Najważniejsze pojęcia matematyki
- XI Szkoła Matematyki
Poglądowej, Miętne,
25-31.08.1993

O dobrych porządkach

Zofia ADAMOWICZ, Warszawa

Pojęcie dobrego porządku pochodzi od Georga Cantora, twórcy teorii mnogości. Teoria mnogości powstała w końcu XIX wieku i nie jest już dziedziną młodą. Niemniej jednak jej pojęcia rozwijały się bardzo powoli i napotykały ogromny opór środowiska matematyków. Także filozofowie, a nawet teologowie, kwestionowali wartość teorii mnogości. Nowoczesne ujęcie tej dziedziny pochodzi od von Neumanna i Gödla z lat dwudziestych naszego wieku. Ujęcie von Neumanna i Gödla jest proste, jasne i ścisłe, spotyka się jednak ono do dziś z niechęcią matematyków bądź filozofów matematyki.

Inaczej niż się robi zwykle przedstawię najpierw szkic współczesnego kształtu pojęć teorii mnogości, a potem pokażę historyczną drogę do nich.

Część pierwsza – wykład

Teoria mnogości jest teorią aksjomatyczną. Pojęciami pierwotnymi teorii mnogości jest pojęcie zbioru i należenia elementu do zbioru. Aksjomatyka powszechnie przyjmowana pochodzi od Zermelo i Fraenkla, lecz ostateczny kształt nadał jej von Neumann. Większość aksjomatów ma postać postulatów istnienia pewnych zbiorów. Są to aksjomaty typu „istnieje zbiór o danej własności" (np. istnieje zbiór pusty), albo typu „jeśli coś jest zbiorem, to coś innego też" (np. jeśli x, y są zbiorami, to istnieje zbiór $x \cup y$). Aksjomaty więc gwarantują, że pewne obiekty są zbiorami. Wyrosły one między innymi z obserwacji, że nie można przyjąć, iż cokolwiek, co sobie zdefiniujemy, tworzy zbiór – np. rodzina tych zbiorów x, że $x \notin x$ zbiorem nie jest (jak łatwo zauważyć) – „paradoks" Russela.

Liniowy porządek $<$ na zbiorze X nazywamy *dobrym porządkiem*, jeśli dowolny niepusty podzbiór A zbioru X ma w tym porządku element pierwszy.

Przykłady.

Są dobre:

1) Dowolny porządek liniowy na zbiorze skończonym,
2) Porządek liczb naturalnych,
3) Porządek $1 < 3 < 5 < \ldots < 2 < 4 < 6 \ldots$,
4) Porządek

$$\begin{array}{l} 2 < 4 < 8 < 16 \ldots < \\ 3 \cdot 2 < 3 \cdot 4 < 3 \cdot 8 < 3 \cdot 16 < \ldots \\ 5 \cdot 2 < 5 \cdot 4 < 5 \cdot 8 < 5 \cdot 16 < \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nie są dobre:

1) Porządek liczb całkowitych,
2) Porządek liczb wymiernych,
3) Porządek liczb rzeczywistych.

Z pojęciem dobrego porządku ściśle jest związane zagadnienie indukcji.

Jeśli $<$ jest dobrym porządkiem na X, a ϕ jest formułą, to prawdziwa jest następująca zasada indukcji:

$$\forall y \in X \ (\forall x < y \ \phi(x) \Rightarrow \phi(y)) \Rightarrow \forall x \in X \ \phi(x).$$

Istotnie załóżmy, że

$$\forall y \in X \ (\forall x < y \ \phi(x) \Rightarrow \phi(y))$$

i przypuśćmy, iż $\neg\phi(x)$ dla pewnego $x \in X$. Rozważmy zbiór

$$A = \{x \in X : \neg\phi(x)\}.$$

Ten zbiór jest więc niepusty. Z faktu, że $<$ jest dobrym porządkiem wynika, że A ma element pierwszy x_0. Wówczas jest prawdą, iż

$$\forall x < x_0\ \phi(x).$$

Na mocy naszego założenia mamy więc $\phi(x_0)$. Sprzeczność.

W 1908 roku E. Zermelo udowodnił następujące twierdzenie:

Każdy zbiór można dobrze uporządkować.

Z pojęciem dobrego porządku jest ściśle związane pojęcie liczby porządkowej – kluczowe pojęcie teorii mnogości Cantora.

