# Program Hilberta – drogi i manowce

*Roman MURAWSKI, Poznań*

Jedną z reakcjji na kryzys w podstawach matematyki, który ujawnił się na przełomie XIX i XX wieku, a który związany był z wykryciem antynomii na gruncie teorii zbiorów nieskończonych, był program zaproponowany przez matematyka niemieckiego Davida Hilberta (1862–1943). Nazywa się go dziś programem Hilberta, a kierunek w filozofii matematyki, który powstał na jego bazie nazywa się formalizmem.

Celem Hilberta było ugruntowanie matematyki klasycznej, oparcie jej na pewnym i solidnym fundamencie poprzez wykazanie, że jest ona niesprzeczna i może być uprawiana w sposób bezpieczny i nie budzący wątpliwości. Przeciwstawił się on w ten sposób próbom wyjścia z kryzysu polegającym na ograniczaniu matematyki poprzez eliminowanie z niej tych jej części czy elementów, które prowadzą (czy prowadzić mogą) do kłopotów w rodzaju antynomii. A propozycje takie formułowano. Na przykład Leopold Kronecker (1823–1891) sugerował, że należy ograniczyć matematykę do liczb naturalnych. Henri Poincaré (1854–1912) proponował usunięcie z matematyki definicji niepredykatywnych będących jego zdaniem źródłem antynomii, zaś matematyk holenderski Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) ogłosił radykalny program przebudowy całej matematyki zmierzający do oparcia jej na pierwotnej intuicji liczby naturalnej (jego program dał początek kierunkowi w filozofii matematyki zwanemu intuicjonizmem).

Hilbert bronił zdecydowanie integralności matematyki klasycznej i był przeciwko jakimkolwiek próbom jej ograniczania. Pisał: „Z raju, który stworzył nam Cantor, nikt nie powinien móc nas wypędzić."

W różnych swoich wykładach i artykułach (z lat 20-tych) zaproponował pewien program realizacji swoich idei. Program ten oparty był na założeniach bliskich filozofii Immanuela Kanta (1724–1804). Podstawowa zbieżność to koncepcja nieskończoności. Idąc za Kantem twierdził mianowicie Hilbert, że nieskończoność matematyczna jest ideą czystego rozumu, tzn. jest pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, któremu jednak nic nie odpowiada w rzeczywistości poznawalnej za pomocą zmysłów.

Hilbert wyraźnie rozróżnił w matematyce dwie części, a mianowicie matematykę *finitystyczną* i matematykę *infinitystyczną*. W matematyce finitystycznej mamy do czynienia z tzw. zdaniami *realnymi*, które są w pełni sensowne, bo odwołują się tylko do konkretnych obiektów danych nam jasno i wyraźnie „jako bezpośrednie przeżycia, przed wszelkim myśleniem". Ta część matematyki jest więc bezpieczna i nie wymaga żadnego uzasadniania. Matematyka infinitystyczna operuje nieskończonością oraz tzw. zdaniami *idealnymi* i jako taka wymaga ugruntowania. Hilbert był przekonany, że każde prawdziwe zdanie realne ma dowód finitystyczny. Obiekty i metody infinitystyczne grają tylko pomocniczą rolę. Pozwalają one na budowanie prostszych, krótszych i bardziej eleganckich dowodów – ale każdy taki dowód można zastąpić dowodem finitystycznym. Był też przekonany, że niesprzeczność implikuje istnienie i że każdy dowód istnienia nie podający konstrukcji postulowanych obiektów jest w istocie zapowiedzią takiej konstrukcji.

