tj. względem zmiany skali mierzonych odległości i czasu w czasoprzestrzeni – i to różnych zmian w różnych punktach przestrzeni i czasu. Konsekwencją tej niezmienniczości miało być, według twierdzenia Noether, stowarzyszone prawo zachowania, postulowane przez Weyla jako zasada zachowania ładunku elektrycznego. Einstein wykazał jednak poważne ułomności propozycji Weyla i wrócono do niej w zmienionej formie dopiero dekadę później.

Był rok 1927 i światło dzienne ujrzały już teorie kwantowe, a w szczególności równanie Schrödingera (9). Wiadomo już też było, że elektromagnetyzm ma w istocie naturę kwantową, a więc i prawo zachowania ładunku elektrycznego powinno być wyrazem niezmienniczości względem jakiejś (lokalnej?) transformacji nie klasycznych równań ewolucji czasoprzestrzeni, jak w Ogólnej Teorii Względności, ale równań kwantowych, opisujących oddziaływanie naładowanych cząstek. Na tej podstawie Fritz London wykazał w tymże roku, że symetria stojąca zgodnie z twierdzeniem Noether za prawem zachowania ładunku elektrycznego nie jest niezmienniczością zmian skali, ale niezmienniczością równania Schrödingera ze względu na lokalne zmiany fazy zespolonej funkcji falowej  $\phi(\vec{x}, t)$  tj.:

$$(61) \quad \phi(\vec{x}, t) \rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = e^{i\alpha(\vec{x}, t)} \phi(\vec{x}, t),$$

gdzie  $\alpha(\vec{x}, t)$  jest dowolną funkcją przestrzeni i czasu. Równanie (61) opisuje więc niezmienniczość względem lokalnej grupy  $U(1)$ .

Mimo zmodyfikowania idei Weyla, nazwa „symetria cechowania” pozostała i przyjęła się powszechnie w fizyce na określenie każdej symetrii lokalnej mimo, że słowo „cechowanie” odnosiło się historycznie jedynie do dowolności w wyborze skali długości, a nie dowolności w wyborze fazy funkcji  $\phi(\vec{x}, t)$ . Przez około ćwierć wieku idea lokalnej symetrii cechowania, zwanej też z angielskiego „symetrią gauge”, funkcjonowała jako ciekawostka, a nie fakt o fundamentalnym znaczeniu. Dopiero zbadanie własności oddziaływań silnych, a następnie słabych, skierowały prace fizyków w stronę teoretycznego opisu tych oddziaływań z wykorzystaniem jako narzędzia idei symetrii lokalnej. Występowanie tej symetrii w równaniach pola grawitacyjnego i równaniach kwantowej teorii elektromagnetyzmu umocniło fizyków w przekonaniu zwanym Zasadą Symetrii Lokalnej. Głosi ona, że:

*Każda ciągła symetria w fizyce jest też jej symetrią lokalną.*

Zasada ta w 25 lat po sformułowaniu prawa niezmienniczości względem zmiany fazy przez Londona była tylko hipotezą badawczą i wymagała od Przyrody znacznie szerszej symetrii niż dotychczas przyjmowano! Okazja do weryfikacji tej hipotezy nadarzyła się właśnie przy budowie teorii oddziaływań słabych i silnych, co stało się czołowym wyzwaniem rzuconym fizyce wysokich energii drugiej połowy XX wieku.

Jaki jest mechanizm tworzenia oddziaływania w układzie dynamicznym poprzez istniejące w nim lokalne symetrie? Pokażemy to na prostym przykładzie.

