Kompletne, beznadziejne bezdroża

Marek KORDOS, Warszawa

Kiedy w lutym 1994 roku ustalaliśmy temat XIII Szkoły Matematyki Poglądowej, zwyciężył pogląd, że numer jej – powszechnie uznany za pechowy – musi znaleźć jakieś odbicie w tematyce Szkoły. I w ten sposób został zaproponowany, a następnie przyjęty temat *Drogi i manowce*, zgłoszony przez Zdzisława Pogodę.

Podczas gdy podejmowaliśmy tę (bardzo mi zresztą mało pasującą) decyzję, Zbyszek Marciniak przebywał w Kanadzie. Rzecz to ważna, bo jego stanowisko w Radzie Programowej jest – w kwestiach dotyczących matematyki – z reguły decydujące. Doniosłem mu, oczywiście, za pomocą E-mailu o podjętych decyzjach. Ponieważ jednak, jako człowiek staromodny, nie mam swojego konta, więc przy udzielaniu mi odpowiedzi przez Zbyszka Marciniaka mogły zajść różne komplikacje. A skoro mogły, to zaszły. List od Zbyszka dotarł do mnie mocno niekompletny. I nie było w nim obszernego fragmentu miotającego gromy na umieszczenie w tytule Szkoły związanej z matematyką słowa *manowce*. – W matematyce nie ma, ani być nie może manowców – grzmiał Zbyszek Marciniak. – To są poszukiwania, a w każdym zakamarku tak realnej, jak i wyimaginowanej rzeczywistości coś znaleźć można, i nigdy nie można przesądzić, że jakiś kierunek badań był jeno nieporozumieniem i przysłowiowymi malinami.

Gdyby list dotarł wtedy, gdy został napisany, pewno poczulibyśmy się słusznie skarceni (były liczne ilustracje poglądów naszego – chwilowo kanadyjskiego – kolegi). I może temat szkoły byłby inny. Ale że się wszystko pochrzaniło (mogło – to przecież epistolografia, a nie matematyka), więc zostało tak, jak początkowo zdecydowaliśmy. Chciałbym jednak teraz, gdy już jest po wszystkim, podjąć się obrony tezy, że w matematyce manowce są zjawiskiem bardzo często spotykanym, kto wie nawet czy nie charakterystycznym.

Tekst ten ma za zadanie przekonać Czytelnika, że pojęcie, które ufundowało matematykę – tę uprawianą od Pitagorasa aż do Marciniaka – mianowicie pojęcie teorii aksjomatycznej, jest kompletnym nieporozumieniem, beznadziejnym bezdrożem i może służyć za charakterystycznego reprezentanta manowców.

Najpierw skrót dokonań na ten temat tzw. fachowców, czyli matematyków, którzy za swoje powołanie uważali badanie pojęcia *teoria aksjomatyczna.*

Za wzór dla matematyki *od Pitagorasa do Marciniaka* – dalej będę w skrócie pisał *P-M* – uchodzą *Elementy* Euklidesa. Faktycznie jest to najważniejsze dzieło naukowe wszechczasów, o czym zaświadcza..., ale kto tego nie wie, niech dalej nie fatyguje się z czytaniem. Tam ostatecznie usankcjonowano system dedukcyjny, czyli zasady pomnażania prawd już uznanych tak, by nowe, uzyskane na tej drodze prawdy nie były mniej pewne od je poprzedzających.

System bezpieczeństwa, jaki jest tam przedstawiony, i jaki jest rezultatem mniej więcej trzy stulecia trwających prac nad jego uformowaniem, zawiera dość nieliczne kanony. Po pierwsze – każe, by wiedza pewna była uformowana w porcje (zwane twierdzeniami – ale to nie ma znaczenia), by miała strukturę dyskretną. Po drugie – każe by wiedza pewna dotyczyła tylko abstraktów, uzyskanych na drodze jakichś innych, niekoniecznie już pewnych, rozważań. Po trzecie – każe by twierdzenia były wypowiadane formalnie, to jest tak, aby nie było możliwości dialektycznego rozmywania ich orzeczeń. Po czwarte wreszcie – każe by każde z twierdzeń było zdaniem warunkowym. Dla warunków tych nazwy dobrano różne, w zależności od ich miejsca w twierdzeniu: jeśli dotyczą one tylko jednego twierdzenia, zwą się wówczas jego założeniami; jeśli dotyczą grupy twierdzeń – zwą się aksjomatami (względnie postulatami) takiej grupy.

No i jest jeszcze – przyjęta na zasadzie zgody powszechnej (a później na tejże zasadzie powiększana) – lista dopuszczalnych transformacji produkujących z zastanych nowe prawdy. Transformacje te są nazywane regułami wnioskowania. Potrzeby określania pojęcia teorii jakoś wonczas nie odczuwano.

Każde usztywnienie daje fanatyków upatrujących sedna w sztywności, a nie w tym, co mianowicie jest mniej lub bardziej sztywne. Jeszcze przed Euklidesem Platon wymyślił, wobec tego, co wyżej było nazwane *po drugie*, konieczność istnienia bytów idealnych, dla których nasza realność byłaby jeno imitacją o tyle tylko wierną, by wywoływała w nas właściwe skojarzenia – ot, taka ściągawka do produkcji prawidłowych abstraktów. Jest ważne, by zjawiska wykoślawiania, pod pretekstem pełnienia straży nad dochowaniem wierności, nie przeoczyć. W tej historyjce jest to bodaj najważniejszy składnik.

