

# Druga część XVI-tego problemu Hilberta

Henryk ŻOŁĄDEK, Warszawa

## 1. Wstęp

XVI-ty problem Hilberta składa się z dwóch części. Pierwsza część dotyczy rzeczywistej geometrii algebraicznej i pyta o topologiczne własności krzywych i powierzchni algebraicznych. Druga część zajmuje się wielomianowymi płaskimi polami wektorowymi i pyta o liczbę i położenie cykli granicznych.

Postęp w rozwiązaniu pierwszej części problemu jest znaczny. Klasyfikacja krzywych algebraicznych w płaszczyźnie zespolonej została przeprowadzona dla stopni mniejszych od 8. Spośród ogólnych wyników można odnotować nierówność Harnacka, nierówność Pietrowskiego i twierdzenie Rochlina. Inne wyniki zostały osiągnięte przez Newtona, Clebscha, Hilberta, Nikulina, Charłamowa, Gudkowa, Arnolda, Wiro, Fidlera. Są wielowymiarowe uogólnienia: teoria Chowańskiego, nierówności Pietrowskiego i Olejnik oraz inne.

W przeciwieństwie do algebraicznej części problemu postęp w rozwiązywaniu drugiej części jest mały. W niniejszym artykule skoncentrujemy się na drugiej części XVI-ego problemu Hilberta.

## 2. Podstawowe pojęcia

Wprowadzimy je na przykładach.

**Przykład 1.** Kamień spadający pionowo na ziemię. Ruch kamienia jest opisany przez równanie Newtona  $m\ddot{x} = -mg$ , gdzie  $m$  jest masą kamienia,  $x$  jest wysokością położenia kamienia nad ziemią,  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim, kropka zaś oznacza pochodną po czasie. Jego rozwiązanie jest oczywiste,  $x(t) = x_0 + v_0t - gt^2/2$ , ale nie ono nas interesuje. Skomplikujmy ten przykład. Wprowadzając funkcję  $y(t) = \dot{x}(t)$  otrzymujemy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu na  $x$  i  $y$ :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g,$$

(lub pole wektorowe na płaszczyźnie). Rozwiązania tego układu zakreślają pewne krzywe, nazywane *krzywymi fazowymi*, w płaszczyźnie zmiennych  $x$  i  $y$ . Ich równania można uzyskać eliminując  $t$  ze wzorów na  $x(t)$  i  $y(t)$ . Jest to rodzina parabol  $y^2/2 + gx = \text{const}$ . W ten sposób otrzymaliśmy *portret fazowy* naszego układu.

**Przykład 2.** Drgania kulki umieszczonej pomiędzy dwiema sprężynkami. Zgodnie z prawem Hooke'a zmienna  $x$  wychylenia kulki ze stanu równowagi opisuje się równaniem  $\ddot{x} = -kx$ , (gdzie  $k$  jest stałą), lub układem

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -kx$$

w zmiennych fazowych  $x$  i  $y = \dot{x}$ . Krzywe fazowe tego układu zadają się równaniami  $kx^2 + y^2 = \text{const}$  i są albo elipsami (reprezentującymi *rozwiązania okresowe*), albo pojedynczym punktem  $x = y = 0$  (zwanym *punktem równowagi*).

**Przykład 3.** Rozważmy układ

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) + y, \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Jego krzywe fazowe dają się opisać wzorami, ale te formuły są skomplikowane. My opiszemy jakościowo portret fazowy za pomocą przejścia do biegunowego układu współrzędnych  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\phi = \arg(x + iy)$ . Po przeliczeniach dostajemy

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\phi} = -1.$$

Zmienne są rozdzielone i można badać ich ruch oddzielnie. Zmienna  $\phi$  zmienia się jednostajnie z czasem. Natomiast na półprostej  $r \geq 0$  mamy dwa położenia równowagi:  $r = 0$  i  $r = 1$ . Na odcinku  $0 < r < 1$  zmienna  $r$  rośnie od 0 przy czasie  $t = -\infty$  do 1 przy  $t = \infty$ . Na półprostej  $r > 1$  zmienna  $r$  maleje do 1

przy  $t = \infty$ . Tłumacząc to na zmienne kartezjańskie otrzymujemy jeden punkt równowagi  $x = y = 0$ , z którego trajektorie odwijają się (*niestabilne ognisko*) i trajektorię okresową  $x^2 + y^2 = 1$ , na którą trajektorie nawijają się. Zamknięta krzywa fazowa  $x^2 + y^2 = 1$  jest izolowana wśród trajektorii okresowych. Takie krzywe nazywają się *cyklami granicznymi*.