Wyobraźmy sobie nieskończenie długi zbiornik z gazem o ustalonym ciśnieniu jak na rys. 6a. Poddając zawarty w nim gaz globalnej translacji  $T(\vec{a})$  o wektor  $\vec{a}$  wzdłuż zbiornika zmieniamy współrzędne zgodnie ze wzorem

$$(62) \quad T(\vec{a})\vec{x} = \vec{x} + \vec{a},$$

przy czym po przemieszczeniu układ będzie się charakteryzował ciśnieniem  $p'(\vec{x})$ :

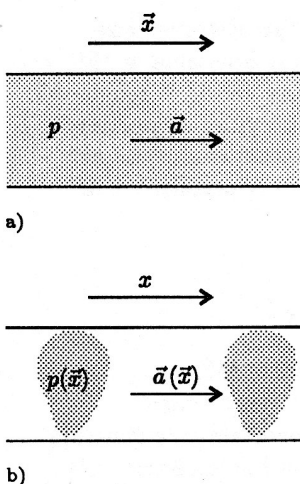
$$(63) \quad p'(\vec{x}) = p(\vec{x} - \vec{a}).$$

Oczywiście na skutek tego, że zbiornik jest nieskończenie długi będziemy mieli

$$(64) \quad p(\vec{x} - \vec{a}) = p(\vec{x}),$$

gdź gaz nigdzie się nie zagęści ani nie rozrzedzi wskutek tej transformacji.

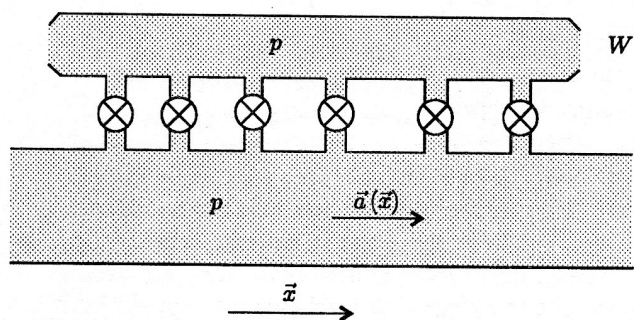
Powiemy zatem, że translacja wzdłuż osi zbiornika niczego w nim nie zmienia i dlatego jest globalną symetrią tego układu.



Rys. 6. Nieskończenie długi zbiornik z gazem o stałym ciśnieniu wykazują globalną symetrię translacyjną a) ale nie lokalną b).



Dokonyjemy teraz na tymże samym gazie translacji lokalnej, jak na rys. 6b.



Rys. 7. Dołączanie zbiornika wyrównawczego  $W$  i połączenie go zaworami ze zbiornikiem głównym przywraca lokalną symetrię translacyjną. Będzie ona tym dokładniejsza im więcej wykorzystamy zaworów.

Każda porcja gazu przemieszczana jest teraz o wektor  $\vec{a}(\vec{x})$  zależny od aktualnego jej położenia  $\vec{x}$ . Powstaną w związku z tym lokalne zagęszczenia w miejscach, gdzie napłynie zbyt dużo gazu, lub rozrzedzenie w innych. Bezpośrednio po takiej transformacji ciśnienie w zbiorniku nie będzie już stałe i stan gazu po lokalnej translacji nie będzie identyczny z tymże przed jej dokonaniem. Powiemy, że lokalna translacja nie jest symetrią rozważanego układu. Można układ jednak nieco zmodyfikować tak, by była. Dołączmy mianowicie do możliwie wielu punktów na ściankach zbiornika zawory łączące go ze zbiornikiem wyrównawczym  $W$  zawierającym również gaz o ciśnieniu  $p$ . Pokazuje to rys. 7.

Jeśli dokonamy lokalnej translacji na gazie w zbiorniku głównym, nie powstaną teraz w nim fluktuacje gęstości, gdyż natychmiast wyrówna je połączony zaworami zbiornik wyrównawczy  $W$ . Lokalna symetria translacyjna będzie zachowana. Dokonałiśmy tego wprowadzając dwa dodatkowe elementy: zbiornik  $W$  i zawory, dzięki którym przepływa informacja (ma miejsce oddziaływanie) między oboma zbiornikami.

