Czy matematyka ma manowce?

Zbigniew MARCINIAK, Warszawa

Nie będe ukrywał, że do spisania poniższych uwag skłoniła mnie lektura tekstu Marka Kordosa pt. *Kompletne, beznadziejne bezdroża*. Moje opinie zostały tam przedstawione lakonicznie, lecz wiernie. Nie muszę więc niczego prostować, ale mogę przecież napisać dlaczego myślę tak, a nie inaczej.

Temat XIII Szkoły istotnie nie przypadł mi do gustu. Hasło *Drogi i manowce* zrozumiałem jako skrót tytułu *Drogi i manowce, po jakich błądzą ludzie zajmujący się matematyką*. Tymczasem, w moim odczuciu, nasze Szkoły wypadają zdecydowanie lepiej, gdy opowiadają o matematyce, niż wtedy gdy opowiadają o matematykach (i matematyczkach).

Nie przyszło mi wówczas do głowy, że można w ogóle myśleć o szukaniu manowców w obrębie samej matematyki. I dziś, mówiąc szczerze, myśl ta wydaje mi się absurdalna.

Matematyka jest dla mnie częścią przyrody. Podobnie jak ludzie zajmujący się innymi dyscyplinami nauki, matematyk stara się odkryć prawa opisujące ten fragment rzeczywistości.

Matematyka posiada przy tym szczególny urok: odkrywcy dana jest od razu „cała" prawda. Twierdzenie, poprawnie udowodnione dwa tysiące lat temu, pozostaje do dziś tak samo prawdziwe. Współczesny matematyk, czytający pracę Archimedesa wyprowadzającą wzór na objętość kuli, może mieć do zaoferowania jedynie poprawki kosmetyczne. Obce są nam rozterki np. fizyków którzy gonią za prawdą „iterowaną": każda teoria, w konfrontacji z testem coraz to bardziej wyrafinowanych eksperymentów, będzie w przyszłości zastąpiona teorią lepszą, dokładniej opisującą świat. Drugą istotną cechą matematyki jest jasne i jednoznaczne kryterium prawdy: nowe prawo zostało odkryte wtedy i tylko wtedy, gdy został podany jego poprawny dowód.

Gdzie tu mogą być manowce? W obrębie samej matematyki nie ma po prostu miejsca na złudne półprawdy czy teorie tymczasowo prawdziwe.

Matematyka przypomina mi ocean, pełen ciekawych roślin, ryb i innych stworzeń. Matematyk stara się je wyłowić. Czasem trafi mu się grubsza ryba, częściej – płotka.

Niektórzy na dowód tego, że matematyka może błądzić, przytaczają przykłady zdań, które przez pewien czas uchodziły za twierdzenia, czyli za zdania prawdziwe. Nie zmienia to w niczym faktu, że prawdziwe one nigdy nie były, czyli do matematyki nie należały.

Zdarzało się też nieraz w historii, że ludzie uporczywie starali się udowodnić zdanie nieprawdziwe. Czasem trwało to bardzo długo – jak było w przypadku piątego postulatu Euklidesa. Czy to znaczy, że matematyka wiodła ich na manowce? Ja myślę, że (trzymając się poprzedniej analogii) wysiłki te przypominały raczej poszukiwania potwora z Loch Ness.

Marek Kordos stawia jeszcze inny zarzut. My matematycy – powiada – tak bardzo zaufaliśmy systemom aksjomatycznym, a one, paskudy, okazały się być w większości przypadków niezupełne! No to chyba winna jest matematyka, że się teraz czujemy fatalnie?

Otóż matematyka nam niczego nie obiecywała. Twierdzenie o niezupełności arytmetyki (jak i inne twierdzenia o „niemożności") są ważnymi odkryciami matematycznymi. A że są nam nie w smak, bo obracają w niwecz nasze marzenia o istnieniu Teorii Wszystkiego? Trudno winić rybę za to, że nie smakuje rybakowi.

Z lektury artykułu Marka Kordosa można odnieść wrażenie, że uprawianie dziś teorii aksjomatycznych jest przeżytkiem. W rzeczywistości, teorie te nigdy jeszcze tak dobrze się nie miały, jak obecnie.

Współczesne teorie aksjomatyczne mają jednak zgoła inny charakter, niż przytoczona przez Marka Kordosa, jako przykład, aksjomatyka płaszczyzny euklidesowej. Ta ostatnia usiłowała opisać w istocie jeden obiekt. Tymczasem, teorie najżywiej się dziś rozwijające zawdzięczają swoje powodzenie wielkiej różnorodności modeli. Prowadzi to do rozlicznych korzyści. Po pierwsze, rezygnacja z kategoryczności pozwala na badanie teorii o prostych układach aksjomatów. Na przykład, znana wszystkim teoria grup opisana jest trzema prostymi warunkami; podobnie jest z teorią przestrzeni metrycznych. Po drugie (i ważniejsze), istnienie wielu modeli doprowadziło do przełamania barier między różnymi, dawniej autonomicznymi działami matematyki. Na przykład, każdy matematyk zajmujący się poważnie teorią liczb musi się orientować w metodach geometrii algebraicznej i (zdefiniowanej topologicznie) algebraicznej K-teorii.

Wracając na chwilę do geometrii – sądzę, że uczenie jej na uniwersytecie w oparciu o kategoryczną aksjomatykę stanowi dziś dysonans ze wszystkimi innymi teoriami matematycznymi, z jakimi zaznajamiamy studentów. Wykład taki, choć nie pozbawiony elegancji, pozostawia geometrię w izolacji od innych działów i metod. Oparcie tego kursu na bazie algebry liniowej stanowi tu, moim zdaniem, remedium.

Reasumując: to matematycy sami sobie wymyślają manowce, a potem po nich błądzą, łudząc się w tym samym czasie, że uprawiają matematykę.

W działalności matematyków kryje się zresztą wiele innych niebezpieczeństw, ale to jest oddzielny temat.

I jeszcze jedna uwaga: mam nadzieję że wszyscy czytelnicy tekstu Marka Kordosa domyślili się, że eksponowana rola jaką w nim pełni moja osoba miała wyłącznie na celu sprowokowanie mnie do napisania powyższych uwag.