Co i jak opowiadamy studentom
– X Szkoła Matematyki
Poglądowej, Miętne,
29.01.–02.02.1993

Wielomiany, ich pochodne i ich zera

Janusz DRONKA, Rzeszów

Wyobraźmy sobie bardzo duży staw, z którego dna wytryska kilka źródeł. Przypuśćmy dalej, że przepływ wody w tym stawie jest na tyle regularny, że można go uznać za płaski i stacjonarny, tzn. kierunek i siła prądu wody w danym punkcie są poziome, nie zależą od głębokości i nie zmieniają się w czasie.

Wiadomo, że dla takiego przepływu muszą istnieć tzw. punkty równowagi, to znaczy miejsca, w których woda nie porusza się. Powstaje pytanie: w jaki sposób szukać takich punktów?

Można robić to doświadczalnie, na przykład rzucając na powierzchnię stawu drobne, pływające przedmioty i obserwując, które z nich poruszają się, a które nie. Jest to jednak metoda dość zawodna (trudności ze znalezieniem nieruchomego punktu odniesienia) i bardzo pracochłonna. Okazuje się, że poszukiwane punkty równowagi można znaleźć, przynajmniej teoretycznie, wykorzystując następującą konstrukcję.

Wiadomości na temat liczb zespolonych i ich własności można znaleźć np. w książkach M. Bryńskiego [1], F. Leji [2] oraz B. W. Szabata [6].

Załóżmy, że wszystkie źródła są mniej więcej równej mocy i leżą tak daleko od brzegów, że można przyjąć powierzchnię stawu za nieskończoną płaszczyznę. Ustalmy pewien prostokątny układ współrzędnych na tej płaszczyźnie, i każdemu punktowi o współrzędnych (x, y) przyporządkujmy liczbę zespoloną postaci $z = x + iy$. Kolejnym źródłom będą przy tym odpowiadać liczby $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Rozważmy teraz wielomian (dokładniej – funkcję wielomianową) postaci

$$f(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

oraz jego pochodną

$$f'(z) = n \cdot (z - \varsigma_1) \cdot \ldots \cdot (z - \varsigma_{n-1}).$$

Punkty $z_1, \ldots, z_n$ będziemy nazywać zerami (lub pierwiastkami) wielomianu f, zaś zera (pierwiastki) pochodnej – punktami krytycznymi wielomianu.

Uzasadnienie tego faktu można znaleźć np. w książce B. W. Szabata [6].

Okazuje się, że miejsca na powierzchni stawu, które odpowiadają liczbom $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_{n-1}$, czyli zerom pochodnej, są to szukane punkty równowagi przepływu.

Podstawowe wiadomości dotyczące teorii Galois i jej zastosowań są dostępne np. w książkach [1] oraz [5].

Wydawałoby się, że problem został rozwiązany, ale niestety tak nie jest. Dla $n \geq 6$ stopień pochodnej wynosi co najmniej 5, więc, zgodnie z teorią Galois, nie istnieją wzory pozwalające wyznaczyć pierwiastki f', w zależności od współczynników f, za pomocą czterech działań algebraicznych i pierwiastkowania. W przypadku funkcji zmiennej zespolonej nie ma również tak prostych i skutecznych metod przybliżonego rozwiązywania równań jak np. metody siecznych i stycznych dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

Interpretacja punktów krytycznych wielomianu jako punktów równowagi pewnego pola sił znajduje się np. w książce M. Mardena [3].

Stajemy więc wobec problemu lokalizacji zer pochodnej wielomianu. Pojawia się on w sposób naturalny nie tylko w hydrodynamice, ale również w wielu innych zagadnieniach fizyki i matematyki. Tradycyjne metody rozwiązania tego problemu, czysto teoretyczne i często mało dokładne, w dobie szybko liczących komputerów z pewnością nie mają takiego znaczenia jak dawniej, niemniej jednak wydają się warte przedstawienia.