*Niezmienniczość względem lokalnej transformacji wymusiła więc na układzie zarówno wprowadzenie nowych jego elementów jak i oddziaływań.*

W ogólnym przypadku układu dynamicznego cząstek charakteryzującego się niezmienniczością względem transformacji globalnej, wymuszenie na nim o wiele głębszej symetrii lokalnej jest równoznaczne z wprowadzeniem nowych cząstek i oddziaływań, które te cząstki przenoszą. Te nowe cząstki nazywane są bozonami pośredniczącymi i to one właśnie, sprzęgając się w odpowiedni sposób z pozostałymi cząstkami w układzie, zapewniają jego lokalną symetrię (podobnie jak gaz w zbiorniku  $W$  wyrównuje przez zawory ciśnienie w zbiorniku głównym). Bozony pośredniczące są więc odpowiednikiem zbiornika  $W$ , a zawory – odpowiednikiem przenoszonego przez te bozony oddziaływania. Znane dobrze fotony, będące najmniejszymi porcjami energii pola elektromagnetycznego, są właśnie bozonami pośredniczącymi w oddziaływaniach elektromagnetycznych między wszelkimi naładowanymi elektrycznie cząstkami.

Mechanizm uzyskiwania z teorii o symetrii globalnej, teorii o symetrii lokalnej został opracowany i rozszerzony na przypadek lokalnych symetrii nieabelowych przez C.N. Yanga i R. Millsa w połowie lat pięćdziesiątych naszego stulecia. Przegląd tego dokonania można znaleźć w doskonałym artykule Millsa [4].

Teoria kwantowych układów z oddziaływaniami generowanymi przez żądanie ich niezmienniczości względem lokalnych transformacji nosi nazwę teorii pola z cechowaniem lub teorii Yanga–Millsa. Jej pojawienie się otworzyło pole do popisu dla fenomenologów. Należało przecież sprawdzić wspomnianą hipotezę symetrii lokalnej stosując ją do opisu dwu jeszcze niezbyt dobrze rozumianych oddziaływań tj. silnego – sklejającego nukleony w jądrach, a kwarki w nukleonach – i słabego – odpowiedzialnego za istnienie promieniowania  $\beta$  i syntezę termojądrową. By to zrobić, należało poszukać grupy lokalnej symetrii, która zgodnie z teorią Yanga–Millsa generowałaby odpowiednie oddziaływania.

Problem znalazł rozwiązanie w latach siedemdziesiątych, kiedy to Salam, Weinberg i Glashow zaproponowali teorię oddziaływań słabych opartą na grupie lokalnej symetrii  $SU(2) \times U(1)$ . Przewidywała ona istnienie i własności trzech nowych cząstek przenoszących oddziaływanie słabe. Gdy z początkiem lat osiemdziesiątych nadeszła z CERN-u w Szwajcarii długo oczekiwana wiadomość o odkryciu trzech nowych cząstek, o przewidywanych przez model Salama–Weinberga–Glashowa właściwościach, w świecie fizyków zapanowała

euforia. Symetria lokalna stała się faktem. Tym samym potwierdziła się Zasada Symetrii Lokalnej.

Próby sformułowania teorii oddziaływań silnych jako teorii Yanga–Millsa też zakończyły się sukcesem, choć na razie jeszcze nie tak spektakularnym jak w przypadku oddziaływań słabych czy elektromagnetycznych. Grupę lokalnej symetrii wybrano tu jako grupę  $SU(3)_C$  określoną też mianem grupy symetrii kolorowej, a to przez wzgląd na pewne nowe liczby kwantowe kwarków zwane ładunkami kolorowymi. Konsekwencją tej symetrii jest istnienie ośmiu różnych nośników oddziaływań silnych tzw. gluonów. Mają one za zadanie sklejać kwarki wewnątrz hadronów. Niestety, używając współczesnych narzędzi badań teoretycznych niewiele jeszcze możemy powiedzieć o mechanizmie tego sklejanania. Fizycy wierzą jednak, że trudności te są przejściowe, a Zasada Symetrii Lokalnej zbyt piękna, by istniały od niej jakiegokolwiek odstępstwa.