Druga część XVI-tego problemu Hilberta formułuje się następująco.

Rozważmy układ równań różniczkowych postaci

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

gdzie  $f, g$  są wielomianami stopnia  $\leq n$ . Określić liczbę i położenie cykli granicznych układu (1).

W szczególności dąży się do ograniczenia  $N(n)$  dla liczby cykli granicznych układów stopni  $\leq n$ .

### 3. Historia pomyłek

Interesująca jest historia drugiej części XVI-tego problemu Hilberta.

Pierwszym zadaniem jest pokazanie *skończoności* liczby cykli granicznych dla indywidualnego pola wektorowego. Na początku lat 1920-tych Dulac opublikował monografię [4], która zawierała dowód twierdzenia o skończoności. Wynik był prawdziwy aż do końca lat 1970-tych, kiedy to niektórzy ludzie zaczęli czytać książkę Dulaca uważnie i nie mogli zrozumieć niektórych jego argumentów. Wreszcie Iliaszenko w 1979 r. pokazał definitywnie, że dowód Dulaca zawiera istotną lukę.

Od tego momentu Iliaszenko zaczął pracować nad uzupełnieniem dowodu twierdzenia o skończoności. To mu się udało. Pełny dowód jest zawarty w jego książce [9], ale zasadnicze jego idee można znaleźć w krótszej pracy [8].

Inny dowód został zaanonsowany przez grupę francuskich matematyków, J. Ecalle'a, J. Martineta, R. Moussu, J.P. Ramisa w [5]. W tej notce podali oni ogólny schemat dowodu. Później Ecalle opublikował więcej szczegółów w [6].

Tak więc mamy dwa dowody. Jednakowoż jedynie dowód Iliaszenki jest jasny i powszechnie uznany; pracował nad jego redakcją od 1986 r. Francuski dowód jest dużo niższej jakości.

Obecnie specjaliści pracują nad lokalną skończonością, tzn. nad oszacowaniem liczby cykli granicznych dla lokalnej rodziny  $V_\lambda$ ,  $\lambda \in (R^k, 0)$  układów wielomianowych. To dałoby jednostajne oszacowanie  $N(n) < \infty$ .

Wiele dramaturgii jest związane z próbami oszacowania  $N(2)$  (przypadek liniowy jest trywialny,  $N(1) = 0$ ).

Prawdopodobnie pierwszy przykład układu z cyklem granicznym został podany w 1929 r. przez fizyka A. Sommerfelda w [12], gdzie otrzymał on dwa cykle na raz. W 1939 r. N.N. Bautin [1] zaanonsował, że  $N(2) \geq 3$ , pełny dowód pojawił się w 1952 r. w [2]. W 1955 r. I. Pietrowski i E. Landis [10] podali dowód, że  $N(2) = 3$ . Później został znaleziony błąd w ich dowodzie (S.P. Nowikow) i w 1967 r. wycofali się z niego.

Niemniej jednak hipoteza  $N(2) = 3$  pozostawała aktualna aż do 1979 r. Wtedy to chiński matematyk Shi Songling podał następujący układ kwadratowy z czterema cyklami granicznymi [13]

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2 \\ \dot{y} &= x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy, \end{aligned}$$

gdzie  $\delta = -10^{-13}$ ,  $\varepsilon = -10^{-52}$ ,  $\lambda = -10^{-200}$  (!). Obecna hipoteza to  $N(2) = 4$ .

Nie ma żadnych rozsądnych hipotez o liczbach  $N(n)$  dla dowolnych  $n$ . Co prawda, Pietrowski i Landis w [11] podawali oszacowanie dla  $N(n)$ , ale jego los okazał się taki sam jak tego z [10].

W dalszej części tego artykułu przedstawimy pewne szczegóły przykładu Shi oraz ogólne idee dowodu twierdzenia o skończoności.

