

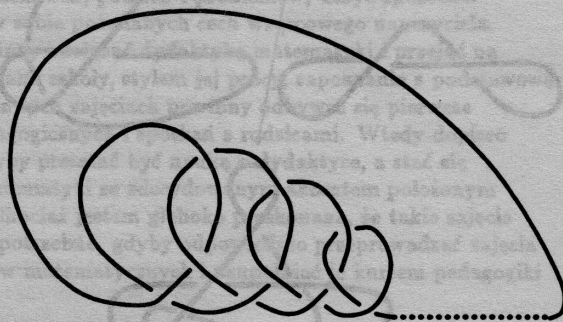
Od węzłów do warkoczy: pierwszy krok

Paweł TRACZYK, Warszawa

Teoria węzłów jako wyraźnie zdefiniowana odrębna dziedzina matematyki istnieje od około stu lat. W 1984 roku miało miejsce wydarzenie, które nią wstrząsnęło i pchnęło ją na nowe tory: V.F.R. Jones odkrył niezmiennik, który nazwał skromnie V , a który znany jest powszechnie jako wielomian Jonesa. Podstawową rolę w tym przewrocie odegrały tzw. warkocze. Dlatego właśnie one są głównym przedmiotem tych rozważań. Chodzi więc o to, żeby krótko opisać podstawowe pojęcia teorii węzłów i przedstawić szczególną rolę, jaką w niej odgrywają wspomniane warkocze.

Teoria węzłów jest rzadkim przykładem dziedziny matematycznej, która jest współcześnie bardzo modna i intensywnie rozwijana, a jednocześnie ma tę cechę, że jej podstawowe pojęcia są dostępne codziennemu doświadczeniu każdego z nas. Zajmuje się ona otóż węzłami, czyli włościami okręgu w R^3 . Dlaczego akurat okręgu? Przecież to, co zwykle nazywamy węzłem, ma na ogół wolne końce. Istnieje poważny powód, żeby w matematycznej teorii węzłów narzucić takie właśnie ograniczenie. Otóż głównym problemem teorii węzłów jest zagadnienie klasyfikacji – chodzi o stwierdzenie, kiedy dwa węzły są w gruncie rzeczy takie same, chociaż mogą na oko bardzo różnie wyglądać. Cóż to znaczy w gruncie rzeczy takie same? Znaczący to, że istnieje możliwość przerobienia jednego węzła na drugi za pomocą deformacji, czyli z rościąganiem, zwiężaniem itd., ale bez rozcinania. Łatwo sobie uzmysłowić, że wolne końce dają zawsze możliwość rozwiązania węzła. Zatem przy wolnych końcach każde dwa węzły byłyby równoważne. Stąd postulat aby końce były po prostu połączone. Oczywiście w rzeczywistości fizycznej mogą być różne inne powody utrudniające rozwiązanie węzła zawiązanego na sznurze o wolnych końcach. Może warto zwrócić uwagę na pewien pomysł, który może się w pierwszej chwili wydawać równie dobrym ograniczeniem jak połączenie końców: założymy, że końce są wprawdzie położone osobno, ale unieruchomione. Przy tym podchodzimy do tego unieruchomienia w sposób matematyczny, tzn. nie chodzi tu o to, że końce sznura są do czegoś przymocowane – bo to jest z grubsza biorąc to samo co założenie, że są po prostu połączone – tylko o swego rodzaju diabelską umowę: końce są gdzieś położone w przestrzeni trójwymiarowej, ale my ich nie będziemy ruszać. Jakie są skutki takiej umowy? Otóż okazuje się, że zupełnie śadne – w dalszym ciągu wszystko daje się rozwiązać. Twierdzenie to, bardzo sresztą proste, jest znane w literaturze jako twierdzenie o szarówce (dociekliwości Czytelnika pozostawiamy zarówno wyjaśnienie nazwy jak i dowód samego faktu; wskazówka: chodzi o szarówkę, która swiża z sufitu na spleątym drucie).

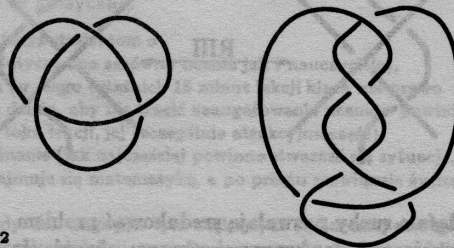
Odnotujmy dla porządku pewne ograniczenie, które jest niezbędne z punktu widzenia matematycznej precyzji: tak naprawdę, to rozpatrujemy węzły, które są kawałkami liniowe, czyli po prostu zamknięte łamane w R^3 . Chodzi tu o uniknięcie patologii przedstawionej na rysunku 1.