Aby zrealizować program ugruntowania matematyki infinitystycznej Hilbert (wraz ze swymi uczniami) stworzył nową dziedzinę zwaną teorią dowodu (*Beweistheorie*). Jej przedmiotem badań miały być właśnie dowody matematyczne, przy czym obiekty te należało badać metodami matematycznymi. W odniesieniu do głównego problemu należało wykazać, że dowody, w których stosuje się elementy idealne w celu udowodnienia zdań realnych zawsze prowadzą do poprawnych wyników. Można tu wyróżnić dwa aspekty, a mianowicie problem wykazania *zachowawczości* i problem dowodu *niesprzeczności*. Pierwszy z nich polega na pokazaniu, że każde zdanie realne, które można udowodnić w matematyce infinitystycznej (a więc używając nieskończoności aktualnej) może być w istocie dowiedzione w matematyce

Antynomia to para zdań, z których każde w równym stopniu zasługuje na przyjęcie, ale które są między sobą sprzeczne i dlatego nie można przyjąć ich obu. Antynomie dzieli się na logiczne i semantyczne. Do antynomii logicznych, zwanych też teoriomnogościowymi, należą na przykład antynomia klas niezwrotnych zwana też antynomią Russella, antynomia Cantora zbioru wszystkich zbiorów czy antynomia Buralli-Fortiego zbioru wszystkich liczb porządkowych. Przykładem antynomii semantycznych są: antynomia Grellinga, antynomia Richarda i antynomia kłamcy.

Czytelnika pragnącego zapoznać się z podstawowymi kierunkami w filozofii matematyki odsyłamy do książek R. Murawskiego: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1986 (wydanie I), 1994 (wydanie II) oraz *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (w druku).

Credo Kroneckera to słynne zdanie: „Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, wszystko inne jest dziełem ludzkim."

Definicje niepredykatywne to definicje, w których definiuje się pewien obiekt $N$ przez odwołanie się do pewnego ogółu obiektów $E$ (na przykład za pomocą kwantyfikacji względem $E$), którego $N$ jest jednym z elementów. Przykładem definicji niepredykatywnej może być definicja następująca: zbiór liczb naturalnych N jest to najmniejszy zbiór zawierający liczbę 0 i zamknięty ze względu na operację następnika. Definiujemy tu bowiem nieznany obiekt N przez odwołanie się do ogółu obiektów, do którego to ogółu obiekt definiowany należy jako element.

finitystycznej, czyli że – jak mówią logicy – matematyka infinitystyczna jest zachowawczym rozszerzeniem matematyki finitystycznej względem zdań realnych. Więcej, należało pokazać, że istnieje finitystyczna metoda transformacji (tłumaczenia) infinitystycznych dowodów zdań realnych na ich dowody finitystyczne. Drugi zaś aspekt, czyli problem niesprzeczności, polegał na wykazaniu (za pomocą środków finitystycznych rzecz jasna), że cała matematyka infinitystyczna (a więc cała matematyka klasyczna) jest niesprzeczna.

Oba te problemy okazały się zresztą wzajemnie powiązane. Jak wykazał G. Kreisel, rozwiązanie problemu niesprzeczności daje też rozwiązanie problemu zachowawczości.

Realizacja programu Hilberta miała przebiegać w dwóch etapach. Etap pierwszy polegał na formalizacji matematyki, tzn. rekonstrukcji matematyki infinitystycznej jako dużego systemu sformalizowanego (zawierającego takie podstawowe działy jak logika klasyczna, teoria mnogości, arytmetyka liczb naturalnych, analiza). Zabieg ten pozwalał na traktowanie twierdzeń jako formuł, a więc skończonych ciągów napisów, czyli obiektów konkretnych. Dowody stawały się przy takiej rekonstrukcji skończonymi ciągami formuł zbudowanymi według z góry określonych jasnych reguł (odwołujących się tylko do kształtu napisów, a nie do ich treści, sensu czy znaczenia). Stawały się więc skończonymi ciągami skończonych ciągów napisów, a więc znów obiektami konkretnymi, które można badać za pomocą metod finitystycznych. Formalizacja powinna być jednak tak przeprowadzona, by przyjęte aksjomaty wystarczyły do rozwiązania każdego problemu, który można sformułować w języku danej teorii jako zdanie realne, tzn. by można było na ich podstawie rozstrzygnąć każde zdanie realne (logicy mówią tu o *zupełnym* układzie aksjomatów).