#### 4. Przykład Shi

Rozważmy najpierw sytuację gdy  $\lambda = \varepsilon = \delta = 0$ . Naszkicujemy portret fazowy układu (2) na płaszczyźnie uzwarconej okręgiem w nieskończoności, (patrz Rysunek 1). Okazuje się, że jeśli układ jest wielomianowy, to jego portret fazowy można w sposób ciągły przedłużyć do takiego uzwarcenia, zwanego *uzwarceniem Poincaré* i reprezentowanego przez dysk dwuwymiarowy.

Układ (2) ma prostą  $L : 1 + x - 25y = 0$  bez styczności, (wszystkie trajektorie przechodzą przez nią w jednym kierunku). Okrąg w nieskończoności jest niezmienniczy dla tego układu. Mamy dwa skończone punkty równowagi  $(0, 1)$  i  $(0, 0)$  rozdzielone prostą  $L$ . Punkt  $(0, 1)$  jest silnym niestabilnym ogniskiem, a punkt  $(0, 0)$  jest bardzo słabym stabilnym ogniskiem.

Po zaburzeniu w pobliżu słabego ogniska  $(0, 0)$  pojawiają się dwa cykle graniczne  $\gamma_1, \gamma_2$ . Punkt  $(0, 1)$  pozostaje niestabilnym ogniskiem. Ponadto mamy dwa obszary  $U_1$  i  $U_2$  w formie pierścieni.  $U_1$  jest ograniczony przez  $L$ , półokrąg w nieskończoności i mały okrąg wokół  $(0, 1)$ .  $U_2$  jest ograniczony przez  $L$ , drugi półokrąg w nieskończoności i krzywą bliską większemu z cykli  $\gamma_{1,2}$ . Obszary  $U_i$  nie zawierają punktów równowagi i na ich brzegach trajektorie biegną albo do wnętrza ( $U_1$ ), albo na zewnątrz ( $U_2$ ). Takie sytuacje prowadzą do istnienia dodatkowych cykli granicznych w  $U_i$  (kryterium Bendixsona [3]).

#### 5. Dowód twierdzenia o skończoności

Na początku będziemy postępować drogą wyznaczoną przez Dulaca [4], następnie zobaczymy jego błąd i na koniec pokażemy, w jaki sposób Iliaszenko pokonał trudności.

Założmy, że układ (1) ma nieskończenie wiele cykli granicznych. Każdy z tych cykli ogranicza pewien obszar na płaszczyźnie. Okazuje się, że ten obszar musi zawierać co najmniej jeden punkt równowagi pola (1). Jest to własność topologiczna i wynika z faktu, że indeks pola wektorowego wzdłuż cyklu (ile razy wektor prędkości obróci się) równa się 1. Ponieważ liczba punktów równowagi, (albo rozwiązań układu  $f = g = 0$ ), jest ograniczona (przez  $n^2$ ) musi istnieć nieskończony ciąg koncentrycznych cykli  $\gamma_n$ . Leżą one w zwartym dysku, modelu Poincaré.

Rozważmy zbiór graniczny dla  $\{\gamma_n\}$ . Nie może on zawierać orbity okresowej. Rzeczywiście, jeśli  $\delta$  jest taką orbitą, to możemy zdefiniować przekształcenie powrotu  $\Delta_\delta : S \rightarrow S$  odcinka  $S$  prostopadłego do  $\delta$  w siebie. Punkty stałe tego przekształcenia reprezentują trajektorie okresowe, izolowane zaś punkty stałe odpowiadają cyklom granicznym. Z klasycznych twierdzeń o równaniach różniczkowych wynika, że  $\Delta_\delta$  jest analityczne i nie może mieć nieskończenie wielu izolowanych i zbieżnych punktów stałych.

Mamy dwie możliwości:

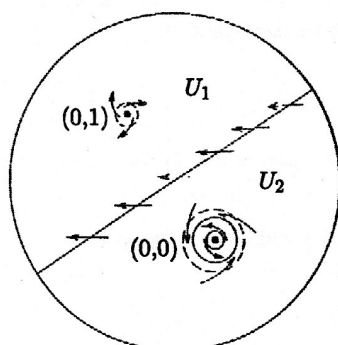
- (i)  $\lim \gamma_n = \Gamma$ , złożony cykl składający się z punktów równowagi i oddzielających krzywych fazowych łączących je, (patrz Rysunek 2);
- (ii)  $\lim \gamma_n$  jest punktem równowagi, który możemy przyjąć za  $(0; 0)$ .