Reasumując można stwierdzić, że świat oddziaływań fundamentalnych jest wynikiem niezmienniczości kwantowych układów dynamicznych względem lokalnych grup  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  i  $U(1)$ , co odpowiada istnieniu oddziaływań silnych, słabych i elektromagnetycznych. Lokalną grupą symetrii Przyrody na poziomie cząstek elementarnych jest więc iloczyn prosty  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Teorię opartą na tej grupie symetrii nazywa się często modelem standardowym. Jej konsekwencją okazuje się być ciekawa własność „siły” poszczególnych oddziaływań. Na odległościach rzędu  $10^{-15}$  m (rozmiarach protonu) „siły” oddziaływań silnych, elektromagnetycznych i słabych mają się do siebie jak  $1 : 10^{-2} : 10^{-15}$ . Cząstki mogą zbliżać się do siebie tak blisko mając energię około 100 GeV (około  $1,6 \cdot 10^{-10}$  J).

W ramach modelu standardowego można jednak teoretycznie wyliczyć, że przy odległościach miliard razy mniejszych ( $\sim 10^{-25}$  m) siły poszczególnych oddziaływań stają się porównywalne. Na tak małe odległości mogą zbliżyć się cząstki o olbrzymiej energii  $10^{15}$  GeV. Energie te nie są dostępne doświadczalnie, ale w początkowej fazie ewolucji Wszechświata, tuż po Wielkim Wybuchu [5], w tzw. fazie supergorącego Wszechświata, energie tego rzędu były typowymi średnimi energiami cząstek. Można powiedzieć, że przy bardzo wysokich energiach, które istniały we Wszechświecie około  $10^{10}$  lat temu, różnica między poszczególnymi typami znanych nam oddziaływań nie istniała! Było więc tylko jedno fundamentalne oddziaływanie, z którego w miarę upływu czasu i ochładzania się Wszechświata wyodrębniły się oddziaływania silne, słabe, elektromagnetyczne, a może nawet grawitacyjne. To jedno fundamentalne oddziaływanie powinno też być opisywane przez teorię z jakąś lokalną symetrią, która je generuje. Jaka to symetria? Nietrudno ją przyjąć jako minimalną symetrię zawierającą symetrię modelu standardowego  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Najprostszymi kandydatami będą tu grupy  $SU(5)$  i  $SO(10)$ . Modele oparte na nich (lub jeszcze szerszych grupach), jako lokalnych grupach symetrii, określa się mianem Teorii Wielkiej Unifikacji w skrócie GUT (z angielskiego *Grand Unified Theories*). Teorie tego typu mają duże znaczenie nie tylko w osiągnięciu maksymalnej estetyki opisu oddziaływań przy bardzo wysokich energiach. Są to też hipotetyczne modele oddziaływań we wczesnym Wszechświecie. Symetrie tych modeli to swoisty „kod genetyczny”, wedle którego materia powstawała we Wszechświecie w takich, a nie innych formach, wytwarzając na końcowym etapie swej ewolucji istoty rozumne usiłujące dzisiaj zgłębić najlepiej strzeżone tajemnice Przyrody.

## 7. Supersymetrie, czyli co dalej z symetrią?

Rozważyliśmy dotychczas różne symetrie zewnętrzne (działające na współrzędnych) i wewnętrzne (działające na „kwantowych” indeksach funkcji polowych). Dowiedzieliśmy się, że ich istnienie prowadzi do rozmaitych praw zachowania lub do oddziaływań w układach dynamicznych. Jest to wysoce nietrywialny wynik, znacznie wykraczający poza ramy przypadku czy ciekawostki. Nic więc dziwnego, że pytania o symetrię stały się podstawowymi