Etap drugi polegał na wykazaniu zachowawczości matematyki względem zdań realnych oraz na dowodzie niesprzeczności. Zadanie to sprowadzało się do badania dowodów sformalizowanych, a więc skończonych ciągów napisów. Można to było robić za pomocą bezpiecznych i pewnych metod finitystycznych – i to właśnie było głównym celem hilbertowskiej teorii dowodu.

Hilbert i jego uczniowie przystąpili do realizacji tego programu odnosząc pewne sukcesy. Ale oto w roku 1931 ukazała się praca młodego matematyka i logika wiedeńskiego Kurta Gödla (1906–1978) pod tytułem „Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme. I". Znajdują się w niej dwa słynne twierdzenia o niezupełności, zwane dziś odpowiednio pierwszym i drugim twierdzeniem Gödla. Pierwsze twierdzenie orzeka, że każdy niesprzeczny system aksjomatyczny zawierający w sobie arytmetykę liczb naturalnych jest istotnie niezupełny, tzn. zawsze istnieć będą w takim systemie zdania, których nie można rozstrzygnąć w oparciu o przyjęte aksjomaty. Nic tu nie zmieni też wzbogacenie aksjomatyki, gdyż wtedy pojawią się nowe zdania nierozstrzygalne (już na gruncie tej bogatszej teorii). I tak będzie zawsze. Drugie twierdzenie Gödla mówi zaś, że w żadnej teorii zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie można dowieść jej niesprzeczności.

Została ona opublikowana w czasopiśmie *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), 173–198.

Oba te wyniki, należące dziś do najważniejszych rezultatów logiki matematycznej i podstaw matematyki, podważyły program Hilberta pokazując, że nie można go zrealizować zgodnie z zamiarami i planami autora. Czyżby więc program ten nie wytyczał drogi, a prowadził jedynie na manowce?

Istnieje bogata literatura na ten temat. Czytelnika pragnącego dokładniej zapoznać się z wynikami Gödla na temat niezupełności odsyłamy na przykład do książki R. Murawskiego *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1990 (wydanie I), 1991 (wydanie II).

Na szczęście nie! W obliczu trudności wskazanych przez Gödla postanowiono zmodyfikować propozycje Hilberta. W efekcie powstały tzw. uogólniony i zrelatywizowany programy Hilberta.

Uogólniony program Hilberta polega na dopuszczeniu przy budowaniu podstaw matematyki i przy szukaniu ugruntowania dla matematyki klasycznej nie tylko metod finitystycznych, ale ogólnie metod konstruktywnych. W ramach tak zmodyfikowanego programu uzyskano cały szereg bardzo interesujących wyników (Gentzen, Gödel, Feferman).

Zrelatywizowany program Hilberta ma swe źródło w następującym pytaniu: skoro nie można całej klasycznej matematyki infinitystycznej

ugruntować na bazie matematyki finitystycznej, to należy zapytać, dla jakiej części tej matematyki jest to możliwe? Innymi słowy: jaka część matematyki infinitystycznej może być rozwinięta i zbudowana w systemach sformalizowanych, które są zachowawcze w stosunku do matematyki finitystycznej względem zdań realnych? Badania prowadzone w tym kierunku uzyskały w ostatnich latach silny impuls ze strony tzw. matematyki odwrotnej (ang. *reverse mathematics*).

Zanim o tym dokładniej opowiemy musimy dokonać pewnych uściśleń. Otóż przyjmujemy, że „finitystyczny" znaczy tyle, co dający się sformalizować w systemie PRA arytmetyki pierwotnie rekurencyjnej, zwanej też arytmetyką Skolema. Drugie kluczowe pojęcie, pojęcie zdania realnego, uściślamy w ten sposób, że zdania realne utożsamiać będziemy ze zdaniami klasy $\Pi^0_1$, czyli ze zdaniami języka arytmetyki Peano PA postaci $\forall x\, \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest formułą zawierającą formuły atomowe, spójniki zdaniowe i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone.