**Lemat.** Przypadek (ii) redukuje się do przypadku (i).

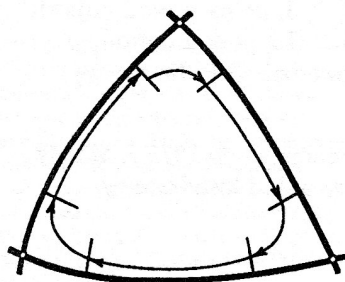
**Dowód.** Mamy  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  i we współrzędnych biegunowych  $(r, \phi)$  układ (1) zapisuje się następująco

$$\dot{r} = r^{l+1} F(r, \phi), \quad \dot{\phi} = r^l G(r, \phi), \quad G(0, \cdot) \neq 0.$$

Możemy podzielić prawe strony tego układu przez  $r^l$ ; portret fazowy nie zmieni się po takiej operacji, zmieni się tylko prędkość wzdłuż trajektorii. Otrzymamy pole wektorowe w walcu z niezmienniczym okręgiem  $r = 0$ .



Rys. 1



Rys. 2

Okrąg  $r = 0$  może zawierać punkty równowagi, do których stosujemy tę samą procedurę (rozdmuchania). Znowu dostaniemy niezmienniczy okrąg z możliwymi osobliwościami itd.

Znane twierdzenie Bendixsona-Seidenberga-van den Essena [3] mówi, że ten proces skończy się po skończonej liczbie kroków. Otrzymamy pewien kontur  $\Gamma$  składający się z elementarnych punktów równowagi i łączących je oddzielających trajektorii.

Punkt równowagi  $x = y = 0$  nazywa się *elementarnym*, jeśli w pewnym liniowym układzie współrzędnych przyjmuje jedną z dwóch form:

$$\dot{x} = \lambda_1 x + \dots, \dot{y} = \lambda_2 y + \dots, \text{ (hiperboliczny);}$$

$$\dot{x} = ax^{k+1} + \dots, \dot{y} = \lambda y + \dots, \text{ (zdegenerowany).}$$

Oczywiście po powyższej serii rozdmuchań mamy  $\lim \gamma_n = \Gamma$ . ■

W przypadku (i) rozdmuchujemy także wszystkie nieelementarne punkty równowagi pojawiające się w wierzchołkach  $\Gamma$ . Możemy zatem założyć, że  $\lim \gamma_n = \Gamma$  zawiera tylko elementarne punkty krytyczne.

Weźmy odcinek  $S$  prostopadły do  $\Gamma$  w jakimś punkcie jednej z jego oddzielających trajektorii. Trajektorie pola wektorowego definiują przekształcenie powrotu  $\Delta_\Gamma : S \rightarrow S$ . Punkty stałe  $\Delta_\Gamma$  odpowiadają orbitom okresowym, (cyklom granicznym, jeśli izolowane). Mamy pokazać, że  $\Delta_\Gamma$  nie ma nieskończenie wielu izolowanych i skupiających się punktów stałych.

Możemy przedstawić  $\Delta_\Gamma$  jako złożenie przekształceń  $\Delta_m \circ \dots \circ \Delta_1$ , gdzie każde  $\Delta_i : S_{i-1} \rightarrow S_i$ , ( $S_i$  - odcinki prostopadłe do  $\Gamma$ ) jest albo przekształceniem zdefiniowanym przez trajektorie biegnące wzdłuż krzywej oddzielającej, albo jest określone przez trajektorie biegnące w pobliżu punktu krytycznego, (patrz Rysunek 2). Przekształcenia pierwszego typu są analityczne. Przekształcenia drugiego typu posiadają istotne osobliwości.

Rozważmy układ liniowy  $\dot{x} = \lambda_1 x$ ,  $\dot{y} = -\lambda_2 y$ . Wtedy  $\Delta_i(x) = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$ . Okazuje się, że dla nieliniowego hiperbolicznego punktu krytycznego dostaje się asymptotyczny szereg Dulaca

$$\Delta_i(x) = c_0 x^{\nu_0} + \sum x^{\nu_j} P_j(\ln x), \quad \nu_j \rightarrow \infty,$$

gdzie  $P_j$  są wielomianami.

