Trochę o XVIII i trochę o III problemie Hilberta

Marek KORDOS, Warszawa

W jednej z książek, które recenzowałem (na szczęście przed jej wydaniem) znalazłem informację, że w NRD sprzedawano mleko i śmietanę w kartonowych pojemnikach w kształcie czworokąta foremnego – miało to być bardzo wygodne, gdyż takie kartoniki bardzo ładnie i szczelnie wypełniały kontenery, czyli, jakby to uogólnili matematycy, przestrzeń. Dalej autor (nie mogę, rzecz jasna, zdradzić jego tożsamości) wyciągał z podanej wyżej własności czworościanu foremnego wiele ciekawych wniosków. Byłoby fajnie (słowo to, gdy pisze się o NRD, przestaje być żargonowe), gdyby nie fakt, że czworościan foremny własności wypełniania przestrzeni nie ma. I nie trzeba wielkiego trudu, aby się o tym przekonać: kąt dwuścienny takiego czworościanu jest równy z bardzo dobrym przybliżeniem prawie $70°32'$, a takie kąty nie chcą się uzupełniać do kąta pełnego.

Ci jednak, którzy takie opakowania na mleko widzieli (w tym, zapewne, również autor recenzowanej książki), nie są skłonni traktować owych opakowań jako prowokacji *Stasi* czy jakiejś innej totalitarnej instytucji. Jak więc to jest z wypełniającymi szczelnie przestrzeń czworościanami? Istnieją czy też nie istnieją?

Pytanie takie zadawano sobie już od dawna, choć odpowiedź na nie bardzo długo nie była znana. Pierwszy znalazł pozytywną odpowiedź na to pytanie Duncan Sommerville w 1923 roku. Podane przez niego cztery czworościany o tej własności to te, które w zamieszczonej w dalszej części tego artykułu tabelce nazywają się $H_1(\frac{\pi}{3})$, T_0, $H_2(\frac{\pi}{4})$ i T_{12}. O tym, że nie jest to łatwe (oraz nie znajduje się w centrum uwagi środowiska matematycznego) świadczy fakt, że następna praca na ten temat (H.L. Davies) ukazała się w 1965 (w Kopenhadze) i zawierała... trzy spośród czworościanów znalezionych przez Sommerville'a. Co więcej, następne prace (L. Baumgarten) zostały opublikowane w latach 1968 i 1971, a zawierają one (łącznie!) opinię, że czworościanów szczelnie wypełniających przestrzeń jest cztery i – o dziwo! – nie są to te same cztery czworościany, co u Sommerville'a: zamiast T_{12} jest $H_2(\frac{\pi}{3})$.

Duncan Maclaurin Young Sommerville (1879, 1934).
Chodzi o prace *Space-filling tetrahedra in euclidean space*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **41**(1923), 49–57 oraz *Division of space by congruent triangles and tetrahedra*, Proc. Royal Soc. **43**(1923), 85–116.

Żeby nie trzymać Czytelnika w zbytnim napięciu napiszę od razu, że czworościanów o tej własności (a nawet trochę lepszej) jest continuum. Stwierdził to w 1974 roku Goldberg i to z racji pracy nad zupełnie innym tematem. Zanim jednak przedstawię jego rezultat, chciałbym zająć się wyjaśnieniem kilku spraw: jakie zadanie rozwiązywali Sommerville, Davies i Baumgarten? co to znaczy *trochę lepsza własność*? jaki był zupełnie inny temat pracy Goldberga?

Goldberg M., *Three infinite families of tetrahedral space-fillers*, J. Combinatorical Theory **16**(1974), 348–354.

XVIII problem Hilberta dotyczy krystalografii. W szczególnym, interesującym nas tutaj przypadku, chodzi o pytanie, czy dla danej podgrupy **G** grupy izometrii przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej istnieje obszar domknięty F (czyli bryła) o tej własności, że suma obrazów F w przekształceniach tej grupy pokrywa całą przestrzeń, a obrazy F w żadnych dwóch spośród przekształceń grupy **G** nie mają przecinających się wnętrz. Jeśli taka figura F istnieje, to grupę **G** nazywa się *krystalograficzną*, a F – jej *obszarem fundamentalnym*. Można rozwiązywać zadanie w pewnym sensie odwrotne: próbować dobrać do danej figury taką grupę, by figura ta była jej obszarem fundamentalnym. Na przykład na płaszczyźnie dla każdego trójkąta i dla każdego czworokąta (nawet niewypukłego!) można taką grupę znaleźć. Sommerville i jego następcy (wiedząc, że w przestrzeni nie każdy czworościan może być obszarem fundamentalnym jakiejś grupy krystalograficznej, bo już np. foremny się nie nadaje) poszukiwali takich czworościanów, które mogą obszarami fundamentalnymi jakiejś grupy być.

