Wybrane własności bazy Hamela (II)

Józef BANAŚ, Krzysztof FRĄCZEK
i Leszek OLSZOWY, Rzeszów

Niniejszy artykuł stanowi bezpośrednią kontynuację rozważań przedstawionych w artykule [1], które to dotyczyły głównie stosunkowo prostych własności bazy Hamela. Aby uniknąć zbyt częstego odsyłania Czytelnika do wspomnianego artykułu [1], przypomnimy niektóre z wprowadzonych tam oznaczeń i definicji, dopasowując je jednocześnie do tematyki tutaj poruszanej.

Przyjmiemy najpierw następujące oznaczenie:
Jeżeli $\mathbf{V}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbf{K}$, to dowolnie ustaloną bazę tej przestrzeni oznaczać będziemy symbolem $H(\mathbf{V},\mathbf{K})$.
Dalej, niech $\mathbf{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbf{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbf{A}$ zaś – zbiór liczb algebraicznych. Oczywiście $\mathbf{R}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbf{Q}$ i bazę $H(\mathbf{R},\mathbf{Q})$ tej przestrzeni będziemy nazywać bazą Hamela.

Przypomnijmy, że liczbę a nazywamy *liczbą algebraiczną*, jeżeli istnieje niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych, którego jednym z pierwiastków jest liczba a. Najmniejszy ze stopni takich wielomianów nazywamy *stopniem liczby* a.

I tak, dla przykładu, każda liczba wymierna jest liczbą algebraiczną stopnia 1 liczby zaś $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ (nie będące wymiernymi) są liczbami algebraicznymi stopnia 2. Można wykazać ([3]), że gdy p jest liczbą pierwszą, to $\sqrt[n]{p}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n.

Warto również przypomnieć, że zbiór liczb algebraicznych $\mathbf{A}$ tworzy ciało ([3]). Stąd już łatwo wywnioskować, że $\mathbf{R}$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A}$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbf{Q}$.

Zbadaniem niektórych własności baz $H(\mathbf{R},\mathbf{A})$ i $H(\mathbf{A},\mathbf{Q})$ tych przestrzeni zajmiemy się nieco później, natomiast teraz podamy przykłady przeliczalnych zbiorów liniowo niezależnych w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$. Oczywiście zbiory te można poszerzyć otrzymując bazę Hamela $H(\mathbf{R},\mathbf{Q})$.

Intuicja sugeruje, że poszerzając przeliczalny zbiór liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$ do bazy Hamela można oczekiwać, że niektóre własności tej bazy powinny być zbliżone do własności tego zbioru.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy zbiór liczb algebraicznych postaci

$$P=\left\{\sqrt{2},\sqrt[4]{2},\sqrt[8]{2},\dots\right\}=\left\{\sqrt[2^n]{2}:n\in\mathbf{N}\right\}.$$

Oczywiście jest to zbiór przeliczalny. Pokażemy, że jest on liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$.

Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że dla pewnego $n\in\mathbf{N}$ ciąg $\sqrt{2},\sqrt[4]{2},\dots,\sqrt[2^n]{2}$ jest liniowo zależny. Oznacza to, że istnieją liczby wymierne $w_1,w_2,\dots,w_n$ nie wszystkie równe 0 i takie, że

$$w_1\sqrt{2}+w_2\sqrt[4]{2}+\ldots+w_n\sqrt[2^n]{2}=0.$$

Bez straty ogólności możemy założyć (dlaczego ?), że $w_1\neq 0$.

Napiszmy dalej

$$w_1\sqrt{2}=-\left(w_2\sqrt[4]{2}+w_3\sqrt[8]{2}+\ldots+w_n\sqrt[2^n]{2}\right).$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, dostaniemy

$$2w_1^2=\left[w_2\left(\sqrt[2^n]{2}\right)^{2^{n-2}}+w_3\left(\sqrt[2^n]{2}\right)^{2^{n-3}}+\ldots+w_n\left(\sqrt[2^n]{2}\right)^{1}\right]^2.$$

Zauważmy teraz, że po przeniesieniu na jedną stronę otrzymamy wielomian od liczby $\sqrt[2^n]{2}$ stopnia 2^{n-1}. Oznaczałoby to, że liczba $\sqrt[2^n]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia $\leq 2^{n-1}$, a więc mniejszego niż 2^n.