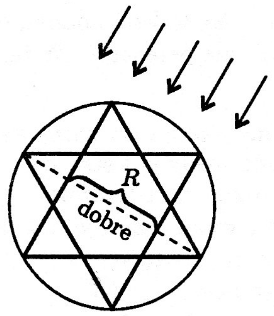
Cała właściwie matematyka *P-M* jest zbudowana zgodnie z przytoczonymi wyżej kanonami, a takie poglądy, jak idealizm Platona czy inne -izmy powstające na jej poboczu oddawano zupełnie bezinteresownie na paszę dla filozofów (z wielkim obustronnym zadowoleniem). Dwa wszelako z wynalazków wymagają szczególnego potraktowania: logika i rachunek symboliczny. Początkowo szło o jedno – co ma zrobić uczony (to jest napisane bez ironii: chodzi np. o, powszechnie uznanego przez pogan, chrześcijan i muzułmanów za największego myśliciela w dziejach, Arystotelesa), dla którego matematyka jest nieco zbyt trudna, a który widzi, iż jest ona *de facto* jedyną naprawdę pewną wiedzą? Oczywiście powinien wymyślić coś bez porównania łatwiejszego, lecz podporządkowanego podobnym rygorom. I taka jest arystotelesowska teoria sylogizmów. Jej stosunek do uprawianej ówcześnie matematyki (Teajtetos, Eudoksos) jest taki jak stosunek gry komputerowej do profesjonalnych programów obsługujących naszą cywilizację. W gruncie rzeczy to samo: i tu i tu naciskamy klawisze, i tu i tu od naszej inwencji zależy sukces bądź porażka, i tu i tu wszystko działa dokładnie wedle naszych żądań. Nie można chyba inaczej postrzegać teorii sylogizmów na tle wyprzedzających ją o kilkanaście lat teorii liczb rzeczywistych i teorii miary. Logika zresztą szczęśliwie nie była kojarzona z matematyką bodaj przez dwa milenia.

Rachunek symboliczny wkroczył do matematyki wraz z innymi nowinkami Wschodu w Średniowieczu. Pozornie jest to tylko realizacja kanonu nazywanego wyżej *po trzecie* – dla zapewnienia jednoznaczności wymyślmy dla pojęcia jakiś znaczek, np. $+$, $\sqrt{\ }$, albo $\int$ i pilnie przestrzegajmy, by miał zawsze to samo i jedno znaczenie. W istocie jednak pomysł ten miał i inną zaletę, która uczyniła jego używanie znacznie bardziej atrakcyjnym. Mniej więcej w XVII wieku ludy Europy przestają porozumiewać się po łacinie, wchodzą również do nauki języki narodowe i jedynym ratunkiem dla utrzymania całości i uniwersalności matematyki jest to, by posługiwała się ona ideogramami – symbolami w każdym języku mającymi inne fonetyczne odczytanie, lecz to samo znaczenie. To była wartość, której nie sposób było pominąć. A jej efekt był taki, że cała nowożytna matematyka tworzona była – choć zapewne nikt z jej twórców tak tego nie postrzegał – jako teoria przerabiania jednych napisów na inne. Były to klasyczne *miłe złego początki*. Ciągle jednak nikt się problemem *co to takiego jest teoria matematyczna?* nie zajmował.

Odpowiedź na to pytanie stała się potrzebna dopiero wtedy, gdy konstruowane zgodnie z intuicją ich twórców pojęcia okazywały się dla nich samych zaskakujące. To mianowicie, co zaskakiwało matematyków, to fakt, że udowodnione zgodnie – jak im się zdawało – z regułami sztuki twierdzenia okazywały się nie być prawdziwe. Klasycznym przykładem może tu być twierdzenie Cauchy'ego orzekające, iż granica ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Kolejne nieszczęście, sugerujące matematykom, że trzeba myśleć o samej matematyce, a nie tylko przysparzać jej twierdzeń, były twierdzenia nie wyposażone w dowód, gdyż nigdzie w matematyce nie było „czegoś wcześniejszego". Efektowny przykład daje znów twórczość Cauchy'ego – dowieść, że ciąg, którego dalekie wyrazy są dowolnie bliskie musi być zbieżny, w jego czasach nie było można, gdyż brakowało – jak kto woli – topologii, lub teorii

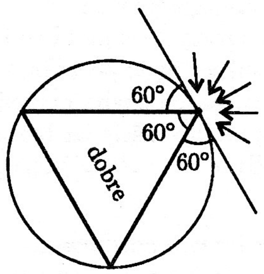
Paradoks Bertranda to następujące trzy rozwiązania zadania: ***jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana sieczna okręgu okaże się dłuższa od boku wpisanego w ten okrąg trójkąta równobocznego*** (czyli będzie miała długość większą od promienia tego okręgu $\sqrt{3}$ razy)?

Rozwiązanie I. Ponieważ każdy kierunek siecznej jest jednakowo prawdopodobny, a w każdym – patrz rysunek –



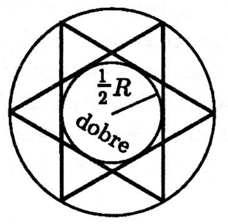
połowa cięciw spełnia żądania, więc prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie II. Ponieważ każdy punkt przebicia okręgu cięciwą jest jednakowo prawdopodobny, a w każdym – patrz rysunek –



trzecia część cięciw spełnia żądania, więc prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie III. Ponieważ każdy punkt koła ograniczonego przez okrąg z jednakowym prawdopodobieństwem może być środkiem cięciwy, a – patrz rysunek –



cięciwy spełniające żądania mają środki w koncentrycznym okręgu o promieniu o połowę mniejszym, więc prawdopodobieństwo jest równe stosunkowi pól koła ograniczonego danym okręgiem i koła mniejszego: jest więc równe $\frac{1}{4}$.

liczb rzeczywistych. No i najbardziej istotne – w matematyce można było, zgodnie z regułami gry (tak to przynajmniej wyglądało) rozwiązać jedno zadanie na kilka sposobów i to dających różne wyniki. Najbardziej znany jest tu paradoks Bertranda. Wreszcie w matematyce pojawiły się nie tylko budzące zgrozę obiekty (np. funkcja ciągła na odcinku i nigdzie nie różniczkowalna), lecz także nie mniej stresujące teorie z teorią mnogości na czele.