Zainteresowany Czytelnik zechce sprawdzić, że stosowną grupą krystalograficzną tak dla trójkąta, jak dla czworokąta, może być pewna grupa generowana przez trzy symetrie środkowe.

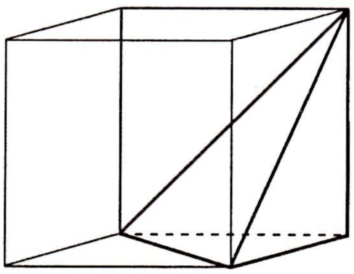
Właściwie rozwiązywali trochę trudniejsze (i trochę bardziej związane z NRDowskim mlekiem) zadanie. W definicji grupy krystalograficznej nie ma mowy o tym, czy przekształcenia z tej grupy zmieniają orientację bryły, czy też nie. A jakże byłoby kłopotliwe, gdyby pakujący kartoniki z mlekiem miał do dyspozycji „lewe" i „prawe" kartoniki i za każdym razem musiał odnaleźć właściwy. Można więc rozwiązywać problem grupy *fizycznie krystalograficznej*, to jest złożonej jedynie z ruchów fizycznych, a więc przekształceń nie zmieniających orientacji. I właśnie to zadanie rozwiązywali Somerville i jego następcy. Uzyskali, tak jak już pisałem poprzednio, pięć czworościanów, które są obszarami fundamentalnymi pewnych grup fizycznie krystalograficznych.

Dla odpowiedzi na ostatnie z zadanych pytań, czyli *co właściwie badał Goldberg?* dogodnie jest zacząć z zupełnie innej beczki i odpowiedzieć na pytanie, jakie to właściwie czworościany zawiera zamieszczona dalej tabelka.

Przyzwoite czworościany

III problem Hilberta to pytanie, czy dowolne dwa wielościany o takiej samej objętości są równoważne przez rozkład, to znaczy czy można jeden z nich podzielić na takie (mniejsze) wielościany, że da się z tych wielościanów ułożyć drugi. Problem ten znalazł już w kilka miesięcy po postawieniu rozwiązanie negatywne – Dehn podał warunek konieczny równoważności przez rozkład i podał też przykład wielościanów nie spełniających tego warunku.

Max Dehn (1878, 1952). Wynik po raz pierwszy został opublikowany jako *Über den Rauminhalt*, Göttingen Nachr. Math. Phys. (1900), 345–354. Przykładem wielościanów nie spełniających warunku Dehna są – mające jednakowe objętości – naroże sześcianu jednostkowego



i sześcian o krawędzi $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

Wynik Dehna był dla jego opiekuna naukowego – Hilberta – dużym zaskoczeniem: na płaszczyźnie dowolne dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez rozkład (twierdzenie Farkasa Bolyaia i Paula Gerwiena z 1800 roku).

Warunek Dehna można klarownie przedstawić definiując liczby D_f nazwane później *niezmiennikami Dehna.* Najpierw określa się *funkcje Dehna:* są to funkcje addytywne, przyjmujące dla argumentu π wartość 0, czyli spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y warunki

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\pi) = 0.$$

Niezmiennik Dehna wielościanu W, to liczba

$$D_f = \sum_i l_i f(\xi_i),$$

gdzie sumowanie rozciąga się na dowolnie ponumerowane krawędzie wielościanu, l_i to długość i-tej krawędzi, ξ_i zaś to kąt dwuścienny przy niej. Niezmienników Dehna jest więc tyle, ile jest funkcji Dehna, czyli (przynajmniej) continuum. Twierdzenie Dehna brzmi:

Jeśli dwa wielościany są równoważne przez rozkład, to mają wszystkie niezmienniki D_f równe.