Ale, jak wyżej wspomnieliśmy, liczba ta ma stopień 2^n. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

PRZYKŁAD 2. Niech $p_1, p_2, p_3, \ldots$ oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych tzn. $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Pokażemy, że zbiór

$$S = \{\sqrt{p_n} : n \in \mathbf{N}\}$$

jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$.

W przedstawionym przez nas dowodzie będziemy musieli użyć nieco mocniejszych środków niż w Przykładzie 1. Mianowicie skorzystamy z pewnych faktów, które Czytelnik może znaleźć np. w książce [2].

Wprowadźmy najpierw następujące oznaczenie

$$T_n = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Innymi słowy T_n oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dalej, dla $t \in T_n$ oraz $t \neq \emptyset$, oznaczmy

$$x_t = \prod_{i \in t} \sqrt{p_i}$$

oraz przyjmijmy, że $x_t = 1$, jeżeli $t = \emptyset$.

Przypomnimy teraz pewne fakty z algebry, które później będziemy wykorzystywać. Załóżmy, że $\mathbf{L}$ jest ciałem, $\mathbf{K}$ jest jego podciałem. Mówimy wtedy, że ciało $\mathbf{L}$ jest *rozszerzeniem ciała* $\mathbf{K}$. Jeżeli $\mathbf{P}$ jest pierścieniem to symbol $\mathbf{P}[x]$ oznaczać będzie zbiór wszystkich wielomianów (jednej zmiennej) o współczynnikach z $\mathbf{P}$. Można wykazać, że $\mathbf{P}[x]$ jest pierścieniem ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia wielomianów. Podobnie, zbiór wszystkich wielomianów n zmiennych o współczynnikach z $\mathbf{P}$ oznaczać będziemy symbolem $\mathbf{P}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Zbiór ten, podobnie jak $\mathbf{P}[x]$, jest również pierścieniem.

Załóżmy dalej, że $\mathbf{L}$ jest rozszerzeniem ciała $\mathbf{K}$. Będziemy mówić, że *element a ciała* $\mathbf{L}$ *jest algebraiczny nad ciałem* $\mathbf{K}$, jeżeli istnieje taki niezerowy wielomian $f \in \mathbf{K}[x]$, że $f(a) = 0$.

Wprowadźmy dalej następujące oznaczenia:

Jeżeli $\mathbf{L}$ jest rozszerzeniem ciała $\mathbf{K}$ oraz $a \in \mathbf{L}$ (a nie musi być algebraiczny nad $\mathbf{K}$), to symbolem $\mathbf{K}(a)$ oznaczać będziemy najmniejsze ciało zawierające $\mathbf{K}$ oraz element a, zaś symbol $\mathbf{K}[a]$ oznaczał będzie najmniejszy podpierścień ciała $\mathbf{L}$ zawierający $\mathbf{K}$ oraz a.

Podobnie, jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{L}$ to symbol $\mathbf{K}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oznaczać będzie najmniejsze podciało ciała $\mathbf{L}$ zawierające $\mathbf{K}$ oraz elementy $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Można wykazać, że

$$\mathbf{K}[a] = \{f(a) : f \in \mathbf{K}[x]\}$$

oraz

$$\mathbf{K}(a) = \left\{\frac{f(a)}{g(a)} : f, g \in \mathbf{K}[x],\ g(a) \neq 0\right\}.$$

W dalszym ciągu korzystać będziemy z następującego lematu (zob. [2], str. 218).

Lemat 1. *Załóżmy, że ciało* $\mathbf{L}$ *jest rozszerzeniem ciała* $\mathbf{K}$ *oraz element* $a \in \mathbf{L}$ *jest algebraiczny nad ciałem* $\mathbf{K}$. *Wtedy* $\mathbf{K}[a]$ *jest ciałem oraz* $\mathbf{K}[a] = \mathbf{K}(a)$.

Można również wykazać, że w sytuacji rozważanej w powyższym lemacie istnieje liczba naturalna n (zwana *stopniem elementu a względem ciała* $\mathbf{K}$) taka, że $\mathbf{K}(a)$ jest zbiorem elementów postaci $b_0 + b_1 a + \ldots + b_{n-1} a^{n-1}$, gdzie $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbf{K}$. Pokazuje się także, że gdy elementy $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{L}$ są algebraiczne względem ciała $\mathbf{K}$, to

$$\mathbf{K}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{g(a_1, a_2, \ldots, a_n) : g \in \mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]\}.$$