Powodów dosyć, by uniewinnić twórców dyscypliny zwanej podstawy matematyki. Uniewinnić, mimo iż wykazali, że matematyka żadnych podstaw nie ma i mieć nie będzie. Ale po kolei.

W sytuacji, gdy jakieś przedsięwzięcie, jakaś dyscyplina, jakaś struktura okazuje się całkowicie nie do przyjęcia, i gdy widać, że nie bierze się to z drobnych niedoróbek, sięga się zazwyczaj po poglądy skrajne. Matematyka dysponowała, wśród swoich twórców, jednym takim ekstremistą. Leibniz mianowicie proponował (w połowie XVII wieku – patrz uwaga o językach narodowych) stworzenie rachunku symbolicznego (*lingua universalis*), który byłby jedynym (i automatycznym – ale ten nurt zostawmy w spokoju) językiem matematyki, jak zresztą i całej nauki (*scientia generalis*). O pozycji Lebniza w matematyce nie sposób wątpić – nie był to jakiś „ościenny" Arystoteles, a ta część symboliki matematycznej, którą się praktycznie zajął (najbardziej znana tu jest symbolika analizy matematycznej), okazała się świetna i obowiązuje po dzień dzisiejszy. Nic przeto dziwnego, że prekursorzy podstaw matematyki właśnie po rachunek symboliczny sięgnęli.

Pierwszy znaczący krok został dokonany przez niemieckiego geometrę, Moritza Pascha. Postanowił on sięgnąć nie tylko do Leibniza, lecz także do pierwszego źródła – do *Elementów*. Jego wgląd w *Elementy* był bardzo skrupulatny i wnikliwy – jest pierwszym komentatorem tego dzieła, który dostrzegł w nim istotne, a nie kosmetyczne usterki. W szczególności zauważył, że pojęcie odcinka jest w *Elementach* potraktowane jedynie intuicyjnie. W związku z tym wprowadził uzupełnienie, zwane dziś aksjomatem Pascha: ***prosta, nie przechodząca przez wierzchołek trójkąta i przecinająca jeden z jego boków, przecina jeszcze jeden bok*** (lub – równoważnie – ***żadna prosta nie przechodząca przez wierzchołek trójkąta nie przecina wszystkich jego boków***). Napisał też dzieło ***Grundlagen der Geometrie*** mające, jego zdaniem, być początkiem nadawania całości matematyki precyzji i ścisłości wykluczającej wszelkie anomalie. Dlatego też w swojej pracy umieścił ogólne przepisy budowania teorii matematycznych – w jego rozumieniu jedynej poprawnej formy istnienia matematyki.

Propozycje Pascha znamy pod nazwą programu Hilberta. Bierze się to stąd, że Dawid Hilbert uczynił z tych propozycji całościowy program badawczy, znacznie zresztą zaostrzając i tak już bardzo brutalne, podane przez Pascha warunki.

Teorię matematyczną buduje się (nie wchodząc w szczegóły) jako teorię napisów. Ustala się więc wstępnie alfabet (czyli wykaz dopuszczalnych symboli), do niego dobiera się gramatykę (czyli wykaz dopuszczalnych następstw w wypisywaniu znaków alfabetu) oraz wyróżnia się napisy zwane zdaniami, co powinno zamykać syntaksę. Ale tak nie jest. Dalej, pozostając w obszarze istnienia jedynie napisów, określa się produkowanie z jednych napisów innych. I każdy zbiór zdań zamknięty ze względu na taką procedurę nazywa się teorią. A każdy zbiór zdań, którego takie domknięcie jest daną teorią, nazywa się aksjomatyką tej teorii. Bez trudu można znaleźć w tych przepisach naśladownictwo zasad budowy wiedzy dedukcyjnej, które sformułowali Starożytni.

Nie można jednak znaleźć w tym ani odrobiny sensu. Dokładniej: semantyka tak powstałego tworu jest czymś zupełnie z tym tworem – teorią matematyczną w sensie Pascha-Hilberta (dalej *P-H*) – nie mającym związku. Sprawę połączenia pojęcia prawdy z teorią napisów *P-H* udało się jednak zrealizować (i to precyzyjnie) Alfredowi Tarskiemu w 1933 roku (za pomocą pojęcia spełniania). Pozwoliło to wiązać z teoriami *P-H* obiekty (wzięte skądinąd) zwane modelami i stanowiące światy, o których teorie *P-H* orzekają. Pytanie jednak, czy jest to akurat matematyka *P-M*?