Jest to system sformalizowany pierwszego rzędu wyrażony w języku zawierającym następujące symbole pozalogiczne: stała 0 (liczba zero), symbol funkcyjny 1–argumentowy $S$ (funkcja następnika) oraz symbol funkcyjny $\mathbf{f}$ dla każdej funkcji pierwotnie rekurencyjnej $f$. Aksjomaty pozalogiczne PRA to aksjomaty dotyczące liczebników $0, S0, SS0, \ldots$ (czyli nazw poszczególnych liczb naturalnych 0, 1, 2, ...), równania definicyjne dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych oraz schemat indukcji dla formuł bezkwantyfikatorowych. Teoria PRA jest z pewnością finitystyczna (przy dowolnym rozumieniu tego pojęcia), a z drugiej strony wystarczająco silna, by móc w niej sformalizować wszystkie elementarne rozumowania o liczbach naturalnych i o skończonych ciągach symboli.

Okazuje się, że matematykę klasyczną można sformalizować nie tylko w teorii mnogości, ale spore jej fragmenty (takie jak geometria, teoria liczb, analiza, równania różniczkowe, analiza zespolona itd.) mogą być sformalizowane w pewnym znacznie słabszym systemie $\mathrm{A}_2^-$ arytmetyki II rzędu (oznaczanym też czasem symbolem $\mathrm{Z}_2$). Wydaje się, że jako pierwsi zauważyli to D. Hilbert i P. Bernays.

Arytmetyka II rzędu jest to system sformalizowany w języku pierwszego rzędu (*sic*!) z dwoma rodzajami zmiennych: $x, y, z, \ldots$ (zmienne przebiegające liczby naturalne) oraz $X, Y, Z, \ldots$ (zmienne przebiegające zbiory liczb naturalnych). Stałe pozalogiczne języka $\mathrm{L}(\mathrm{A}_2^-)$ arytmetyki $\mathrm{A}_2^-$ to: $0, S, +, \cdot, \in$. Aksjomaty pozalogiczne $\mathrm{A}_2^-$ są następujące:

1. aksjomaty arytmetyki Peano PA bez schematu indukcji,
2. (aksjomat *ekstensjonalności*) $\forall x\,(x \in X \equiv x \in Y) \longrightarrow (X = Y)$,
3. (aksjomat *indukcji*) $0 \in X \;\&\; \forall x\,(x \in X \longrightarrow S(x) \in X) \longrightarrow \forall x\,(x \in X)$,
4. (aksjomat *wyróżniania*) $\exists X\, \forall x\,(x \in X \equiv \varphi(x, \ldots))$, gdzie $\varphi(x, \ldots)$ jest formułą języka $\mathrm{L}(\mathrm{A}_2^-)$ arytmetyki $\mathrm{A}_2^-$, w której zmienna $X$ nie jest wolna (jest to więc schemat nieskończenie wielu aksjomatów; aksjomat ten nazywa się też czasem aksjomatem *istnienia zbiorów*).

Modele teorii $\mathrm{A}_2^-$ to struktury postaci $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \in)$, gdzie $\mathcal{M}$ jest modelem arytmetyki Peano PA, a $\mathcal{X}$ jest pewną rodziną podzbiorów universum $M$ modelu $\mathcal{M}$.