Dla dowodu więc, że nie wszystkie wielościany są równoważne przez rozkład wystarczy wskazać jeden, który ma choćby jeden niezmiennik Dehna różny od zera – sześcian bowiem ma, w sposób oczywisty, wszystkie niezmienniki Dehna równe 0.

Niezmiennik Dehna różny od zera dla naroża sześcianu to np. dany przez funkcję określoną przez warunki: dla każdej liczby wymiernej $w \neq 0$ $f(w \cdot \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}) = w$, oraz $f(x) = 0$ dla wszelkich innych liczb rzeczywistych.

Czytelnik zechce sprawdzić, że tak określona funkcja f jest funkcją Dehna.

Istota dowodu twierdzenia Dehna sprowadza się do spostrzeżenia, że funkcje addytywne mają dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2, \ldots, w_n$ i dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ własność

$$f(w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n) = w_1f(x_1) + w_2f(x_2) + \ldots + w_nf(x_n).$$

Powstające przy pocięciu wielościanu nowe wielościany mają krawędzie (1°) albo będące fragmentem „starych" krawędzi, (2°) albo będące odcinkami leżącymi na ścianach „starego" wielościanu, (3°) albo będące odcinkami leżącymi w jego wnętrzu. Oznaczając długość nowej krawędzi (wspólnej dla jakichś m nowych wielościanów) przez l, a kąty dwuścienne przy tej krawędzi (w poszczególnych wielościanach) przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ otrzymujemy

$$lf(\alpha_1) + lf(\alpha_2) + \ldots + lf(\alpha_m) = lf(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) = l \cdot y,$$

gdzie w pierwszym przypadku $y = f(\alpha)$ – tu α jest kątem dwuściennym

„starego" wielościanu, w drugim przypadku zaś mamy $y = f(\pi) = 0$, a w trzecim $y = f(2\pi) = 2f(\pi) = 0$. Po zsumowaniu zostają więc tylko „stare" krawędzie pomnożone przez „stare" kąty dwuścienne; nic się więc w sumie stanowiącej niezmiennik Dehna nie zmienia. I tyle (trzeba przyznać jednak, że takie wyczyszczenie dowodu pochodzi dopiero z 1949 roku i jest autorstwa Hadwigera).

To, że Hilbert był zaskoczony wynikiem Dehna, bierze się z zaawansowanych – jak się wydawało – prac zmierzających do uzyskania wyniku przeciwnego. Wszystkie one dążyły do wykazania, że każdy wielościan jest równoważny przez rozkład pewnemu sześcianowi. Istotnie – gdyby wielościany były równoważne przez rozkład, tak by też było; gdyby każdy był równoważny przez rozkład sześcianowi, to dowolne dwa o równych objętościach byłyby też równoważne.

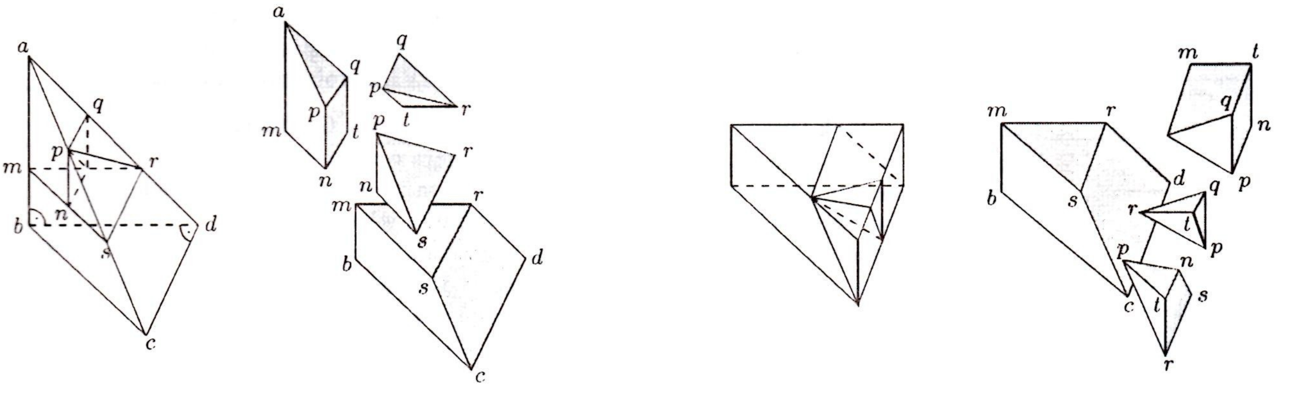
„Od zawsze" było wiadomo, że z twierdzenia Bolyaia–Gerwiena wynika (konstruktywnie), iż

dowolny graniastosłup jest równoważny przez rozkład sześcianowi

(istotnie, dowód nie jest trudny – proszę spróbować).