Rys. 1

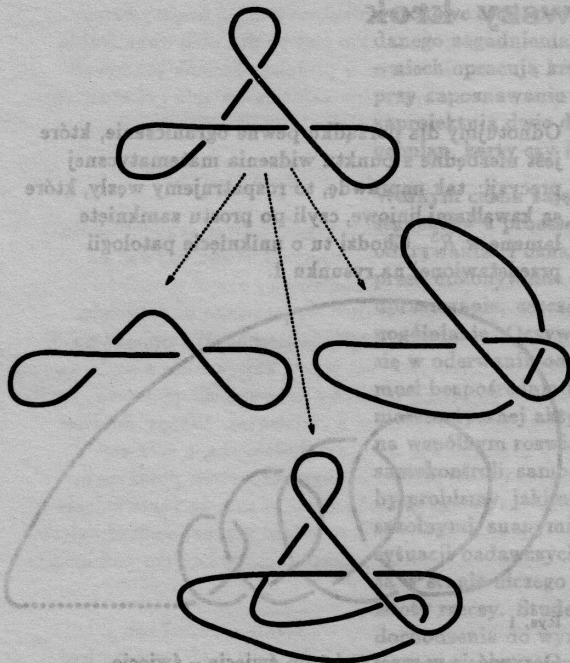
Oczywiście w rzeczywistym świecie – świecie sznurowadeł, kabli i nici – taka patologia nie jest możliwa. Jest może rzeczą dyskusyjną, czy założenie jakie zrobiliśmy jest najlepszym sposobem uniknięcia tej patologii – w praktyce specjaliści od teorii węzłów rozumują na ogół w kategoriach gładkich, a nie kawałkami liniowymi, zostawmy jednak te subtelności na boku.

Naszym głównym tematem jest kwestia, jak teoria węzłów, która wydaje się na pierwszy rzut oka tematem ściśle trójwymiarowym, może być potraktowana jako zagadnienie w gruncie rzeczy dwuwymiarowe i jak, z drugiej strony, choć wydaje się zagadnieniem *stricto* topologicznym, może być potraktowana jako temat w gruncie rzeczy algebraiczny. Punktem wyjścia jest obserwacja, że węzły dają się w bardzo naturalny i przekonujący sposób rysować na płaszczyźnie. Rysunek 2 przedstawia dwa węzły narysowane w postaci tak zwanych diagramów i chyba nie wymaga żadnych objaśnień.



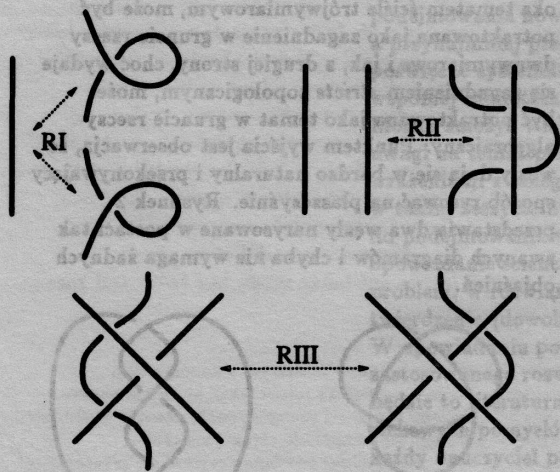
Rys. 2

Każdy węzeł da się przedstawić w taki sposób. Zawsze da się wybrać kierunek rzutowania tak, aby punkty wielokrotne rzutowania były co najwyżej punktami podwójnymi, a mianowicie skrzyżowaniami takimi, jak na rysunku.



Rys. 3

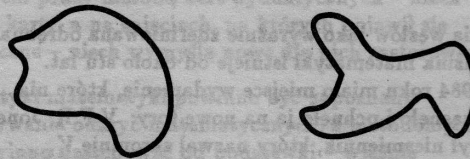
Spójrzmy teraz na rysunek 3. Przedstawia on cztery różne diagramy, które jednak nie są bardzo różne. Jest jasne, że te diagramy to cztery różne postaci tego samego węzła. Trzy diagramy w dolnej części rysunku zostały uzyskane z górnego diagramu poprzez zastosowanie pewnych elementarnych operacji, tak zwanych ruchów Reidemeistera. Rysunek 4 pokazuje pełną listę tych ruchów.



Rys. 4

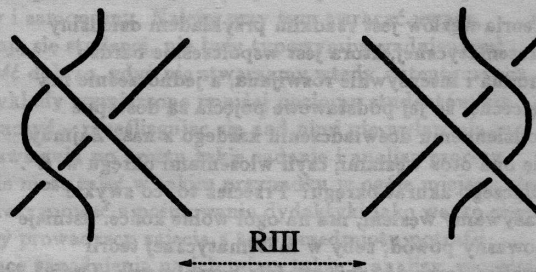
Te właśnie ruchy pozwalają zredukować problem trójwymiarowy do dwuwymiarowego: okazuje się, że dwa diagramy reprezentują ten sam węzeł wtedy i tylko wtedy, gdy można jeden na drugi przerobić za pomocą ciągu ruchów Reidemeistera (oras oczywiście deformacji diagramów w płaszczyźnie – np. dwa diagramy na rysunku 5 oczywiście reprezentują to

samo i nie trzeba żadnych ruchów Reidemeistera żeby jeden przerobić na drugi, wystarczy odpowiednia zmiana kształtu).