Dokładnie 80 lat zajęło matematykom przeprowadzenie dowodu, że tak nie jest – w 1962 roku Paul Cohen udowodnił ostatnie z twierdzeń, które wskazują, że zamierzenia twórców podstaw matematyki nie są realizowalne – nie można matematyki *P-M* opisać w sposób zadowalający za pomocą teorii *P-H*. ***Sposób zadowalający*** był bowiem określony od samego zarania istnienia teorii *P-H*. Składało się na niego pięć wymagań istotnych i trochę (nie wiem już ile) nieistotnych. Te istotne to

- *elementarność*: zmienne nie mogą reprezentować zbiorów obiektów reprezentowanych przez inne zmienne;
- *niesprzeczność*: z każdej pary zdań przeciwnych (zbudowanych poprawnie w języku danej teorii) do teorii ma należeć co najwyżej jedno;
- *zupełność*: z każdej pary zdań przeciwnych (...) do teorii ma należeć co najmniej jedno;
- *rozstrzygalność*: dla każdego zdania (...) ma istnieć procedura (algorytm) pozwalająca w skończonej liczbie kroków stwierdzić, czy zdanie to należy do teorii, czy też nie;
- *kategoryczność*: dowolne dwa obiekty opisywane przez teorię (jej modele) mają być izomorficzne.

Oczywiście, istnieją „pięcioprzymiotnikowe" teorie. Żadna jednak z teorii, jaka tyczy się matematyki *P-M*, taka nie jest. Dla takich teorii elementarność jest sprzeczna z kategorycznością (Skolem i Löwenheim). Każda teoria, która opisuje teorię co najmniej tak skomplikowaną (to się da sprecyzować) jak arytmetyka liczb rzeczywistych, nie jest ponadto ani zupełna, ani rozstrzygalna, ani nawet nie można wykazać jej niesprzeczności (głównie Gödel). Rezygnacja z elementarności (tak zwane teorie wyższych rzędów) może dać kategoryczność, ale w zasadzie wyklucza zupełność. Ma też jeszcze jedną wadę – dla teorii wyższego rzędu teorią wcześniejszą (czyli taką, o której zakładamy, że wszystko wiemy) jest teoria mnogości. Nadzieje na znalezienie porządnego opisu typu *P-H* dla teorii mnogości zostały rozwiane dokumentnie przez wspomniane prace Cohena orzekające, iż każdy układ aksjomatów, każdy wybór teorii *P-H* dla teorii mnogości prowadzi do paradoksów (np. w każdej takiej teorii mnogości mamy albo paradoksalny rozkład kuli, albo nierównoważność definicji ciągłości Heinego i Cauchy'ego).

Dla przypomnienia: paradoksalny rozkład kuli to sugestywna folklorystyczna nazwa twierdzenia
dowolne dwa ograniczone zbiory o niepustym wnętrzu są równoważne przez rozkład skończony,
co oznacza, że można jeden z nich pociąć na skończoną liczbę części rozłącznych, z których da się – przez przemieszczenia izometryczne – układać drugi (dokładniej uzyskać podział drugiego na części rozłączne).
Jeśli w teorii mnogości dopuścimy pewnik wyboru, wówczas we wszystkich przestrzeniach riemannowskich o stałej krzywiźnie – z wyjątkiem płaszczyzny euklidesowej – twierdzenie to będzie prawdziwe.

Wydaje mi się, że przypomniane wyżej fakty dostatecznie dowodzą, że wynalazek teorii matematycznej *P-H* – acz powszechnie przyjęty – prowadzi matematykę na bezdroża. To, że nie jest to pogląd całkowicie mylny, znajduje wsparcie w „głosowaniu nogami" przez matematyków: liczebność populacji podstawiarzy matematycznych zmniejszyła się w ostatnim trzydziestoleciu kilkunastokrotnie.

Nie znam opinii Pitagorasa na ten temat, ale znam opinię Marciniaka. Twierdzi on, że zajmowanie się podstawami matematyki może wprawdzie przypominać gonitwę za własnym ogonem, ale uprawianie porządnych teorii aksjomatycznych jest nie tylko możliwe, ale nawet wskazane – nie należy się tylko zajmować teorią, jako obiektem badanym, lecz używać ją za narzędzie do badania skądinąd wziętych obiektów.

Pozwolę sobie tutaj nie rozczulać się nad dwukrotnie użytym wyżej zwrotem ***skądinąd*** – zaprasza on przecież do całej serii trudnych pytań. Istnieją bowiem istotnie skądinąd pochodzące obiekty – np. liczby, granice, przestrzeń wreszcie. W drugiej części artykułu postaram się wykazać, że nawet w takim przypadku stosowanie teorii aksjomatycznej wiedzie prosto w maliny. Będę pisał, o mającej oczywiste źródła w tzw. realnym świecie, geometrii.

* * *

Geometria ma aksjomatykę co najmniej od 2300 lat – jej aksjomatyka jest w *Elementach*. Przytaczanie tu tych aksjomatów wydaje się zbyteczne – można je znaleźć w bardzo wielu miejscach. Nie wymaga też chyba uzasadnienia, że z punktu widzenia teorii typu *P-H* nie jest to żadna aksjomatyka i nie ma żadnej teorii *P-H* przez nią opisywanej. Jednak fakt, że aksjomatyka ta uchodziła ponad 2000 lat za aksjomatykę całej matematyki, spowodował, iż wydawało się naturalne od nadania jej wymaganego przez kanony *P-H* kształtu rozpocząć „tłumaczenie" całej matematyki na standard *P-H*. To było celem wymienionej już pracy Pascha. Cel był, idea była, ale wynik okazał się zdecydowanie chybiony – opis geometrii był bardzo niezdarny i nie spełniał narzuconych przez samego autora warunków.