Przyjmijmy dalej $\mathbf{L} = \mathbf{R}$, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $a = \sqrt{p_1} = \sqrt{2}$. Wtedy, korzystając z Lematu 1, mamy:

$$\mathbf{Q}\left(\sqrt{p_1}\right) = \mathbf{Q}\left[\sqrt{p_1}\right] = \{b_1 + b_2\sqrt{p_1} : b_1, b_2 \in \mathbf{Q}\} = \\ = \Big\{\sum_{t \in T_1} a_t x_t : a_t \in \mathbf{Q},\ t \in T_1\Big\}.$$

Biorąc dalej $\mathbf{L} = \mathbf{R}$, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1})$, $a = \sqrt{p_2}$, dostajemy:

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}) = (\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}))\,(\sqrt{p_2}) = (\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}))\,[\sqrt{p_2}] = (\mathbf{Q}[\sqrt{p_1}])\,[\sqrt{p_2}] = \\ = \Big\{b_1 + b_2\sqrt{p_1} + b_3\sqrt{p_2} + b_4\sqrt{p_1p_2} : b_i \in \mathbf{Q} \text{ dla } i = 1,2,3,4\Big\} = \\ = \Big\{\sum_{t \in T_2} a_t x_t : a_t \in \mathbf{Q}\Big\}.$$

Postępując podobnie można za pomocą zasady indukcji matematycznej udowodnić następujący lemat.

Lemat 2. $\{\sum_{t \in T_n} a_t x_t : a_t \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{Q}\left(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\right)$ *dla dowolnego* $n \in \mathbf{N}$.

Oznacza to w szczególności, że zbiór $\{\sum_{t \in T_n} a_t x_t : a_t \in \mathbf{Q}\}$ jest ciałem.

Podstawowy fakt, którym posłużymy się w dalszym ciągu, zawarty jest w kolejnym lemacie.

Lemat 3. *Dla każdego* $n \in \mathbf{N}$ *spełnione są następujące dwa warunki:*
(i) *zbiór* $\{x_t : t \in T_n\}$ *jest liniowo niezależny nad* $\mathbf{Q}$,
(ii) *jeżeli w sumie* $\sum_{t \in T_n} a_t x_t$ *co najmniej dwie z liczb* $a_t \in \mathbf{Q}$ *są różne od zera, to*

$$\Big(\sum_{t \in T_n} a_t x_t\Big)^2 \notin \mathbf{Q}.$$

Dowód: Niech $n = 1$. Gdyby warunek (i) nie był spełniony, to istniałyby liczby wymierne b_1, b_2 różne od zera i takie, że $b_1 + b_2\sqrt{p_1} = 0$. Stąd $\sqrt{p_1} = -\frac{b_1}{b_2}$ i sprzeczność.
Podobnie, zakładając, że warunek (ii) nie jest spełniony, wnioskujemy o istnieniu niezerowych liczb wymiernych a_0, a_1 takich, że $(a_0 + a_1\sqrt{p_1})^2 = w \in \mathbf{Q}$. Stąd

$$\sqrt{p_1} = \frac{w - a_0^2 - a_1^2 p_1}{2a_0a_1},$$

co daje sprzeczność z niewymiernością liczby $\sqrt{p_1}$.

Załóżmy dalej, że warunki (i) oraz (ii) są spełnione dla ustalonej dowolnie liczby naturalnej n.
Wykażemy ich prawdziwość dla liczby $n+1$.
Załóżmy najpierw, że warunek (i) nie jest spełniony. Wtedy istnieją liczby $a_t \in \mathbf{Q}$ $(t \in T_{n+1})$ nie wszystkie równe zero i takie, że $\sum_{t \in T_{n+1}} a_t x_t = 0$. Mamy dalej

$$0 = \sum_{t \in T_{n+1}} a_t x_t = \sum_{t \in T_n} a_t x_t + \sqrt{p_{n+1}} \sum_{t \in T_n} a'_t x_t, \tag{1}$$

gdzie $a'_t = a_{t \cup \{n+1\}}$.
Zauważmy, że liczby $\sum_{t \in T_n} a_t x_t$ i $\sum_{t \in T_n} a'_t x_t$ są obie różne od zera, bowiem w przeciwnym razie obie byłyby równe zero, a wtedy, na mocy (i) i założenia indukcyjnego, wszystkie a_t oraz a'_t byłyby równe zero. Sprzeczność.