George William Hill (1838,1914). Wyniki pochodzą z pracy *Determination of the volume of certain species of tetrahedrons*, Proc. London Math. Soc. **27**(1896), 39–52.

Pozostawało zatem sprowadzenie dowolnego wielościanu przez rozkład do graniastosłupa. I tu były pewne sukcesy. Ich autorem był Hill. Podał on od razu nieskończoną (mocy continuum) listę czworościanów, które są równoważne przez rozkład graniastosłupom. Są to umieszczone w tabelce czworościany $H_i(\alpha)$. Oczywiście (wierząc, że każdy wielościan, a w szczególności każdy czworościan jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi) Hill nie szukał warunków ułatwiających sprawdzenie równoważności, lecz bezpośrednio konstruował stosowny rozkład. Poniżej jest przedstawiony rozkład czworościanu $H_1(\frac{\pi}{4})$.



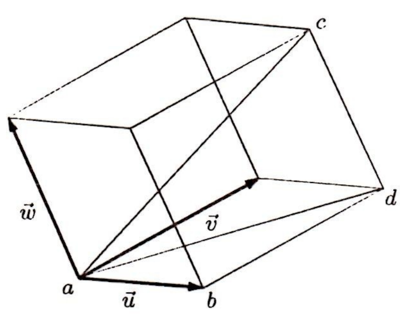
Na dowód, że równoważne graniastosłupom czworościany to nie tylko te H_i, Hill podał jeszcze jeden przykład: T_0. Ponieważ już w cztery lata później okazało się (Dehn), że zamierzenie Hilla – stworzenie dostatecznie dużej listy czworościanów równoważnych konstruktywnie graniastosłupom, a następnie wykazanie, że każdy wielościan można rozłożyć na takie czworościany – jest niewykonalne, sprawa przycichła.

Powrócono do niej, gdy pojawiła się nowa hipoteza badawcza: być może

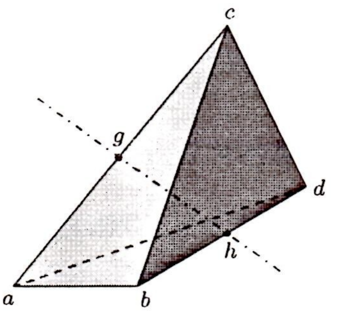
warunek konieczny równoważności przez rozkład podany przez Dehna jest również warunkiem dostatecznym.

Autorem tej hipotezy (postawionej jeszcze podczas wojny) był Jean-Paul Sydler. Proponowana przez niego idea dowodu też opierała się na odpowiednio sprytnym rozkładzie wielościanu na czworościany, co problematykę, które czworościany są porządne (równoważne graniastosłupom), a które nie, reaktywowało. Sydler zresztą udowodnił niezwykle pomocne w tej sprawie twierdzenie

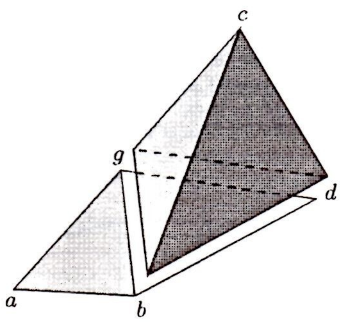
T. *Jeśli wielościan równoważny graniastosłupowi rozbijemy na pewną liczbę przystających wielościanów, to każdy z nich też będzie równoważny przez rozkład graniastosłupowi.*