Znacznie większy rozgłos zdobyła praca Hilberta z 1899 roku o tymże tytule *Grunglagen der Geometrie*. Teoria miała bogaty alfabet (= dużo pojęć pierwotnych): były więc punkty, proste, płaszczyzny, kąty, incydencja (a właściwie jej trzy odmiany), leżenie między (= relacja opisująca przynależność punktu do odcinka o danych końcach), przystawanie (w dwóch odmianach: dla odcinków i dla kątów). Była teorią nieelementarną (ale jak dalece – tego się opisać nie da, gdyż zawierała aksjomat orzekający o niej samej; do tego za chwilę wrócę). Aksjomatów było 20. Stopień komplikacji aksjomatów może zilustrować przykład aksjomatu I_4 (czwartego aksjomatu incydencji):
Dla dowolnych trzech punktów A, B, C, nie leżących na jednej i tej samej prostej, istnieje płaszczyzna α, która incyduje z każdym z trzech punktów A, B, C. Dla dowolnej płaszczyzny zawsze istnieje incydujący z nią punkt.
(Daję słowo, że wybrałem aksjomat średniego stopnia złożoności – o wiele dłuższy jest np. III_4, jak też przytoczony niżej V_2.)
Stopień beztroski w formułowaniu aksjomatów zaprezentować może aksjomat V_2 (drugi aksjomat ciągłości):
Punkty prostej tworzą układ, który przy zachowaniu porządku liniowego, pierwszego aksjomatu przystawania i aksjomatu Archimedesa (czyli aksjomatów I_{1-2}, II_{1-4}, III_1, V_1) nie dopuszcza żadnego rozszerzenia, tzn. do tego układu punktów nie można dołączyć żadnego punktu w ten sposób, aby w układzie utworzonym przez początkowe i dołączone punkty były spełnione wszystkie wymienione aksjomaty.

Komentarz jest, oczywiście, konieczny. Hilbert produkował układ pojęć pierwotnych i aksjomatów w pewnym sensie byle jak: miał ten system dać mu rzeczywistą aksjomatykę geometrii euklidesowej i miał być punktem startu do stworzenia dobrej aksjomatyki. Trzeba również od razu powiedzieć, że Hilbert (w dalszych wydaniach *Grundlagen*) aksjomatykę poprawił – nie ma np. takich dziwolągów, jak V_2, jednak to, co ostatecznie uzyskał nie było ani technicznie ładne, ani do końca poprawne, ani też nie nadawało się do wykładania geometrii. Przede wszystkim jednak nic nie wnosiło do uprawiania geometrii – nie ma ani jednego faktu geometrycznego, którego autor skorzystał z istnienia *Grunlagen*, aby go uzyskać. Wartość zatem tej pracy była taka, jak prac z logiki: sankcjonowała ona to, co wszyscy (beztrosko, bo bez sankcji) robili od 2000 lat.

Ale, jako się rzekło, miał to być początek. Ulepszenia poszukano przede wszystkim w ograniczeniu, jak też zmianie układu pojęć pierwotnych. Łamiąc chronologię powiem, że to, na czym stanęło (bo aktualnie stoi), pochodzi duchowo od *Grunlagen* Hilberta, choć zostało to dokończone starannie tylko dla przypadku geometrii dwuwymiarowej. Chodzi mianowicie o system zaproponowany przez Tarskiego w *What is elementary geometry?* napisanej w latach wojny. Przez trzydzieści powojennych lat został on znacznie ulepszony przez samego Tarskiego, Wandę Szmielew, Schwabhausera i paru innych, ale tu przytoczę go w początkowej – naprawdę tylko dla specjalistów gorszej – postaci. Pominę aksjomat ciągłości, który u Tarskiego – dla zachowania elementarności – jest schematem (co też jest subtelnością dla specjalistów).
Aby już przy pierwszym czytaniu było wiadomo o co chodzi, pozwolę sobie na wyjaśnienia: zmienne są punktami, relację β należy rozumieć tak, że punkty leżą na prostej i w tej, jak w napisie, kolejności, relację δ zaś tak, że odcinek o końcach w pierwszych dwóch punktach przystaje do odcinka o końcach w dwóch ostatnich. Oto aksjomatyka z *What is*:
A 1 $\bigwedge xy\,(\beta(xyx) \rightarrow (x = y))$,
A 2 $\bigwedge xyzu\,(\beta(xyu) \wedge \beta(yzu) \rightarrow \beta(xyz))$,

A 3 $\bigwedge xyzu\,(\beta(xyz) \wedge \beta(xyu) \wedge (x \neq y) \rightarrow \beta(xzu) \vee \beta(xuz))$,
A 4 $\bigwedge xy\,(\delta(xyyx))$,
A 5 $\bigwedge xyz\,(\delta(xyzz) \rightarrow (x = y))$,
A 6 $\bigwedge xyzuvw\,(\delta(xyzu) \wedge \delta(xyvw) \rightarrow \delta(zuvw))$,
A 7 $\bigwedge txyzu \bigvee v\,(\beta(xtu) \wedge \beta(yuz) \rightarrow \beta(xvy) \wedge \beta(ztv))$,
A 8 $\bigwedge txyzu \bigvee vw\,(\beta(xut) \wedge \beta(yuz) \wedge (x \neq u) \rightarrow \beta(xzv) \wedge \beta(xyw) \wedge \beta(vtw))$,
A 9 $\bigwedge xx'yy'zz'uu'\,(\delta(xyx'y') \wedge \delta(yzy'z') \wedge \delta(xux'u') \wedge \delta(yuy'u')$
$\wedge\, \beta(xyz) \wedge \beta(x'y'z') \wedge (x \neq y) \rightarrow \delta(zuz'u'))$,
A10 $\bigwedge xyuv \bigvee z\,(\beta(xyz) \wedge \delta(yzuv))$,
A11 $\bigvee xyz\,(\neg\beta(xyz) \wedge \neg\beta(yzx) \wedge \neg\beta(zxy))$,
A12 $\bigwedge xyzuv\,(\delta(xuxv) \wedge \delta(yuyv) \wedge \delta(zuzv) \wedge (u \neq v)$
$\rightarrow \beta(xyz) \vee \beta(yzx) \vee \beta(zxy))$.