Liczbą porządkową nazywamy zbiór dobrze uporządkowany przez relację należenia $\in$ i taki, że

$$x \in y \in X \Rightarrow x \in X.$$

Można zauważyć, że wówczas relacja $\subseteq$ jest odpowiednim dobrym porządkiem nieostrym na X – podczas gdy $\in$ jest porządkiem ostrym.

Definicja ta pochodzi od von Neumanna z 1928 roku.

Przykłady.

1) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = 4.$

   Mamy

   $\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$

   $0 \in 1 \in 2 \in 3,$

   $4 = \{0, 1, 2, 3\}.$

2) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots\} = \omega.$

3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots, \omega\} = \omega + 1.$

4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2 \ldots\} = \omega + \omega.$

W tym ujęciu liczba porządkowa nie jest „mistycznym bytem", jak zobaczymy, że bywało w innych ujęciach, lecz zbiorem, czyli obiektem teorii.

Kilka słów o intuicji

Intuicyjnie, tak jak dla Cantora, liczba porządkowa ma być „typem" dobrego porządku, czyli obiektem związanym z tym porządkiem, ale abstrahującym od konkretów – wspólnym dla wszystkich porządków z nim izomorficznych.

Mamy tu do czynienia z relacją równoważności – izomorfizmem porządków.

Matematyk w takim przypadku definiuje odpowiednie pojęcie dwojako:
bądź biorąc klasę obiektów równoważnych – np. pojęcie kierunku, wektora swobodnego itp. – bądź biorąc kanonicznego „reprezentanta" klasy, na przykład dla liczb całkowitych przystających mod m definiujemy resztę mod m jako najmniejszy nieujemny element tej klasy (możnaby zdefiniować resztę jako klasę liczb przystających $(\mathbb{Z}|m\mathbb{Z})$, ale byłoby to bardziej skomplikowane). Podobnie tu: można (i próbowano) definiować liczbę porządkową jako klasę izomorficznych dobrych porządków, ale prościej jest ją zdefiniować jako kanoniczny element tej klasy – taka też była idea Cantora, tylko nie potrafił jej do końca uściślić.

W powyższych przykładach mamy do czynienia z porządkami i liczbami porządkowymi przeliczalnymi.

Definiujemy

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \text{ jest przeliczalną lub skończoną liczbą porządkową}\},$$
$$\omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}.$$

Ogólnie

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\},$$
$$\lambda = \{\alpha : \alpha < \lambda\}$$

dla każdej liczby porządkowej.

Dalej

$$\omega_2 = \{\alpha : \alpha \text{ jest równoliczna z podzbiorem } \omega_1\},$$
$$\omega_{n+1} = \{\alpha : \alpha \text{ jest równoliczna z podzbiorem } \omega_n\},$$
$$\omega_\omega = \omega \cup \omega_1 \cup \omega_2 \cup \ldots$$

Możemy teraz zdefiniować pojęcie liczby kardynalnej: α jest *liczbą kardynalną*, jeśli jest najmniejszą taką liczbą porządkową β, że β jest równoliczne z α. Mamy wtedy

$$\alpha = \{\gamma : \gamma \text{ jest mocy mniejszej niż } \alpha\}.$$

Liczbami kardynalnymi są

$$4, \omega, \omega_1, \omega_2, \omega_\omega$$

nie są

$$\omega + 1, \omega + \omega, \omega_1 + 1.$$

Wobec twierdzenia Zermelo, każdy zbiór jest równoliczny z pewną liczbą porządkową, a więc i z pewną liczbą kardynalną.

Mocą zbioru X nazywamy liczbę kardynalną, z którą X jest równoliczny.

Dawniej liczby kardynalne nazywano „alefami". Liczbę ω_α definiowano jako „typ porządkowy" (bliżej nie określony rodzaj bytu), zaś $\aleph_\alpha$ jako moc zbioru $\{\beta : \beta < \omega_\alpha\}$ (uporządkowanego w typ ω_α).

Do niedawna w podręcznikach teorii mnogości niemal każdy dowód twierdzenia o liczbach kardynalnych zaczynał się od słów:
Weźmy liczbę kardynalną $\mathfrak{m}$. *Weźmy zbiór mocy* $\mathfrak{m}$. *Można go dobrze uporządkować w typ* ω_α. *Weźmy typ tego dobrego porządku,* ω_α. *Weźmy zbiór* $\{\beta : \beta < \omega_\alpha\}$.