Rozważmy zdegenerowany punkt krytyczny  $\dot{x} = ax^{k+1}$ ,  $\dot{y} = -y$ . Wtedy  $\Delta_i(x) = Ce^{-a/(kx^k)}$ ,  $x \geq 0$ .

Zatem każde  $\Delta_i$  jest albo szeregiem Dulaca, albo przekształceniem płaskim (wszystkie pochodne zerowe), albo przekształceniem odwrotnym do płaskiego. Stąd wynika, że  $\Delta_\Gamma$  jest, albo przekształceniem płaskim, albo odwrotnym do płaskiego, albo rozwija się w szereg Dulaca. Aby zobaczyć ostatnią własność przyjrzyjmy się następującemu przykładowi

$$\{e^{-b/x^l}\}^{-1} \circ x^\nu \circ e^{-a/x^k} = \left(-\frac{1}{b} \ln x\right)^{-1/l} \circ e^{-a\nu/x^k} = \left(\frac{a\nu}{bx^k}\right)^{1/l}.$$

Przekształcenia płaskie i odwrotne do płaskich nie mają skupiających się punktów stałych. Jeśli szereg Dulaca jest zbieżny, wtedy on także nie może mieć skupiających się punktów stałych ( $\Delta_\Gamma - \text{id} = dx^\mu(\ln x)^k(1 + \dots) \neq 0$  blisko 0).

Tutaj leży błąd popełniony przez Dulaca. Założył on, że tylko szereg Dulaca rządzi zachowaniem się  $\Delta_\Gamma$ . Ale mamy taki oto przykład

$$-\ln x \circ x^\nu(1 - x^\mu) \circ e^{-1/x^k} = -\ln x \circ e^{-\nu/x^k}(1 - e^{-\mu/x^k}) = \nu x^{-k} + \sum \frac{1}{j} e^{-\mu j/x^k}.$$

Widzimy, że - oprócz szeregu Dulaca -  $\Delta_\Gamma$  może zawierać płaskie człony nie do uchwycenia za pomocą szeregu Dulaca.

Teraz musimy opuścić Dulaca i postępować drogą Iliaszenki. Ponieważ jest ona długa, zawiła i ciernista ograniczymy się jedynie do paru ogólnych idei.



Współczesne teorie aksjomatyczne mają jednak zgoła inny charakter, niż przytoczona przez Marka Kordosa, jako przykład, aksjomatyka płaszczyzny euklidesowej. Ta ostatnia usiłowała opisać w istocie jeden obiekt. Tymczasem, teorie najżywiej się dziś rozwijające zawdzięczają swoje powodzenie wielkiej różnorodności modeli. Prowadzi to do rozlicznych korzyści. Po pierwsze, rezygnacja z kategoryczności pozwala na badanie teorii o prostych układach aksjomatów. Na przykład, znana wszystkim teoria grup opisana jest trzema prostymi warunkami; podobnie jest z teorią przestrzeni metrycznych. Po drugie (i ważniejsze), istnienie wielu modeli doprowadziło do przełamania barier między różnymi, dawniej autonomicznymi działami matematyki. Na przykład, każdy matematyk zajmujący się poważnie teorią liczb musi się orientować w metodach geometrii algebraicznej i (zdefiniowanej topologicznie) algebraicznej  $K$ -teorii.

Wracając na chwilę do geometrii – sędzę, że uczenie jej na uniwersytecie w oparciu o kategoryczną aksjomatykę stanowi dziś dysonans ze wszystkimi innymi teoriami matematycznymi, z jakimi zaznajamiamy studentów. Wykład taki, choć nie pozbawiony elegancji, pozostawia geometrię w izolacji od innych działów i metod. Oparcie tego kursu na bazie algebry liniowej stanowi tu, moim zdaniem, remedium.

Reasumując: to matematycy sami sobie wymyślają manowce, a potem po nich błędzą, łudząc się w tym samym czasie, że uprawiają matematykę.

W działalności matematyków kryje się zresztą wiele innych niebezpieczeństw, ale to jest oddzielny temat.

I jeszcze jedna uwaga: mam nadzieję że wszyscy czytelnicy tekstu Marka Kordosa domyślili się, że eksponowana rola jaką w nim pełni moja osoba miała wyłącznie na celu sprowokowanie mnie do napisania powyższych uwag.