Teraz, obliczając $\sqrt{p_{n+1}}$ z równania (1) i stosując Lemat 2 wnioskujemy, że istnieją liczby $b_t \in \mathbf{Q}$ $(t \in T_n)$ takie, że

$$\sqrt{p_{n+1}} = -\frac{\sum_{t \in T_n} a_t x_t}{\sum_{t \in T_n} a'_t x_t} = \sum_{t \in T_n} b_t x_t.$$

Stąd otrzymujemy, że przynajmniej dwie liczby b_t są różne od zera. Zatem, na mocy (ii) i założenia indukcyjnego wnioskujemy, że liczba $p_{n+1} = \left(\sum_{t\in T_n} b_t x_t\right)^2$ jest niewymierna. Otrzymana sprzeczność kończy dowód warunku (i).

Aby wykazać, że warunek (ii) jest spełniony dla $n+1$ zastosujemy metodę dowodu niewprost. Przypuśćmy więc, że wśród liczb $a_t \in \mathbf{Q}$ $(t \in T_{n+1})$ przynajmniej dwie są różne od zera, a ponadto $\left(\sum_{t\in T_{n+1}} a_t x_t\right)^2 = w \in \mathbf{Q}$.

Napiszmy

$$w = \Big(\sum_{t\in T_{n+1}} a_t x_t\Big)^2 = \Big(\sum_{t\in T_n} a_t x_t + \sqrt{p_{n+1}}\sum_{t\in T_n} a'_t x_t\Big)^2.$$

Zauważmy, że obie sumy w ostatnim nawiasie są różne od zera, gdyż w przeciwnym razie po zastosowaniu warunku (i) dla liczby n otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkiem (ii) dla n.

Dalej, obliczając $\sqrt{p_{n+1}}$ dostajemy:

$$\sqrt{p_{n+1}} = \frac{w - \left(\sum_{t\in T_n} a_t x_t\right)^2 - p_{n+1}\left(\sum_{t\in T_n} a'_t x_t\right)^2}{2\left(\sum_{t\in T_n} a_t x_t\right)\cdot\left(\sum_{t\in T_n} a'_t x_t\right)}.$$

Stąd i z Lematu 2 wnioskujemy, że istnieją liczby $b_t \in \mathbf{Q}$ $(t \in T_n)$ takie, że

$$\sqrt{p_{n+1}} = \sum_{t\in T_n} b_t x_t.$$

Ponieważ przynajmniej dwie z liczb b_t muszą być różne od zera, więc na mocy warunku (ii) oraz założenia indukcyjnego dostajemy, że

$$\Big(\sum_{t\in T_n} b_t x_t\Big)^2 = p_{n+1} \notin \mathbf{Q}.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód Lematu 3.

Zauważmy teraz, że

$$\{\sqrt{p_k} : k = 1,2,\ldots,n\} \subset \{x_t : t \in T_n\},$$

a zatem liniowa niezależność zbioru $S = \{\sqrt{p_n} : n \in \mathbf{N}\}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$ jest konsekwencją warunku (i) oraz Lematu 3.

Odnotujmy także to, że dowodząc Lematu 3 wykazaliśmy nieco więcej niż liniową niezależność zbioru S. Mianowicie wykazaliśmy, że zbiór $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x_t : t \in T_n\}$ jest również liniowo niezależny nad ciałem $\mathbf{Q}$.

Wróćmy teraz do opisania dalszych własności zbioru liczb algebraicznych $\mathbf{A}$.

Jak już wcześniej wspominaliśmy, zbiór $\mathbf{A}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbf{Q}$. Weźmy zatem dowolną bazę $H(\mathbf{A},\mathbf{Q})$ tej przestrzeni. Niech P oznacza zbiór rozważany w Przykładzie 1. Ponieważ $P \subset \mathbf{A}$ i zbiór P jest liniowo niezależny nad ciałem $\mathbf{Q}$, więc poszerzając zbiór P do jakiejś bazy $H(\mathbf{A},\mathbf{Q})$ wnioskujemy, że $H(\mathbf{A},\mathbf{Q})$ jest zbiorem nieskończonym. Ponieważ jednak $\mathbf{A}$ jest przeliczalny, dostajemy ostatecznie następującą własność rozważanej bazy.

Wł. 1. Każda baza $H(\mathbf{A},\mathbf{Q})$ jest zbiorem przeliczalnym.

Ponadto otrzymujemy dalej następującą, nietrudną do wykazania własność bazy $H(\mathbf{R},\mathbf{A})$.