Podczas gdy, tak jak teraz robimy, wystarczy powiedzieć „weźmy liczbę kardynalną $\mathfrak{m}$".

Co więcej, było tak jeszcze w latach sześćdziesiątych pomimo, że już w 1939 roku Gödel operował liczbami von Neumanna.

Podsumowując, mamy następujący obraz

$$\begin{array}{ccc}
\text{skala liczb kardynalnych} & & \text{zbiory} \\
0 & & \\
1 & & \\
2 & & \\
\vdots & & \\
\omega & & \\
\omega_1 & \longleftrightarrow & X \\
\omega_2 & \text{Twierdzenie Zermelo} & \\
\vdots & & \\
\omega_\omega & & \\
\omega_{\omega+1} & & \\
\vdots & &
\end{array}$$

Podwójna strzałka oznacza tu przyporządkowanie zbiorowi X jego mocy, a można to zrobić poprzez twierdzenie Zermelo. Gdyby nie zakładać pewnika wyboru, to wówczas liczby ω_α, czyli dawne alefy, byłyby mocami zbiorów, które mogą być dobrze uporządkowane.

Część druga – historia

Historię teorii mnogości można więc zacząć od pracy Cantora z 1874 roku, w której dowodzi on, że są co najmniej dwie moce nieskończone. Dowodzi mianowicie, że

$$\mathbb{R} \text{ nie jest równoliczne z } \mathbb{N}.$$

Cantor stawia sobie pytanie – czy istnieją inne moce? Czy są takie wśród mocy podzbiorów prostej?

Stawia hipotezę (1878), że nie ma – jest to sławna *Hipoteza Continuum.*

Od 1874 próbuje udowodnić swą hipotezę. Chęć udowodnienia tej hipotezy była jego główną siłą twórczą. Podchodził do problemu z dwóch stron:

– bezpośrednio – badał zbiory liczb rzeczywistych i ich moce,

– pośrednio – badał jakie w ogóle moce mogą istnieć.

Oba podejścia prowadziły Cantora do pojęcia liczby porządkowej.

Podejście bezpośrednie

Jeszcze w 1872 roku Cantor badał pochodne zbiorów na prostej. Robił to w związku z problemem jednoznaczności rozwinięć trygonometrycznych. Z tejże pracy pochodzi też sławna konstrukcja liczb rzeczywistych „metodą Cantora" – jako ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych.

Jeśli $P \subseteq \mathbb{R}$, to przez P' będziemy oznaczać zbiór punktów skupienia zbioru P.

Przypomnijmy tu twierdzenie Bolzano–Weierstrassa – jeśli P jest nieskończony, domknięty i ograniczony, to $P' \neq \emptyset$.

Operację $'$ możemy iterować. Jak wiele razy? Cantor pisał:

$$P^{(n+1)} = (P^{(n)})',$$

$$P^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)},$$

$$P^{\infty+1} = (P^{\infty})'$$

itd. Cantor rozważał też zbiory

$$P^{\infty^2}, P^{(n_0^{\infty^{\nu}} + n_1^{\infty^{\nu+1}} + \ldots + n_{\nu})}, P^{(\infty^{\infty})},$$

gdzie $\nu, n_0, \ldots, n_{\nu} \in \mathbb{N}$.

W 1880 roku Cantor zauważył: na wskaźnikach można wykonywać operacje jak na liczbach – powinny więc to być liczby!

Napisał też: przydałaby się klasyfikacja wskaźników – trzeba tu zrobić porządek.

W ten sposób rodziło się pojęcie liczby porządkowej. Poniekąd więc liczby porządkowe zawdzięczają swe istnienie potrzebom natury graficznej.

To podejście do hipotezy continuum zaowocowało twierdzeniem Cantora–Bendixona z 1884 roku:

Jeśli P jest domknięty i nieprzeliczalny, to P ma moc continuum (ma podzbiór doskonały).