Na początek spróbujmy zlokalizować zera pochodnej wielomianów stopni najniższych – drugiego i trzeciego.

Załóżmy najpierw, że rozważany wielomian jest stopnia drugiego i ma zera z_1, z_2. Mamy wtedy

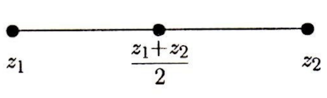
$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2$$

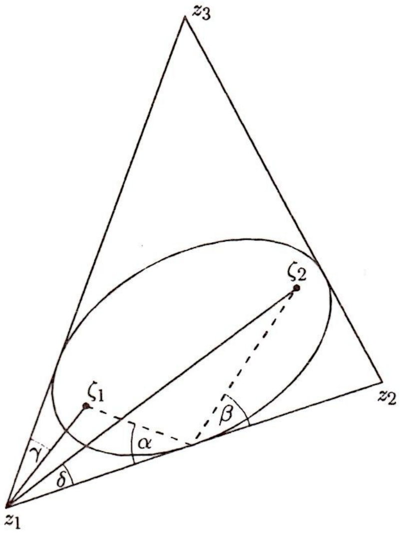
(bez straty ogólności można przyjąć, że współczynnik przy z^2 jest równy 1), oraz

$$f'(z) = 2z - (z_1 + z_2),$$

a więc jedynym miejscem zerowym pochodnej jest punkt

$$\varsigma_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \text{ – środek odcinka o końcach } z_1 \text{ i } z_2.$$



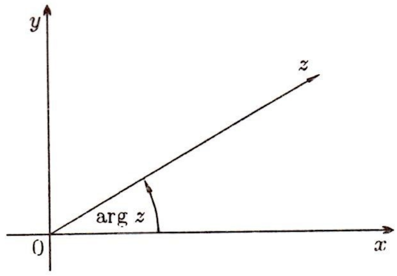


Rys. 1.

Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ nazywamy liczbę rzeczywistą φ, określoną równaniami

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|},$$

gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Argument liczby $z \neq 0$ oznaczamy $\arg z$; jest on miarą kąta nachylenia wektora $0z$ do osi rzeczywistej.



Każda liczba $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów; ten spośród nich, który spełnia nierówność $-\pi \leq \arg z \leq \pi$ nazywamy argumentem głównym liczby z i oznaczamy przez $\operatorname{Arg} z$. Będziemy korzystać z następującej własności argumentu

$$\arg z - \arg w = \arg\left(\frac{z}{w}\right).$$

W przypadku wielomianów stopnia trzeciego sprawa nie jest tak prosta. Niech

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

Wtedy

$$f'(z) = 3 \cdot (z - \zeta_1)(z - \zeta_2).$$

Wykażemy, że zera pochodnej

$$\zeta_1, \zeta_2$$

są ogniskami elipsy stycznej do boków trójkąta o wierzchołkach z_1, z_2, z_3, oraz że punkty styczności dzielą boki na połowy (rys. 1).

Narysujmy elipsę E o ogniskach ζ_1, ζ_2, styczną do prostej przechodzącej przez punkty z_1 i z_2. Wykażemy, że prosta wyznaczona przez z_1 i z_3 jest również styczna do E. Skorzystamy przy tym ze znanego twierdzenia, które mówi, że proste łączące ogniska dowolnej elipsy E z punktem z_1 leżącym na elipsie lub poza nią, tworzą równe kąty ze stycznymi do E poprowadzonymi z punktu z_1.

Niech

(1)
$$\gamma = \operatorname{Arg}\frac{z_3 - z_1}{\zeta_1 - z_1}, \qquad \delta = \operatorname{Arg}\frac{\zeta_2 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Mamy

(2)
$$f'(z) = 3 \cdot (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)$$

oraz

(3)
$$f'(z) = (z - z_2)(z - z_3) + (z - z_1)(z - z_3) + (z - z_1)(z - z_2).$$

Podstawiając z_1 w miejsce z do wzorów (2) i (3) oraz porównując je stronami otrzymujemy równanie

$$3 \cdot (z_1 - \zeta_1)(z_1 - \zeta_2) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3).$$

Dalej, korzystając z (1), dostajemy

$$\gamma - \delta = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{\zeta_1 - z_1} : \frac{\zeta_2 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{\zeta_1 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{\zeta_2 - z_1}\right) = \arg 3 = 0.$$

Stąd, na mocy wspomnianego wyżej twierdzenia wynika, że prosta wyznaczona przez z_1 i z_3 jest również styczna do rozpatrywanej elipsy.