Matematyka odwrotna to program badawczy sformułowany przez H. Friedmana na Kongresie Matematyków w Vancouver w 1974 roku. Jego celem jest badanie roli aksjomatu wyróżniania, czyli aksjomatu istnienia zbiorów w matematyce. Główne pytanie można sformułować następująco: niech będzie dane pewne twierdzenie $\tau$, pytamy ile aksjomatu wyróżniania potrzeba, by dowieść $\tau$? Metodę stosowaną w matematyce odwrotnej przy badaniu takich kwestii można opisać tak: Załóżmy, że w pewnym fragmencie $S(\tau)$ arytmetyki $\mathrm{A}_2^-$ można udowodnić zdanie $\tau$. Pytamy, czy $S(\tau)$ jest najsłabszym fragmentem $\mathrm{A}_2^-$ o tej własności. Aby odpowiedzieć pozytywnie na to pytanie pokazuje się, że aksjomat wyróżniania teorii $S(\tau)$ jest równoważny (na gruncie pewnej słabszej teorii, która sama nie dowodzi $\tau$) zdaniu $\tau$. W tym dowodzie najtrudniejsza jest zwykle implikacja: jeżeli $\tau$, to aksjomat wyróżniania teorii $S(\tau)$. To wyjaśnia też nazwę „matematyka odwrotna" – wyprowadzamy tu bowiem aksjomat z twierdzenia, czyli postępujemy odwrotnie niż się to zwykło czynić w matematyce.

W ramach matematyki odwrotnej wyodrębniono pewne konkretne fragmenty arytmetyki II rzędu $\mathrm{A}_2^-$ i bada się ich moc dowodową oraz znaczenie z punktu widzenia matematyki klasycznej. W szczególności bada się następujące teorie: $\mathrm{RCA}_0$, $\mathrm{WKL}_0$, $\mathrm{ACA}_0$, $\mathrm{ATR}_0$, $\Pi^1_1 - \mathrm{CA}_0$. Opiszemy tu dokładniej, ze względu na ich znaczenie dla naszych dalszych rozważań, tylko pierwsze trzy z nich.

System $\mathrm{RCA}_0$ jest to teoria w języku $\mathrm{L}(\mathrm{A}_2^-)$ oparta na następujących aksjomatach pozalogicznych:

1. $\mathrm{PA}^-$, tzn. aksjomaty arytmetyki Peano PA bez schematu indukcji,

2. schemat indukcji dla formuł $\Sigma_1^0$, czyli formuł postaci $\exists x\,\varphi(x)$, gdzie $\varphi$ jest formułą mogącą zawierać tylko formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone:
$$\varphi(0)\ \&\ \forall x\,[\varphi(x) \to \varphi(Sx)] \longrightarrow \forall x\,\varphi(x),$$
3. aksjomat ekstensjonalności,
4. (rekurencyjny aksjomat wyróżniania)
$$\forall x\,[\varphi(x) \equiv \psi(x)] \longrightarrow \exists X\,\forall x\,[x \in X \equiv \varphi(x)],$$
gdzie $\varphi$ jest formułą $\Sigma_1^0$ a $\psi$ formułą $\Pi_1^0$.

Angielska nazwa aksjomatu 4, najistotniejszego w tym fragmencie $A_2^-$ – *recursive comprehension axiom* – wyjaśnia też skrót $RCA_0$.

Teoria $WKL_0$, to teoria w języku $L(A_2^-)$ oparta na następujących aksjomatach pozalogicznych:

1. aksjomaty teorii $RCA_0$,
2. słaby lemat Königa, tzn. zdanie głoszące, że każde nieskończone drzewo dwójkowe ma gałąź nieskończoną.

Angielska nazwa aksjomatu 2 – *weak König's lemma* – wyjaśnia skrót $WKL_0$. Teoria $WKL_0$ jest silniejsza niż $RCA_0$.

Teoria $ACA_0$, to system w języku $L(A_2^-)$ oparty na następujących aksjomatach pozalogicznych:

1. aksjomaty $PA^-$,
2. aksjomat ekstensjonalności,
3. aksjomat indukcji, tzn.
$$0 \in X\ \&\ \forall x\,[x \in X \to S(x) \in X] \longrightarrow \forall x\,(x \in X)$$
4. arytmetyczny schemat wyróżniania, tzn. schemat wyróżniania dla wszystkich formuł arytmetycznych, czyli formuł języka $L(A_2^-)$ nie zawierających kwantyfikatorów wiążących zmienne zbiorowe.