Sądzę, że nie trzeba być (choćby w tym stopniu co ja) specjalistą od podstaw geometrii, by dostrzec, że z punktu widzenia teorii napisów aksjomatyka ta ma wiele wdzięku, a z punktu widzenia geometrii wyraża łatwo dające się wysłowić, bardzo proste fakty. Trochę trzeba już mieć wyrobione oko by od razu dostrzec, że A7 daje wymieniony wcześniej aksjomat Pascha, A8 – słynny piąty postulat Euklidesa, a A12 ogranicza wymiar opisywanej przestrzeni z góry do 2. Trzeba jednak być już zupełnie nieźle wykształcony, by bez trudu wyprowadzić z tego kilka znanych twierdzeń geometrii – np. twierdzenie Cevy czy Apoloniusza.
I w tym jest cały sens stwierdzenia, że problematyka *P-H* to bezdroże. Jest co robić, można wykazać się sprawnością, nawet wdziękiem w tej pracy, ale nasza znajomość przestrzeni od tego nie przyrasta – dowiodło tego sto lat uprawiania podstaw geometrii (a sto lat to nawet według Marqueza jest dużo), podczas którego to czasu nie miał miejsca ani jeden przypadek świadczący przeciwnie. Nie sposób też uczyć geometrii jako takiej *P-H* teorii. Wiem, bo uczyłem tak w szkole (cztery różne klasy w różnych szkołach) i na uniwersytecie (tu nie mam do powiedzenia nic, poza *przepraszam*), jestem nadto współautorem grubej książki i paru artykułów na temat tego, jak to robić. Tak więc nie tylko teoria, o której pisałem w pierwszej części tego artykułu, jest bałamutna – praktyka też nie wygląda lepiej.

Warto jeszcze pokazać, jak dalece różnorodne były wysiłki, by sensowną aksjomatykę dla geometrii jednak uzyskać.

Najpierw zacznę od sprawy pojęć pierwotnych. Jeden z ewentualnych powodów niemożności znalezienia dobrej aksjomatyki dla geometrii euklidesowej upatrywano w złym doborze obiektów, pojęć, o których jest mowa w tejże aksjomatyce. Wymyślano więc inne układy pojęć pierwotnych. Pierwsze działania poszły w kierunku zmniejszania liczby pojęć pierwotnych. Zobaczmy to szczegółowo na przykładzie systemu pojęć Tarskiego.

Aby w ogóle próbować układać aksjomatykę geometrii dotyczącą jakichś pojęć pierwotnych należy najpierw się przekonać, że mówiąc jedynie o nich da się jednak wszystko powiedzieć. Skoro zatem Hilbert podał jakąś asjomatykę geometrii mówiąc o jakichś pojęciach (zostały one wyżej wyliczone), więc chcąc się przekonać, iż pewne trzy z nich całkowicie wystarczą, należy pozostałe za ich pomocą zdefiniować – dokładniej: sprawdzić, że jest to możliwe. Oto definicje prowadzące do uzyskania brakujących w aksjomatyce Tarskiego pojęć pierwotnych Hilberta. Kolejno
współliniowość $L_T(abc) \Longleftrightarrow \beta(abc) \vee \beta(bca) \vee \beta(cab)$;
pseudoprosta $\mathbf{L}_T(ab) := \{c : L_T(abc)\}$;
proste to te pseudoproste, które są określone dla $a \neq b$; punkt incyduje z taką prostą, jeśli do niej należy;
pseudopłaszczyzna $\mathbf{P}_T(ab) := \{c : \delta(accb)\}$
płaszczyzny to te pseudopłaszczyzny, które są wyznaczone przez $a \neq b$; punkt incyduje z płaszczyzną, gdy do niej należy, prosta – gdy się w niej zawiera.
Pozostała definicja przystawania kątów. Otóż Hilbert kąt traktuje jak parę prostych. Niech K, L, M, N będą prostymi, a $|$ niech oznacza incydencję; oto do wyboru dwie definicje przystawania kątów

$KL \equiv MN \Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bigvee abca'b'c' ((a \neq b \neq c) \wedge ab|K \wedge bc|L \wedge a'b'|M \wedge b'c'|N \wedge \delta(aba'b') \wedge \delta(bcb'c') \wedge \delta(aca'c'));$

$\Leftrightarrow \bigwedge abca'b'c' ((a \neq b \neq c) \wedge ab|K \wedge bc|L \wedge a'b'|M \wedge b'c'|N \wedge \delta(aba'b') \wedge \delta(bcb'c') \rightarrow \delta(aca'c'));$

taka podwójna definicja jest dobra, gdyż jedna (która?) służy do sprawdzania, że przystawanie ma miejsce, a druga, że nie ma.