Dowód, że trzeci bok trójkąta $z_1z_2z_3$ jest styczny do E przeprowadzamy analogicznie.

Wykażemy teraz, że punkt styczności elipsy E z bokiem z_1z_2 dzieli ten bok na połowy.

Oznaczmy przez w środek boku z_1z_2. Mamy zatem

$$w = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Podobnie jak poprzednio, podstawmy w w miejsce z do wzorów (2) i (3). Po porównaniu stronami otrzymamy

$$(w - z_1)(w - z_2) = 3(w - \zeta_1)(w - \zeta_2).$$

Jeśli, tak jak na rysunku, oznaczymy

$$\alpha = \operatorname{Arg}\frac{z_1 - w}{\zeta_1 - w}, \qquad \beta = \operatorname{Arg}\frac{\zeta_2 - w}{z_2 - w},$$

to

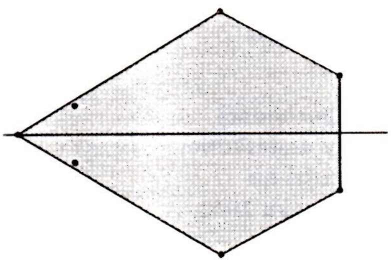
$$\alpha - \beta = \arg\left(\frac{z_1 - w}{\zeta_1 - w} : \frac{\zeta_2 - w}{z_2 - w}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - w}{\zeta_1 - w} \cdot \frac{\zeta_2 - w}{z_2 - w}\right) = \arg 3 = 0.$$

Stąd, podobnie jak poprzednio, wynika, że w jest punktem styczności elipsy E z prostą z_1z_2.

Dowód dla pozostałych boków trójkąta $z_1z_2z_3$ można przeprowadzić analogicznie.

Na tym zakończymy badanie położenia punktów krytycznych wielomianów najniższych stopni i przejdziemy do wyników ogólnych, dotyczących wielomianów dowolnego stopnia n, dla $n \geq 2$.

Za pierwsze twierdzenie dotyczące rozważanego problemu można uznać zasadnicze twierdzenie algebry. Orzeka ono, że każdy wielomian o współczynnikach zespolonych ma co najmniej jeden pierwiastek w zbiorze liczb zespolonych. Pochodna wielomianu, sama będąc wielomianem, również musi mieć pierwiastki – tak więc przedmiot rozważań istnieje! Zasadnicze twierdzenie algebry sformułował Jean d'Alembert w roku 1746, zaś pierwszy dowód podał Carl F. Gauss w 1799 r. Z jego nazwiskiem związane jest również następujące twierdzenie, udowodnione przez F. Lucasa w roku 1874.



Rys. 2

Twierdzenie (Gauss–Lucas). *Wszystkie zera pochodnej $f'(z)$ leżą w najmniejszym wieloboku wypukłym obejmującym zera wielomianu $f(z)$* (rys. 2).

Jeśli wszystkie zera $f(z)$ leżą na jednej prostej, to najmniejszy wielobok wypukły, który je obejmuje, redukuje się do odcinka.

Dowód twierdzenia Gaussa–Lucasa, jak i innych które za chwilę przedstawimy, można znaleźć np. w książkach A. Turowicza [7] oraz M. Mardena [3].