Angielska nazwa aksjomatu 4 – *arithmetic comprehension axiom* – wyjaśnia skrót $ACA_0$. Teoria $ACA_0$ jest istotnym rozszerzeniem teorii $WKL_0$.

Wyróżnione fragmenty arytmetyki II rzędu okazują się adekwatne w stosunku do różnych części matematyki klasycznej. I tak w szczególności w teorii $RCA_0$ można skonstruować liczby rzeczywiste, zdefiniować pojęcie zbieżności ciągu, pojęcie funkcji ciągłej, całki Riemanna itp. oraz udowodnić szereg pozytywnych wyników analizy rekurencyjnej i algebry rekurencyjnej. W szczególności można udowodnić, że każde ciało przeliczalne ma domknięcie algebraiczne, że każde przeliczalne ciało uporządkowane ma rozszerzenie do ciała domkniętego w sensie rzeczywistym, jak również twierdzenie o wartości pośredniej dla funkcji ciągłych.

Teoria $WKL_0$ okazuje się bardzo silna. Można w niej udowodnić w szczególności następujące twierdzenia:

– twierdzenie Heinego–Borela o pokryciu,
– każda funkcja ciągła na przedziale [0,1] jest jednostajnie ciągła,
– każda funkcja ciągła na przedziale [0,1] jest ograniczona,
– każda funkcja ciągła na przedziale [0,1] ma supremum,
– każda funkcja jednostajnie ciągła na [0,1] mająca supremum, osiąga je,
– twierdzenie Hahna–Banacha,
– twierdzenie Cauchy'ego–Peano o istnieniu całki równania różniczkowego,
– każdy przeliczalny pierścień przemienny ma ideał pierwszy,
– każde ciało przeliczalne formalnie rzeczywiste może być uporządkowane,
– twierdzenie Gödla o pełności dla rachunku predykatów.

Co więcej, jeśli $\varphi$ jest jednym z wyżej wymienionych twierdzeń matematyki klasycznej, to teoria $RCA_0 + \varphi$ jest równoważna teorii $WKL_0$, tzn. obie te teorie mają taką samą moc dowodową i dokładnie te same twierdzenia mogą być w nich udowodnione. Oznacza to, że słaby lemat Königa jest konieczny i jednocześnie wystarcza do udowodnienia (na bazie teorii $RCA_0$) każdego z wyżej wymienionych twierdzeń. Z równoważności obu teorii wynika też w szczególności, że (na bazie $RCA_0$) z twierdzenia Hahna–Banacha można

wydedukować twierdzenie Peano i (podobnie dla innych wymienionych wyżej twierdzeń).

Teoria $\mathrm{ACA}_0$ okazuje się jeszcze silniejsza z punktu widzenia matematyki klasycznej. Można w niej udowodnić następujące twierdzenia:

- twierdzenie Bolzano–Weierstrassa,
- każdy ciąg Cauchy'ego liczb rzeczywistych jest zbieżny,
- każdy ciąg ograniczony liczb rzeczywistych ma supremum,
- każdy ograniczony i monotoniczny ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny,
- lemat Arzeli–Ascoliego,
- każda przeliczalna przestrzeń liniowa ma bazę,
- każdy przeliczalny pierścień przemienny ma ideał maksymalny.

I znów, tak jak to było w przypadku teorii $\mathrm{WKL}_0$, jeżeli $\varphi$ jest dowolnym z wyżej wymienionych zdań, to teoria $\mathrm{RCA}_0 + \varphi$ jest równoważna teorii $\mathrm{ACA}_0$. A zatem aksjomat wyróżniania dla formuł arytmetycznych jest konieczny i wystarczający (na bazie teorii $\mathrm{RCA}_0$) do udowodnienia każdego z powyższych twierdzeń. I dalej, skoro $\mathrm{RCA}_0 + \varphi$ jest równoważna $\mathrm{ACA}_0$, to w szczególności (na bazie teorii $\mathrm{RCA}_0$) można z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wydedukować na przykład twierdzenie o istnieniu bazy przestrzeni liniowej (i podobnie dla innych opisanych twierdzeń).