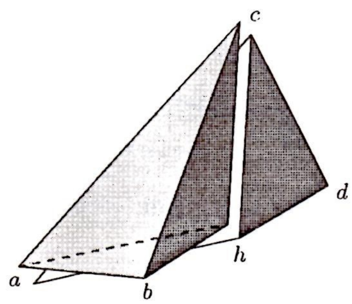
Powstanie H_1



H_1 i jego oś symetrii



Powstanie H_2



Powstanie H_3

Pozwala to np. natychmiast wykazać, że czworościany Hilla są przyzwoite. Weźmy bowiem romboscian wyznaczony przez trzy (równej długości) tworzące jednakowe kąty wektory. Ich wspólny początek oznaczmy przez a, a przeciwległy mu wierzchołek romboscianu przez c. Przecinając romboscian płaszczyznami (jest ich trzy) zawierającymi ac i jeszcze jeden wierzchołek romboscianu otrzymujemy sześć przystających czworościanów H_1. Ponieważ romboscian (jako graniastosłup) jest równoważny graniastosłupowi, więc tak też jest z każdym czworościanem H_1 (a gdzie jest na obrazku kąt α?).

Prosta łącząca środki krawędzi ac i bd jest osią symetrii otrzymanego wielościanu. Dlatego każda płaszczyzna zawierająca tę prostą rozbija czworościan na dwa przystające wielościany równoważne (na mocy **T**) graniastosłupom. W szczególności, gdy zawiera ona krawędź bd czworościan przecięty jest na dwa (oczywiście przystające) czworościany H_2. Podobnie, gdy płaszczyzna zawiera ac otrzymujemy dwa czworościany H_3.

Sydler podał też nowe przykłady porządnych czworościanów (T_1 – T_4), a w ślad za nim dwa nowe podał w 1958 roku Goldberg (T_5 i T_6), a pięć następnych (T_7 – T_{11}) w 1962 roku H.-C. Lenhard.

I tu sytuacja się radykalnie zmieniła. W 1965 roku ukazał się dowód Sydlera potwierdzający jego hipotezę (*Conditions nécessaires et suffisantes pour l'equivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Mat. Helv. **40**(1965), 43–80). Stąd lista porządnych czworościanów automatycznie (przez proste sprawdzenie) powiększyła się o T_{12} Somerville'a.

Pewne uogólnienia twierdzenia **T** podał w 1974 roku Goldberg, co go doprowadziło do powiększenia listy porządnych czworościanów o T_{13} – T_{26}. I – o ile mi wiadomo – od lat dwudziestu nikt już listy nie powiększył, choć trudno wątpić, że jest to możliwe. Cała lista jest w tabelkach wypełniających następne strony. Te właśnie badania Goldberga skłoniły go do zajęcia się przyzwoitymi czworościanami również w kontekście XVIII problemu Hilberta.

Pozostańmy jednak jeszcze na chwilę przy dokonanym przez Goldberga uogólnieniu twierdzenia **T**. Wobec twierdzenia Sydlera o niezmiennikach Dehna równoważność przez rozkład z graniastosłupem i posiadanie wszystkich niezmienników Dehna równych zeru to jedna i ta sama własność, tylko wyrażona w różnych językach. Skoro jednak wartości niezmienników Dehna dla wielościanów powstających na skutek rozcięcia jakiegoś wielościanu są addytywne, więc, gdy z wielościanu równoważnego graniastosłupowi (czyli takiego, że dla każdej dehnowskiej funkcji f jest $D_f = 0$) wyjmiemy wielościan o tejże własności, to pozostałość będzie też miała tę własność (bo $0 - 0 = 0$). Innymi słowy możemy teraz rozbijać przyzwoite czworościany nie tylko na czworościany przystające, lecz także wyjmować z nich inne przyzwoite czworościany: jeśli tylko to, co pozostanie, będzie czworościanem, to będzie to czworościan przyzwoity.