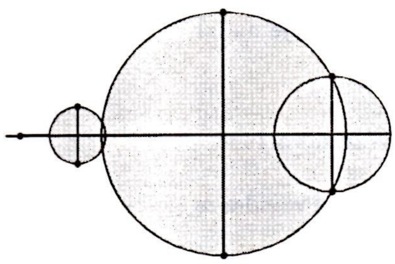
Inną lokalizację punktów krytycznych wielomianu daje następujące twierdzenie pochodzące od J. L. W. Jensena (1913), a udowodnione przez J. L. Walsha w roku 1920. Dotyczy ono wielomianów rzeczywistych, tzn. takich wielomianów zmiennej zespolonej, których wszystkie współczynniki są liczbami rzeczywistymi.

Jeśli $z_1 = x + iy$ jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego $f(z)$ to liczba sprzężona z nią $z_2 = x - iy$ jest również pierwiastkiem $f(z)$, i to tej samej krotności.

Można udowodnić, że zera wielomianu rzeczywistego są położone symetrycznie (licząc wraz z krotnościami) względem osi Ox.

Kołem Jensena dla wielomianu rzeczywistego $f(z)$ nazywamy koło, którego średnicą jest odcinek z_1z_2 prostopadły do osi rzeczywistej, i którego końce z_1, z_2 są zerami wielomianu $f(z)$, nierzeczywistymi i sprzężonymi.

Dla wielomianu $f(z)$ istnieje więc tyle kół Jensena, ile jest różnych par, sprzężonych nierzeczywistych zer $f(z)$.



Rys. 3

Twierdzenie (Jensen). *Każde zero pochodnej wielomianu rzeczywistego, które nie jest liczbą rzeczywistą, leży wewnątrz lub na okręgu jednego z kół Jensena tego wielomianu* (rys. 3)

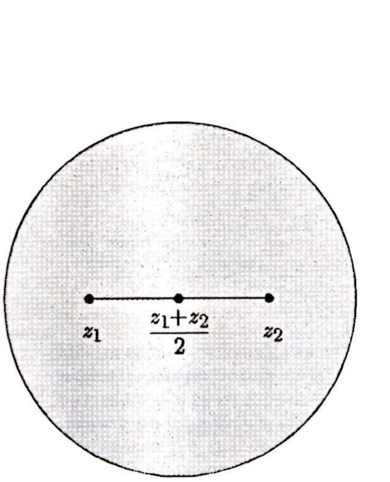
Twierdzenie to daje inną lokalizację punktów krytycznych wielomianu, często lepszą niż twierdzenie Gaussa–Lucasa.

Należy jednak pamiętać, że odnosi się ono tylko do wielomianów rzeczywistych i nie mówi niczego o położeniu zer rzeczywistych pochodnej, ani też nie przesądza o istnieniu zer nierzeczywistych.

Obydwa wspomniane wyżej twierdzenia opisują lokalizację wszystkich punktów krytycznych wielomianu w stosunku do wszystkich jego zer. Powstaje zatem pytanie: co można powiedzieć o położeniu zer pochodnej, jeżeli znanych jest tylko kilka (niekoniecznie wszystkie) zer wielomianu?

Załóżmy, na przykład, że dane są dwa zera z_1, z_2 wielomianu stopnia $n \neq 0$. Gdzie leżą punkty krytyczne tego wielomianu?

Przytoczymy kilka twierdzeń dotyczących tej właśnie sytuacji. Pierwszym z nich jest znane z kursu szkoły średniej twierdzenie Rolle'a. Orzeka ono, że jeśli wielomian $f(z)$ jest rzeczywisty, to odcinek łączący dwa jego rzeczywiste zera musi zawierać co najmniej jedno zero pochodnej. W ogólnym przypadku jedną z możliwych odpowiedzi na zadane pytanie daje twierdzenie udowodnione niezależnie przez J. H. Grace'a (1902) i P. J. Heawooda (1907).