Jak łatwo zauważyć aksjomatykę dla systemu pojęć pierwotnych Tarskiego można łatwo uzyskać wpisując powyższe definicje do aksjomatyki Hilberta. Nawet jednak znając tę aksjomatykę jedynie z tego artykułu, nie trudno zauważyć, iż Tarski tak nie postąpił – jego aksjomaty miałyby w przeciwnym przypadku monstrualne rozmiary. Zmienił nieco obiekt opisywany przez aksjomatykę – z przestrzeni trójwymiarowej na dwuwymiarową – i wymyślił aksjomaty oraz sprawdził, że rzeczywiście uzyskana teoria opisuje (między innymi) płaszczyznę euklidesową. Niestety, w przypadku pozostałych, zaprezentowanych dalej układów pojęć pierwotnych, tylko w jednym przypadku stosowną aksjomatykę rozsądnej długości udało się wyprodukować. A propozycje były atrakcyjne.

Oto sposób, by system Tarskiego zredukować jedynie do punktów i relacji δ (Czytelnik jest proszony, by za każdym razem sprawdzał, czy dobór definicji jest właściwy). Trzeba więc za pomocą relacji δ wyrazić relację β. Definiujemy kolejno

współliniowość $L(abc) \Longleftrightarrow ((a = b) \vee \bigwedge dd' (\delta(daad') \wedge \delta(dbbd') \rightarrow \delta(dccd')))$

(jeśli symetralna jakiegoś odcinka – w przestrzeni ! – zawiera punkty a i b, to zawiera również punkt c);

kąt prosty $\vdash (abc) \Longleftrightarrow ((a = b) \vee \bigvee a' (\delta(abba') \wedge \delta(acca') \wedge (a \neq a') \wedge L(aba')))$

(kąt prosty jest równy przyległemu do siebie);

i wreszcie $\beta(abc) \Longleftrightarrow (L(abc) \wedge \bigvee b' (\vdash (abb') \wedge \vdash (cbb') \wedge \vdash (ab'c)))$

(w trójkącie prostokątnym rzut prostokątny wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną pada między wierzchołkami) i już.

Przyjrzenie się układowi argumentów w użytych wyżej relacjach δ pozwala sprawnie wykazać, że miał rację Mario Pieri, gdy w 1903 roku stwierdził, iż układem pojęć pierwotnych geometrii euklidesowej może być relacja trójkąta równoramiennego – $\pi(abc) \Longleftrightarrow \delta(abbc)$.

Aby to udowodnić (= sprowadzić do poprzedniego) zauważmy, że relacje L, $\vdash$ i β już za pomocą relacji π zdefiniowaliśmy wyżej. Pozostaje jedynie zdefiniowanie relacji δ:

środek odcinka $\oplus_P(abc) \Longleftrightarrow (\beta(abc) \wedge \pi(abc));$

$\delta(abcd) \Longleftrightarrow \bigvee ee' (\oplus_P(aec) \wedge \oplus_P(bee') \wedge \pi(e'cd))$.

(Czytelniku, wykonaj rysunek).

Tu uwaga. Oczywiście Pieri inaczej doszedł do tego, że punkty i relacja π to wystarczający układ pojęć pierwotnych – podał mianowicie (ale bardzo niezręczną) aksjomatykę. Druga uwaga. Wszystkie dotąd podane układy pojęć pierwotnych – poza układem Hilberta – nadają się do opisywania tak geometrii przestrzennej, jak też i płaskiej. W ramach ćwiczenia własnej wyobraźni Czytelnik zechce sprawdzić, że relacja trójkąta równobocznego – $\eta(abc) \Longleftrightarrow (\pi(abc) \wedge \pi(bca))$ – tworzy wraz z punktami układ pojęć pierwotnych dla przestrzeni, a nie tworzy dla płaszczyzny.

Spośród wymienionych już relacji zarówno dla przestrzeni, jak i płaszczyzny układ pojęć pierwotnych tworzy wraz z punktami relacja $\vdash$ – pomysł Jenksa. Oto (już bez komentarzy) stosowne definicje

środek odcinka $\oplus_J(abc) \Longleftrightarrow \bigvee de (\vdash (abd) \wedge \vdash (abe) \wedge \vdash (cbd) \wedge \vdash (cbe) \wedge \vdash (adc) \wedge \vdash (dce) \wedge \vdash (cea) \wedge \vdash (ead));$

$\pi(abc) \Longleftrightarrow \bigvee d (\vdash (adb) \wedge \oplus_J(adc)).$

Oczywiście nie każdy układ pojęć pierwotnych musi zawierać punkty. Oto pojęcia zaproponowane przez Schwabhausera i Szczerbę: proste (jako zmienne),

relacja $\ast$ przecinania się trzech prostych w jednym punkcie oraz relacja $\perp$ prostopadłości prostych. Układ Jenksa otrzymuje się w ten sposób, że punktami są tu pęki, a dokładniej:
pseudopęki $\quad p(KL) := \{M : \ast\,(KLM)\}$;
punkty to pseudopęki określone przez $K \neq L$;
$\vdash (abc) \Longleftrightarrow \bigvee KLMN\,(L\perp M \wedge a = p(KL) \wedge b = p(LM) \wedge c = p(MN))$.
Ten układ pojęć dobry jest zarówno dla płaszczyzny, jak i przestrzeni; jedynie dla przestrzeni może służyć układ prostszy, w którym relację $\ast$ zastępujemy relacją $\times$ przecinania się dwóch prostych.