Używając terminologii liczb porządkowych można stwierdzić:

Dla dowolnego zbioru P istnieje taka $\alpha < \omega_1$, że dla $\beta > \alpha$, $P^{(\beta)} = P^{(\alpha)}$. Jeśli P jest domknięty i nieprzeliczalny, to wówczas $P^{(\alpha)}$ jest zbiorem doskonałym.

Dalej, powyższe rozważania w rękach Hausdorffa i Frecheta zaowocowały jako topologia prostej, a potem topologia ogólna. Można powiedzieć, że liczby porządkowe okazały się (wbrew ich poprzednikom) wbudowane w topologię $\mathbb{R}$.

Podejście pośrednie

To podejście polegało na badaniu pojęć dotyczących nieskończoności odkrytych przez Cantora i na poszukiwaniu skali nieskończoności. Kluczowe było tu pojęcie liczby porządkowej. Cantor wprowadził je w 1883 roku. Okazało się ono centralnym pojęciem jego teorii mnogości i teorii mocy zbiorów. Teoria mnogości Cantora była rewolucją dla matematyków i filozofów. To inspirowało Cantora do poszukiwania filozoficznego sensu i uzasadnienia wprowadzanych pojęć. Cantorowi przyświecały trzy zasady filozoficzne:

a) każdej potencjalnej nieskończoności odpowiada pewna nieskończoność aktualna – pozaskończoność;

b) pozaskończoność jest tej samej natury co skończoność i powinna być w miarę możności tak samo traktowana (zasada finitarności);
c) nieskończoność absolutna nie może być matematycznie zdeterminowana – jest domeną Boga.

W swoich badaniach dotyczących nieskończoności Cantor kierował się dwoma intuicjami matematycznymi:

ideą liczenia,
ideą opierania pojęć na pojęciu zbioru.

W 1883 roku, gdy pierwszy raz zostaje wprowadzone pojęcie liczby porządkowej, jest ono wprowadzone za pomocą następujących reguł tworzenia liczb porządkowych:
1) jeśli α jest liczbą porządkową (skończoną lub pozaskończoną), to możemy utworzyć nową liczbę porządkową $\alpha + 1$;
2) jeśli dany jest „niekończący się" ciąg liczb porządkowych, to możemy utworzyć nową liczbę porządkową, która jest jego granicą (to znaczy najmniejszą liczbą ograniczającą ten ciąg).

Cantor chciał by jego nowe obiekty traktowane były jak liczby i, jednocześnie, by były związane z pojęciem zbioru.

Cantor chce przywiązać do liczby porządkowej zbiór. Wprowadza pojęcie zbioru dobrze uporządkowanego, jako zbioru M z relacją $<$ takiego, że
1) $<$ porządkuje M liniowo,
2) M ma pierwszy element m_0,
3) jeśli $N \subseteq M$ i N jest w M ograniczony, to jest najmniejszy element w $M \subseteq N$ większy od elementów zbioru N.

Powyższa definicja zbioru dobrze uporządkowanego jest dość zawiła i robi wrażenie definicji od tyłu. Zamiast powiedzieć, tak jak się dziś mówi, że zbiór jest dobrze uporządkowany, jeśli każdy jego niepusty podzbiór ma element pierwszy, Cantor żąda, żeby dopełnienie (w sensie zbioru elementów przewyższających dany zbiór) każdego (ograniczonego) podzbioru miało element pierwszy. Widać wyraźnie, że definicja Cantora jest inspirowana jego zasadami tworzenia liczb porządkowych – od nich Cantor doszedł do pojęcia dobrego porządku.

Z drugiej strony, liczba porządkowa dla Cantora odpowiada intuicji liczenia zbioru.

Już Cantor wiązał z liczbą porządkową α zbiór

$$\{\beta : \beta \text{ jest liczbą porządkową } < \alpha\}.$$

Jeśli chodzi o liczbę kardynalną, to rozpowszechniona potem idea Frege'go, że można ją utożsamiać z klasą zbiorów równolicznych, nie była ideą Cantora. Cantor widział ją, podobnie jak von Neumann i jak to się dziś ujmuje, jako kanonicznego „reprezentanta" tej klasy, mianowicie jako zbiór liczb porządkowych, którymi „liczymy" dany zbiór. Nawiązać tu możemy do zasady finitarności b) Cantora.

Cantor sformułował następujący postulat:

każdy zbiór może być dobrze uporządkowany – „policzony".