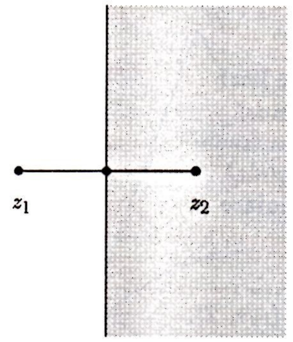


Rys. 4

Twierdzenie (Grace–Heawood). *Jeżeli z_1, z_2 są zerami wielomianu $f(z)$, to przynajmniej jedno zero pochodnej $f'(z)$ leży w kole o środku w punkcie $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ i o promieniu $\frac{1}{2} \cdot |z_1 - z_2| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$* (rys. 4).

Twierdzenie to daje niezłą lokalizację dla jednego z punktów krytycznych wielomianu, gdy n nie jest zbyt wielkie. Na przykład, dla $n \leq 10$, mamy $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \leq 3{,}08$, a więc średnica koła jest najwyżej 3,08 razy większa od odległości $|z_1 - z_2|$.

Jako wnioski z twierdzenia Grace'a–Heawooda można uzyskać następujące rezultaty, z których pierwszy udowodniony został w roku 1915 przez J. W. Alexandera.

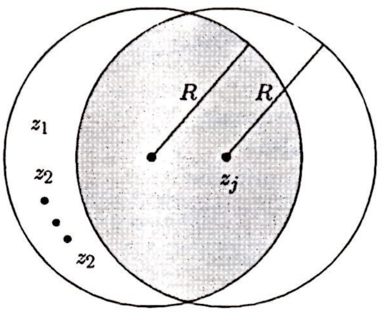


Rys. 5

Twierdzenie (Alexander). *Jeżeli dwa zera wielomianu leżą w kole domkniętym o promieniu R, to przynajmniej jedno zero jego pochodnej znajduje się we współśrodkowym kole o promieniu $R/\sin\frac{\pi}{n}$.*

Twierdzenie. *Jeżeli z_1 i z_2 są zerami wielomianu zespolonego $f(z)$, to w każdej z półpłaszczyzn domkniętych, na które dzieli płaszczyznę symetralna odcinka z_1z_2, znajduje się co najmniej jeden punkt krytyczny tego wielomianu* (rys. 5).

Można zapytać dalej: Co będzie w przypadku, gdy znamy tylko jedno zero wielomianu?



Rys. 6.

Oczywiście, gdy nie ma żadnych innych danych, to o położeniu zer pochodnej w takiej sytuacji nie da się nic powiedzieć. Jeśli natomiast założymy dodatkowo, że wszystkie zera wielomianu leżą w pewnym kole, to próbą odpowiedzi na postawione pytanie jest hipoteza przedstawiona przez B. Sendowa w roku 1962, w czasie Kongresu Matematycznego w Sztokholmie.

Hipoteza (Sendow). Jeżeli wszystkie zera $z_1, z_2, \ldots, z_n$ wielomianu zespolonego leżą w pewnym kole o promieniu R, to każde z kół o środku z_j i promieniu R, gdzie $j = 1, 2, \ldots, n$, zawiera co najmniej jedno zero pochodnej tego wielomianu (rys. 6).

Więcej informacji na temat tej hipotezy, zwanej czasem hipotezą Iliewa lub Iliewa–Sendowa, można znaleźć np. w artykule M. Mardena [4].

Na zakończenie odnotujmy tylko, że jej słuszność sprawdzono, jak dotąd, dla wielomianów stopnia ≤ 5, oraz dla wielomianów wyższych stopni w kilku szczególnych przypadkach. Nie znaleziono również (także przy użyciu komputerów) żadnych kontrprzykładów. Tak więc problem ten pozostaje nadal nierozstrzygnięty.

Literatura

[1] M. Bryński, *Elementy teorii Galois*, Wydawnictwa „Alfa", Warszawa 1985.
[2] F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1976.
[3] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, American Math. Society, Providence 1966.
[4] M. Marden, *Conjectures on the critical points of a polynomial*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 267–276.
[5] L. A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1983.
[6] B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 1974.
[7] A. Turowicz, *Geometria zer wielomianów*, PWN, Warszawa 1967.