Wł. 2. Baza $H(\mathbf{R},\mathbf{A})$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Własności tej dowodzi się analogicznie jak Wł. 1 z artykułu [1].

Wł. 3. Zbiór $H(\mathbf{R},\mathbf{A})$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$.

Dowód: Przypuśćmy, że zbiór $H(\mathbf{R},\mathbf{A})$ jest liniowo zależny nad $\mathbf{Q}$. Wtedy istnieją $h_1, h_2, \ldots; h_n \in H(\mathbf{R},\mathbf{A})$ oraz liczby wymierne $w_1, w_2, \ldots, w_n$ nie wszystkie równe zero i takie, że

$$w_1h_1 + w_2h_2 + \ldots + w_nh_n = 0.$$

Ponieważ liczby $w_1, w_2, \dots, w_n$ są algebraiczne, więc ostatnia równość oznacza, że zbiór $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ jest liniowo zależny w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$. Jest to sprzeczne z tym, że $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$. Koniec dowodu.

Wł. 4. Zbiór $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ nie generuje przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$.

Dowód: Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ generuje przestrzeń $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$. Stąd oraz z Wł. 3 mielibyśmy, że $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ jest bazą w tej przestrzeni, a więc bazą Hamela. Weźmy teraz $h \in H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ takie, że $h \notin \mathbf{Q}$. Niech np. h będzie liczbą przestępną. Wtedy, jak łatwo wykazać, liczba $x = \sqrt{2}h$ jest też przestępna (wynika to z faktu, że $\mathbf{A}$ tworzy ciało).
Teraz zauważmy, że na mocy przypuszczenia, że $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ jest bazą Hamela wnioskujemy, że istnieją liczby wymierne $w_1, w_2, \dots, w_n$ oraz $h_1, h_2, \dots, h_n \in H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ takie, że

$$x = \sqrt{2}h = w_1 h_1 + w_2 h_2 + \ldots + w_n h_n.$$

Stąd

$$h = \frac{w_1}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{w_2}{\sqrt{2}} h_2 + \ldots + \frac{w_n}{\sqrt{2}} h_n.$$

Ale $\frac{w_i}{\sqrt{2}} \in \mathbf{A}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, więc stąd mamy, że h ma dwa różne przedstawienia za pomocą bazy $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód i pozwala sformułować następującą własność.

Wł. 5. Żadna baza $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$ nie jest bazą Hamela.

Następna własność bazy $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ jest analogiczna do własności bazy Hamela pokazanej w [1] (por. Wł. 3 tamże).

Wł. 6. Każda baza $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$ może zawierać co najwyżej jedną liczbę algebraiczną.

Dowód: Przypuśćmy, że $h_t, h_s \in H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$, $h_t \neq h_s$ oraz $h_t, h_s \in \mathbf{A}$. Weźmy liczbę rzeczywistą $x = h_t$. Wtedy

$$x = 1 \cdot h_t \quad \text{oraz} \quad x = \frac{h_t}{h_s} \cdot h_s.$$

Ale $\frac{h_t}{h_s} \in \mathbf{A}$ (bo $\mathbf{A}$ jest ciałem), więc liczba x miałaby dwa różne przedstawienia za pomocą bazy $H(\mathbf{R}, \mathbf{A})$. Sprzeczność i koniec dowodu.

Ostatnią własnością bazy Hamela, którą tutaj przedstawimy, jest następująca własność.

Wł. 7. Każda baza Hamela $H = H(\mathbf{R}, \mathbf{Q})$ jest zbiorem liniowo zależnym w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$.

Dowód: Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że istnieje baza Hamela H, która jest zbiorem liniowo niezależnym w przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$.
Ponieważ H generuje $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$, więc H generuje też $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$. Zatem H jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$.

Zgodnie z Wł. 4 zbiór H nie może generować przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zauważmy na koniec, że bazy Hamela skonstruowane za pomocą zbiorów opisanych w Przykładach 1 i 2 zawierają przeliczalną ilość liczb algebraicznych. Zatem, zgodnie z Wł. 6, nie mogą to być bazy przestrzeni $\mathbf{R}$ nad ciałem $\mathbf{A}$.

W świetle Wł. 7 okazuje się ponadto, że każda inna baza Hamela też ma tę cechę.

Prace cytowane:

1. J. Banaś, K. Frączek, L. Olszowy, *Wybrane własności bazy Hamela, I*, MSN 11, 1993.
2. A. Białynicki-Birula, *Algebra*, PWN, Warszawa 1971.
3. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1972.