Jakie są związki wyników uzyskanych w ramach matematyki odwrotnej z (zrelatywizowanym) programem Hilberta? Aby wyjaśnić tę kwestię musimy przytoczyć kilka twierdzeń. Otóż na początku lat 80–tych L. Harrington i Z. Ratajczyk wykazali zachowawczość teorii $\mathrm{WKL}_0$ (żaden z nich nie opublikował swego wyniku). Udowodnili oni mianowicie następujące

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli* $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \in)$ *jest przeliczalnym modelem teorii* $\mathrm{RCA}_0$ *oraz* $A \in \mathcal{X}$, *to istnieje rodzina* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$) *taka, że* $A \in \mathcal{Y}$ *oraz* $(\mathcal{Y}, \mathcal{M}, \in)$ *jest modelem dla* $\mathrm{WKL}_0$.

Stąd wynika łatwo następujący

**Wniosek 2.** *Teoria* $\mathrm{WKL}_0$ *jest zachowawczym rozszerzeniem teorii* $\mathrm{RCA}_0$ *względem zdań klasy* $\Pi^1_1$, *tzn. każde zdanie klasy* $\Pi^1_1$ *dowodliwe w* $\mathrm{WKL}_0$ *może być też udowodnione w słabszej teorii* $\mathrm{RCA}_0$.

Klasa $\Pi^1_1$ zdań, o której tu mowa, to klasa zdań języka $\mathrm{L}(\mathrm{A}_2^-)$ arytmetyki $\mathrm{A}_2^-$ postaci $\forall X\, \varphi(X)$, gdzie $\varphi$ jest formułą arytmetyczną, a więc klasa zdań zawierających tylko jeden duży kwantyfikator wiążący zmienną zbiorową oraz, oprócz spójników, dowolną liczbę kwantyfikatorów wiążących zmienne liczbowe.

W roku 1977 H. Friedman uzyskał podobny wynik (nigdy go nie opublikował). Udowodnił on mianowicie następujące

**Twierdzenie 3.** *Teoria* $\mathrm{WKL}_0$ *jest zachowawczym rozszerzeniem systemu arytmetyki Skolema* PRA *względem zdań* $\Pi^0_2$.

Znów wyjaśnienie: zdania $\Pi^0_2$, to zdania języka arytmetyki Peano, które mają postać $\forall x\, \exists y\, \psi(x, y)$, gdzie $\psi$ może zawierać formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone. Dowód Friedmana używał metod teoriomodelowych. Twierdzenie 3 ulepszył W. Sieg podając jego alternatywny dowód za pomocą metod teoriodowodowych w stylu Gentzena oraz pokazując pierwotnie rekurencyjną transformację dowodów zdań $\Pi^0_2$ w teorii $\mathrm{WKL}_0$ w dowody tych zdań w teorii PRA.

Korzystając teraz z twierdzenia 3 i jego wzmocnienia pochodzącego od Siega oraz łącząc te wyniki ze wskazanym wcześniej faktem, iż teoria $\mathrm{WKL}_0$ jest teorią silną z punktu widzenia matematyki klasycznej, dochodzimy do wniosku, że **duża i znacząca część matematyki klasycznej** może być zredukowana do teorii PRA, a więc **może być finitystycznie ugruntowana.** Część ta wyznaczona jest przez klasę $\Pi^0_2$ zdań. Zauważmy jednak, że bardzo wiele twierdzeń matematyki może być sformułowanych jako zdania $\Pi^0_2$. W ten sposób możemy stwierdzić ostatecznie, że **program Hilberta może być częściowo zrealizowany!**