Odtąd w rozwoju teorii mnogości można wyodrębnić dwa wątki – ewolucję pojęcia liczby porządkowej i liczby kardynalnej oraz ewolucję dowodów powyższego postulatu.

Wątek pierwszy

Cantor zdefiniował skalę alefów następująco:

moc pierwsza – moc zbioru liczb naturalnych – $\aleph_1$ (potem przemianowany na $\aleph_0$), moc druga – moc zbioru tych α, że zbiór liczb $\beta < \alpha$ jest mocy pierwszej – moc $\aleph_2$ (potem $\aleph_1$),

$\aleph_\alpha$ – najmniejsza moc zbioru dobrze uporządkowanego większa niż $\aleph_\gamma$ dla $\gamma < \alpha$.

Od Cantora pochodzi też definicja zbioru, który nazywamy zbiorem Hartogsa:

$Z(\aleph_\alpha)$ – zbiór liczb porządkowych, dla których odpowiednie zbiory liczb mniejszych są mocy co najwyżej $\aleph_\alpha$.

ω_α została zdefiniowana jako najmniejszy element zbioru $Z(\aleph_\alpha)$.

Według Cantora, aby „policzyć" zbiór X, to znaczy, aby przyporządkować jego elementowi x liczbę porządkową, najpierw zbiera się razem wszystkie liczby porządkowe przyporządkowane poprzednim elementom, potem liczy się typ tej kolekcji, a potem ten typ przyporządkowuje się x-owi („liczenie").

Tak właśnie Cantor widział dowód, że każdy zbiór można dobrze uporządkować. W tej metodzie ukryta jest iteracja przyporządkowywania liczb porządkowych elementom zbioru. Można powyższe rozumowanie uściślić i wówczas trzeba użyć zasady definiowania przez indukcję pozaskończoną.

Zasadniczą zmianą, którą zrobił von Neumann w swoim ujęciu liczb porządkowych, jest pozbycie się kroku pośredniego z rozumowania Cantora – uznanie go za zbędny.

Wątek drugi

W 1904 roku E. Zermelo sformułował *aksjomat wyboru* i z jego pomocą udowodnił twierdzenie

każdy zbiór może być dobrze uporządkowany.

Metoda Zermelo jest inna niż metoda „liczenia" Cantora. Cantor musiał wielokrotnie „wybierać" ze swego zbioru element x – taki, który jeszcze nie został „policzony". Metoda Zermelo polega na jednokrotnym dokonaniu wyboru po jednym elemencie ze wszystkich podzbiorów X, a potem na użyciu tej selekcji do uporządkowania X. Dowód Zermelo jest dziś najpopularniejszym dowodem powyższego twierdzenia.

Dowód Zermelo został jednak zakwestionowany przez współczesnych matematyków, między innymi przez Hessenberga i Bernsteina. Zakwestionowano podstawy, na których jest on oparty – niejasność użytych pojęć np. pojęcia funkcji oraz użytych środków, np. wybierania podzbiorów ze zbiorów składających się z elementów o określonej własności. W roku 1908 Zermelo uściślił swój dowód. Oparł pojęcie funkcji na pojęciu zbioru – potraktował ją jako zbiór par. Z kolei pozostawało niejasne czym jest para. Pojęcie pary uporządkowanej dwóch obiektów przeszło ciekawą ewolucję – kilku matematyków podało różne definicje. Ostatecznie przyjęła się definicja Kuratowskiego. Także, na potrzeby swego dowodu Zermelo sformułował aksjomatykę, zawierającą między innymi aksjomat pozwalający wybierać ze zbiorów podzbiory wyróżnione jako zbiory elementów mających daną własność. A więc pierwsze aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości wyrosło z dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.

Inny dowód twierdzenia Zermelo podał w roku 1921 Kuratowski. Użył w nim zasady, którą dziś nazywa się *lematem Kuratowskiego-Zorna.*

Zarówno podejście Zermelo jak i Kuratowskiego ma na celu eliminację zasady pozaskończonej indukcji oraz pojęcia liczb porządkowych z prób Cantora. Można stwierdzić, że było to „niekantorowskie" podejście do teorii mnogości. Dla Cantora liczby porządkowe i stojąca za nimi idea liczenia były trzonem całej teorii. Do podejścia kantorowskiego wrócił von Neumann w 1923.