Oczywiście wymaga to spostrzegawczości. Oto początek rozumowania Goldberga. Jeśli przetniemy czworościan T_4 płaszczyzną zawierającą krawędź bd (patrz tabelka) i na dodatek prostopadłą do ściany abc, to otrzymamy dwa czworościany. Oznaczmy ich trzeci (poza b i d) wspólny wierzchołek przez e – czworościan $bcde$ jest typu T_3. W myśl uwag z poprzedniego akapitu pozostałość – czworościan $bade$ też jest równoważny graniastosłupowi i można go wciągnąć na listę jako T_{13}. Jeśli mu się jednak przyjrzeć, to można dostrzec, że ma on oś symetrii – jest nią prosta łącząca środek odcinka bc ze środkiem odcinka de. Można więc zastosować teraz do T_{13} sposób, jakiego użyliśmy do uzyskania czworościanów H_2 i H_3 z czworościanu H_1. Uzyskane w ten sposób czworościany wciągamy na listę jako T_{14} i T_{15}. Następny krok to znowu odcięcie od T_{14} czworościanu T_9 (jak, czyli z której strony?) – otrzymamy nowy typ czworościanu równoważnego graniastosłupowi – T_{16}. I tak dalej, aż do skompletowania tabelki. Zapewniam też Czytelników, że uzyskanie dalszych, nie uwzględnionych w tabelce, ale porządnych czworościanów byłoby wynikiem publikowalnym.

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
	$H_1(\alpha)$	
ab	$\sin\alpha$	α
ac	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$
ad	1	$\pi/2$
bc	1	$\pi/2$
bd	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$
cd	$\sin\alpha$	α
	$H_2(\alpha)$	
ab	$2\sin\alpha$	α
ac	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$
ad	2	$\pi/2$
bc	$\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$	$\pi-\arccos((1/2)\mathrm{ctg}\alpha)$
bd	$2\sin\alpha$	$\pi/2-\alpha$
cd	$\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$	$\arccos((1/2)\mathrm{ctg}\alpha)$
	$H_3(\alpha)$	
ab	$2\sin\alpha$	α
ac	$\sqrt{12}\cos\alpha$	$\pi/6$
ad	$\sqrt{2+\sin^2\alpha}$	$\pi-\arccos((1/\sqrt{3})\cos\alpha)$
bc	2	$\pi/2$
bd	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$
cd	$\sqrt{2+\sin^2\alpha}$	$\pi-\arccos((1/\sqrt{3})\cos\alpha)$
	T_0	
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ac	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
ad	2	$\pi/4$
bc	1	$\pi/2$
bd	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
	T_1	
ab	$x:=\sqrt{5}/2$	$\pi/2$
ac	$1/x$	$\pi/2$
ad	1	$\pi/2$
bc	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
bd	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
cd	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
	T_2	
ab	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$
ac	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
ad	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
bd	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
cd	2	$\pi/2$

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
	T_3	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	2	$\pi/2$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$3\pi/5$
bd	$\sqrt{3}/x$	$\pi/3$
cd	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x^3}$	$2\pi/5$
	T_4	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x^3}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{3}x$	$\pi/3$
ad	2	$\pi/2$
bc	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
bd	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$
cd	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$3\pi/5$
	T_5	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$2\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
bd	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
cd	$2/x$	$\pi/2$
	T_6	
ab	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$4\pi/5$
ac	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
ad	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
bc	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
bd	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
cd	$2x$	$\pi/2$
	T_7	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
bd	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
cd	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
	T_8	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
ad	$\sqrt{7}/2$	$\beta:=\mathrm{arctg}\sqrt{7/5}$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
bd	$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{7}/2$	$\pi-\beta$

Uwaga: W tabelkach (tych i na następnych stronach) symbol α oznacza dowolną liczbę z przedziału $(0,\pi)$. Natomiast liczby x, β, γ, δ, ϵ, ς, η, ϑ, λ, μ, ν, φ, ψ są stałymi, których wartość podana jest przy pierwszym ich użyciu.

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
	T_9	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt[4]{5}/2\sqrt{x}$	$\pi/5$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/10$
bd	$\sqrt{7+3x}/2$	$\gamma :=\mathrm{arctg}\sqrt{9-2\sqrt{5}}$
cd	$\sqrt{7+3x}/2$	$\pi-\gamma$
	T_{10}	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/10$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{7-3/x}/2$	$\delta :=\mathrm{arctg}\sqrt{9+2\sqrt{5}}$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
bd	$\sqrt{7-3/x}/2$	$\pi-\delta$
cd	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}/2$	$3\pi/5$
	T_{11}	
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/10$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
ad	1	$\varepsilon := \pi-\mathrm{arctg} 2x^2$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/10$
bd	1	$\zeta := \pi-\mathrm{arctg} 2$
cd	1	$\eta := 2\pi-\varepsilon-\zeta$
	T_{12}	
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
ad	$\sqrt{5}/2$	$\vartheta := \pi - \arccos 2/3$
bc	2	$\pi/4$
bd	$\sqrt{5}/2$	$\pi-\vartheta/2$
cd	$\sqrt{5}/2$	$\pi-\vartheta/2$
	T_{13}	
ab	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
ad	$2/x$	$\pi/2$
bc	$2/x$	$\pi/2$
bd	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{18-11x}$	$3\pi/5$
	T_{14}	
ab	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
ac	$2\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
ad	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$
bc	$\sqrt{7+3x}/x^2$	$\pi-\gamma$
bd	$\sqrt{7+3x}/x^2$	γ
cd	$2\sqrt{18-11x}$	$3\pi/10$