pytaniem w fizyce. Jedno z nich brzmi: Jaka jest najszersza klasa symetrii równań fizyki i jaka jest tego konsekwencja? Odpowiedź podana została przez Colemana i Mandulę w 1967 roku w twierdzeniu, które głosi, że jedynych symetrii układów dynamicznych możemy szukać wśród translacji i obrotów czterowymiarowej czasoprzestrzeni  $M^4$  oraz wśród symetrii wewnętrznych generowanych przez translacyjnie niezmiennicze generatory (tj. generatory mające charakter tensorowy). Twierdzenie Colemana i Manduli oznacza, że symetrie wewnętrzne nie mieszają się w nietrywialny sposób z symetriami geometrycznymi translacji i obrotów (zewnętrznymi). Ma to daleko idące konsekwencje. Na przykład multiplet odpowiadający pewnej wewnętrznej symetrii, powiedzmy izotopowej  $SU(2)$  nie może zawierać cząstek o różnym spinie lub masie.

Jednym z założeń, na którym oparł się dowód twierdzenia Colemana i Manduli, było to, iż generatory najogólniejszej symetrii układu dynamicznego mają wyłącznie charakter tensorowy. Jeśli z takiego założenia zrezygnować i dopuścić również symetrie z generatorami o charakterze spinorowym, tj. o własnościach transformacyjnych względem grupy obrotów opisanych w rozdziale 5, to okazuje się, że istnieje możliwość nietrywialnego połączenia symetrii wewnętrznych z zewnętrznymi. Otrzymana ogólna symetria będzie miała generatory spinorowe (typu  $S$ ) i tensorowe (typu  $Q$ ), których komutatory  $[ ]$  (antykomutatory  $\{ \}$ ) można zapisać symbolicznie

$$\{S, S\} = Q, \quad [S, Q] = S; \quad [Q, Q] = Q.$$

Nazwano ją supersymetrią. Do fizyki wprowadzili ją w 1974 roku J. Wess i B. Zumino.

Wynikiem supersymetrii jest występowanie multipletów cząstek o jednakowych własnościach fizycznych z wyjątkiem spinu. Powinien więc istnieć supersymetryczny partner elektronu, tzw. selektron, cząstka o identycznym jak elektron ładunku i własnościach oddziaływania, ale mająca spin  $S = 0$ . Podobnie powinien istnieć supersymetryczny partner fotonu, tzw. fotino, różniący się od fotonu jedynie masą i spinem (foton ma spin jednostkowy; dla fotina oczekujemy  $s = 1/2$ ). Ogólnie dla każdej znanej cząstki ze spinem  $s$  supersymetria przewiduje istnienie cząstki o identycznych własnościach, lecz o spinie  $s + 1/2$  lub  $s - 1/2$ .

To, czy supersymetria jest istotnie symetrią Przyrody, pozostaje ciągle otwartym pytaniem. Ale nawet jeśli przyszłe badania odpowiedziały nań negatywnie, w niczym nie umniejszą roli, jaką symetria odegrała w opisie i rozumieniu otaczającego nas świata, by ustawicznie przybliżać człowieka do porządku, piękna i doskonałości.

### Bibliografia

1. H. Weyl, *Symetria*, PWN 1960.
2. L.B. Okuń, *Fizika elementarnych častic*, Nauka, 1988.
3. P.A.M. Dirac, *Obszczaja teoria otnositelnosti*, Atomizdat, 1978.
4. R. Mills, artykuł w *Postęпах Fizyki*, 44 (1993) 23.
5. S.W. Hawking, *Krótką historia czasu*, Alfa, 1993.
6. S. Weinberg, *Pierwsze trzy minuty*, Iskry, 1980.

Wydawnictwa Uczelniane WSRP w Siedlcach

Wyd. I. Nakład 300 egz. Ark. wyd. 5,5.

Ark. druk. 6,25. Format A-4. Papier kl. III.

Oddano do druku: styczeń 1995 r. Druk

ukończono: styczeń 1995 r.

Druk: Zakład Poligrafii WSRP Zam. nr 2/W/95