Faktycznie jednak nową jakość stanowi tzw. naturalny układ pojęć pierwotnych zaproponowany przez Tarskiego (1929), poprawiony później przez Jaśkowskiego, a ostatecznie wyczyszczony przez Szczerbę. Pojęciami pierwotnymi są w nim kule i relacja zawierania się jednej kuli w drugiej (przy braku punktów nie jest to relacja mnogościowa !). A oto, jak z tych pojęć można uzyskać układ Jenksa:
punktem jest każda kula $\mathbf{A}$ spełniająca warunek $\bigwedge \mathbf{B}\ (\mathbf{B}\subset\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{A})$;
gdy kule $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nie są punktami, relacja $\mathbf{A}\bigcirc\!\!\bigcirc\mathbf{B}\Longleftrightarrow \bigvee!\mathbf{C}\ (\mathbf{C}\subset\mathbf{A}\wedge\mathbf{C}\subset\mathbf{B})$
oznacza (zewnętrzną) styczność.
relacja $\quad a\bigcirc\!\!\bullet\mathbf{A}\Longleftrightarrow (a\bigcirc\!\!\bigcirc\mathbf{A}\wedge\bigvee\mathbf{B}(a\bigcirc\!\!\bigcirc\mathbf{B}\bigcirc\!\!\bigcirc\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\neq a))$
oznacza, że punkt a leży na brzegu kuli $\mathbf{A}$;
operacja $\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet$ dana przez warunek
$$a\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet b=\mathbf{C}\Longleftrightarrow (a\bigcirc\!\!\bullet\mathbf{C}\wedge b\bigcirc\!\!\bullet\mathbf{C}\wedge\neg(\bigvee\mathbf{ABD}(a\subset\mathbf{A}\wedge b\subset\mathbf{B}\wedge\mathbf{A}\bigcirc\!\!\bigcirc\mathbf{C}\bigcirc\!\!\bigcirc\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\subset\mathbf{A}\wedge\mathbf{D}\subset\mathbf{B})))$$
przyporządkowuje dwóm punktom kulę, dla której są one końcami średnicy;
na koniec $\quad\vdash (abc) \Longleftrightarrow (b\bigcirc\!\!\bullet(a\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet c))$.
Byłoby bardzo miło w tak naturalnym układzie pojęć uprawiać geometrię – tym bardziej, że (jak widać) można. Jednak fakt, że żadnej rozsądnej aksjomatyki dla zwyczajnej geometrii euklidesowej uzyskać się przez tysiąclecia nie dało, pokazuje, że dedukcja to jedno, a teorie aksjomatyczne to drugie. Oraz że wszyscy, ulegając propagandzie aksjomatyzacji, w maliny wpuścić się dali. Co więcej, w nich tkwią.

Poszukuje się realizacji aksjomatycznego uprawiania geometrii i na inne sposoby. Inne, to znaczy takie, gdzie geometria jest poprzedzona innymi teoriami, np. teorią liczb rzeczywistych lub zespolonych. Najbardziej naturalna wydaje się tu następująca droga: do trzech aksjomatów przestrzeni metrycznej, a więc do standardowych warunków jakie spełniać musi każdy sposób mierzenia odległości dopisujemy jakieś dodatkowe aksjomaty tak, by jedynym (z dokładnością, rzecz jasna, do izomorfizmu) obiektem spełniającym te warunki była przestrzeń euklidesowa. Nie zaskoczę nikogo z Czytelników, gdy napiszę, że warunki takie, i to na kilka sposobów, znaleźć się udało (bo brzmi to prawdopodobnie) oraz że każdy z tych sposobów ani do wzbogacenia geometrii się nie przyczynił, ani do powszechnego jej nauczania się nie nadaje (widziałem takie szkolne realizacje). Niemniej jednak istnieje obszerna monografia Blumenfelda *Metric spaces* i uczeni publikujący stale jakieś nowe wyniki w tej sprawie. Wygląda więc na to, że naprawdę sugerowanie aksjomatycznego charakteru matematyki, a w szczególności geometrii, jest beznadziejnym bezdrożem. Tak jednak głęboko w nie zabrnęliśmy, że wycofać się nie ma jak, ani gdzie.

⋆ ⋆ ⋆

Znów trudno się zorientować, jaki jest pogląd na ten temat Pitagorasa. Ale można przynajmniej Marciniaka o to zapytać (bo skoro twierdzi, że żadnych bezdroży nie ma...).

Otóż po dwunastu latach (taka jest prawda) wykładania geometrii na Uniwersytecie Warszawskim udało mi się ten wykład odstąpić właśnie Marciniakowi. Zadeklarował on program bardzo klarowny – będzie to powtórzenie, rozwinięcie i kontynuacja tego, co studenci nazywają GAL, czyli *Algebry liniowej z geometrią* (w tym przypadku patrz stosowny podręcznik Białynickiego). A więc będzie aksjomatycznie – powoli będziemy budowali przestrzeń Banacha. Postanowiłem na starość nauczyć się, jak to trzeba robić (czyli jak aksjomatycznie i dobrze zarazem uczyć geometrii) i chodziłem przez pierwsze pół semestru na ten wykład. I co? I nic. Zobaczyłem coś bardzo podobnego do własnego wykładu – aksjomaty od jako tako ciekawych twierdzeń jednak te kilka godzin formalnej charówki oddzielało.

Dziś z kolei geometrię wykłada u nas Bednarczuk, ale on nie robi tego aksjomatycznie (choć, rzecz jasna, jest to wiedza dedukcyjna).

⋆ ⋆ ⋆

Tak więc pozwolę sobie pozostać przy przeświadczeniu, że w matematyce więcej jest bezdroży niż autostrad. A te autostrady od siedzib ludzkich oddzielone są trudną i zagmatwaną siecią dróg „trzeciej kolejności odśnieżania", tak jak liche tory oddzielają miasta od CMK.

Tyle, że wędrówka po bezdrożach ujmy nie przynosi, a może przynieść przygody daleko bardziej godne polecenia niż te jakie spotkać nas mogą na autostradzie. No i przede wszystkim jest znacznie ciekawsza.