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
	T_{15}	
ab	$2\sqrt{2+x}$	$\pi/10$
ac	$2\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{10-3x}$	$\pi-\delta$
bc	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$
bd	$\sqrt{10-3x}$	δ
cd	$\sqrt{18-11x}$	$3\pi/5$
	T_{16}	
ab	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
ac	$x\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$2x$	$\pi/2$
bc	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$
bd	$\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
cd	$\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
	T_{17}	
ab	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
ac	$x\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	2	$\pi/2$
bc	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
bd	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3$
cd	$\sqrt{3-x}$	$2\pi/5$
	T_{18}	
ab	$\sqrt{7-4x}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
ad	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3$
bc	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3$
bd	$\sqrt{3}/x^2$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{7-4x}$	$\pi/5$
	T_{19}	
ab	$2\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/6$
ac	$2\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
ad	$\sqrt{10-3x}$	$\pi-\lambda$
bc	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$
bd	$\sqrt{10-3x}$	$\lambda := \arccos(x^2/(2\sqrt{3}))$
cd	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
	T_{20}	
ab	$2\sqrt{2+x}$	$\pi/10$
ac	$2\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
ad	$\sqrt{6}$	$\pi-\mu$
bc	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$
bd	$\sqrt{6+x}$	$\mu := \arccos(x^{3/2}/(2\sqrt[4]{5}))$
cd	$\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/3$

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
	T_{21}	
ab	$\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{3-x}$	$3\pi/5$
bc	$\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
bd	$\sqrt{5}-1$	$\pi/2$
cd	$\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/3$
	T_{22}	
ab	$x\sqrt{3}$	$\pi/3$
ac	$2\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$2\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
bc	$\sqrt{7-x}$	$\pi-\nu$
bd	$\sqrt{7-x}$	$\nu :=\mathrm{arctg}\sqrt{11+16x}$
cd	$2\sqrt{3-x}$	$3\pi/10$
	T_{23}	
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ac	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{3-x}$	$2\pi/5$
bc	$\sqrt{3-x}$	$2\pi/5$
bd	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{7-4x}$	$3\pi/5$

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
	T_{24}	
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
ac	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{11-4x}/2$	$\pi-\varphi$
bc	$\sqrt{3-x}$	$\pi/2$
bd	$\sqrt{11-4x}/2$	$\varphi := \arccos(1/(2\sqrt{3}x^2))$
cd	$\sqrt{7-4x}/2$	$3\pi/5$
	T_{25}	
ab	$\sqrt{6-3x}$	$\psi :=\mathrm{arctg}\sqrt{3/5}$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$2\sqrt{2-2x}$	$\pi/2$
bc	$\sqrt{3-x}$	$3\pi/5$
bd	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3-\psi$
cd	$\sqrt{7-4x}$	$\pi/5$
	T_{26}	
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3-\psi$
ac	$\sqrt{3}$	ψ
ad	$\sqrt{3-x}$	$4\pi/5$
bc	$2\sqrt{2}$	$\pi/2$
bd	$\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
cd	$\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/3$

Z powrotem do NRD

Pytanie, w jakich to czworościanach wypełniających przestrzeń można sprzedawać mleko (bo chyba brak NRD nie musi się odbić na spadku inwencji handlowców), nabiera teraz – po wynikach Sydlera, a w szczególności przytoczonej jego konstrukcji wielościanów Hilla – nowego rozpędu.

Jest rzeczą oczywistą, że użyte przez Sydlera rombościany stanowią obszar fundamentalny grupy krystalogarficznej – każdy umie wypełnić nimi przestrzeń (stosowną grupą jest tu grupa przesunięć o wektory – w oznaczeniach z rysunku na stronie 44 – $k \cdot \mathbf{u} + l \cdot \mathbf{v} + m \cdot \mathbf{w}$). Nie wymaga to wielkiej spostrzegawczości, by zauważyć, że podzielenie rombościanu na czworościany któregoś z typów H_i prowadzi do wniosku, iż każdy z tych czworościanów też jest obszarem fundamentalnym jakiejś (łatwej do znalezienia) grupy krystalograficznej. Gdy jednak zastosujemy takie naturalne rozbicie (pokrojenie) przestrzeni na te czworościany, to bez trudu – znów widać to na rysunkach ze strony 44 – stwierdzimy, że grupa ta zawiera między innymi symetrie płaszczyznowe. Nie jest więc grupą fizycznie krystalograficzną.

Zatem NRDowscy mleczarze stanęli przed perspektywą albo używania tylko jednego z pięciu wcześniej znalezionych kształtów kartonika do mleka, albo też jakiegoś innego poukładania czworościanów H_i w przestrzeni. Robotę tę wykonał za nich (nie wywodzący się z NRD) Amerykanin Goldberg w zacytowanej wyżej pracy. Wykazał on, że można z każdego z kartoników $H_i(\alpha)$ poukładać w sposób fizycznie krystalograficzny całą przestrzeń szczelnie ją wypełniając. A właściwie, to wskazał sposób układania. Co każdy Czytelnik może spróbować zrobić na własną rękę.

Zasugeruję jednak pewien sposób podejścia do tego rezultatu. Złóżmy dwa czworościany H_1 o tym samym kącie α ścianami bcd tak, by otrzymać graniastosłup (proszę sprawdzić, że jego przekrój płaszczyzną prostopadłą do ac jest trójkątem równobocznym). Składając takie graniastosłupy „w nieskończoność" otrzymamy nieskończoną rurkę o przekroju trójkątnym. Takimi zaś rurkami wypełnia się przestrzeń bez trudu – tak jak płaszczyznę trójkątami.

* * * * *

Każdy zdaje sobie sprawę, że opowiadanie o kartonikach z mlekiem nie może być potraktowane jako uzasadnienie sensowności podejmowania opisanych tu badań – że niby mają one zastosowanie praktyczne. Trudno też byłoby poszukiwać w innych działach matematyki zastosowania dla uzyskanych tu rezultatów, bądź używania stosowanych dla ich uzyskania metod (bo, właściwie, to co to za metody?). Powstaje zatem pytanie, czy tego rodzaju zatrudnienie intelektualne to naprawdę matematyka. Nie jest to pytanie wymyślone *ad hoc*, by dokuczyć kolegom zajmującym się taką problematyką. Są tacy, którzy zrobili to bardziej jednoznacznie. W wydanej przez środowisko amerykańskie ważnej pracy zbiorowej (i zbiorczej) o problemach Hilberta trzeci problem Hilberta został w ogóle pominięty. Uznano sprawę za nie wzbogacającą matematyki. Tak jak Nobel uznał matematykę czy filozofię za działalność nie służącą ludzkości. Inni jednak tego typu zajmowanie się matematyką uznali za odrębną jej gałąź i nazwali *geometrią intuitywną*. I dobrze im z nią i ze sobą nawzajem.

Proceedings of Symposia of Pure Mathematics, vol.XXVIII, part1,2, Providence, Rhode Island, 1976.

Matematykę w jej dziejach uprawiano z trzech różnych motywacji: jako najogólniejszą teorię wszechświata (np. Pitagoras, Platon, Kepler, Newton), jako powiększanie zasobów skrzynki z narzędziami dla innych nauk (Arystoteles, Galileusz), bądź też jako najskuteczniejszy sposób wyrabiania sprawności i elastyczności umysłu (cały Wschód). Każdy z nas musi, jak sądzę dokonać dla siebie wyboru. Odradzałbym jednak wybór za innych i odsądzanie od czci i wiary tych, którzy wybrali odmiennie od nas – tak jak wymieniani wyżej nasi koledzy.