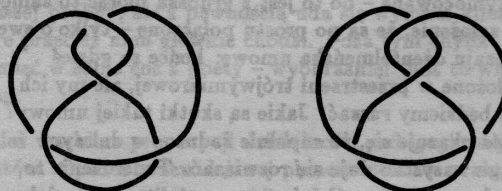
Rys. 5

W tym miejscu warto przedstawić pewne wyjaśnienie. Często bywa zadawane pytanie, czy lista ruchów Reidemeistera podana na rysunku 4 jest aby na pewno pełna. Czy na przykład nie należałoby jej wzbogacić o ruch przedstawiony na rysunku 6?



Rys. 6

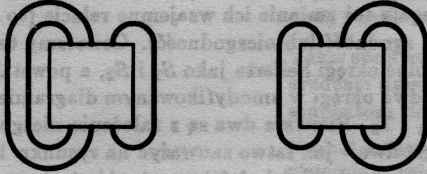
Okazuje się, że nie. Trzeba pamiętać o tym, że zastrzeżliśmy sobie również prawo do deformowania diagramów. Jeżeli popatrzymy na sprawę z tego punktu widzenia, to z łatwością zauważymy, że ruch RIII z rysunku 4 i ruch RIII z rysunku 6 to jest po prostu wbrew pozorom *to samo*. I jeszcze drugie wyjaśnienie, a właściwie dodatkowa konwencja. Do tej pory mówiliśmy o diagramach rysowanych na płaszczyźnie. Tymczasem znacznie bardziej harmonijną teorię otrzymuje się, jeżeli zdecydujemy się postrzegać te diagramy jako narysowane nie na płaszczyźnie, lecz na dużej sferze (której nasza kartka jest małym kawałeczkiem – tak małym że krzywizna jest niewidoczna). W sensie topologicznym odpowiada to zamianie teorii węzłów uprawianej w R^3 na teorię węzłów uprawianą w S^3 (w trójwymiarowej sferze). Taka konwencja ma naprawdę czysto umowny charakter i nie zmienia istoty problematyki. Zwróćmy uwagę na jeden przykład. Rysunek 7 pokazuje dwa różne diagramy tak zwanej ósemki.



Rys. 7

Czy naprawdę różne? Jeżeli traktujemy je jako diagramy na płaszczyźnie, to tak – one, owszem, reprezentują ten sam węzeł, ale żeby przerobić

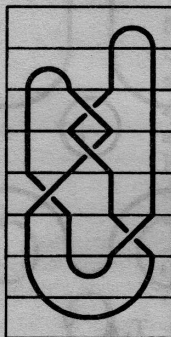
jeden na drugi trzeba wykonać pewną liczbę ruchów Reidemeistera. Natomiast jako diagramy na sferze te dwa diagramy w ogóle się nie różnią (to znaczy są jednakowe z dokładnością do deformacji). Jeszcze jeden przykład na to samo: popatrzmy na dwa diagramy z rysunku 8.



Rys. 8

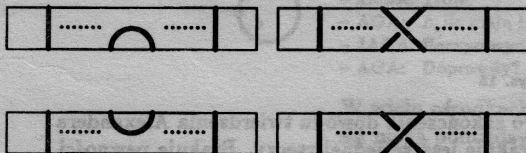
Tym razem pokazane są nie konkretne diagramy, lecz pewna ogólna sytuacja: w dwóch prostokątach może być byle co – dowolny ustalony fragment jakiegoś diagramu, ten sam dla obydwu wersji rysunku. I znów zaletą wersji z dużą sferą jest to, że obydwa diagramy są w gruncie rzeczy jednakowe, to znaczy dla przejścia od jednego do drugiego wystarczy deformacja na sferze, bez potrzeby używania ruchów Reidemeistera. To tyle, jeżeli chodzi o redukcję problemu trójwymiarowego do dwuwymiarowego.

Pora na część drugą: przejście od topologii do algebry. To wymaga dłuższego wstępu. Rysunek 9 przedstawia pewien diagram pocięty na poziome paski.



Rys. 9

Tak się składa, że zawartość każdego paska jest bardzo prosta – występują tylko cztery typy pasków wyliczone na rysunku 10.



Rys. 10

Czy tak się zawsze da zrobić. W zasadzie tak. To znaczy może się tak pechowo zdarzyć, że np. dwa skrzyżowania występują na dokładnie tym samym poziomie, ale oczywiście możemy tę niedogodność usunąć za pomocą niewielkiej deformacji i wtedy

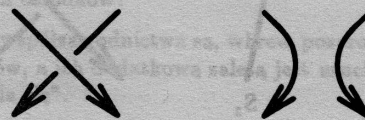
dokonać naszego podziału na poziome paski. Takie przedstawienie diagramu w postaci pewnej liczby elementarnych cegiełek poukładanych jedna na drugiej ma pewną bardzo poważną zaletę: daje się to łatwo zapisać w komputerze. I tak na przykład diagram z rysunku 9 miałby kod $\cap_1 \cap_1 \delta_2 \delta_2^{-1} \delta_3^{-3} \cup_2 \cup_1$. Czytelnik zapewne zdola złamać ten kod bez dodatkowych objaśnień. A teraz zasadniczy krok. Przyjrzyjmy się dokładnie diagramom, które są takiej postaci jak ten z rysunku 11.



Rys. 11

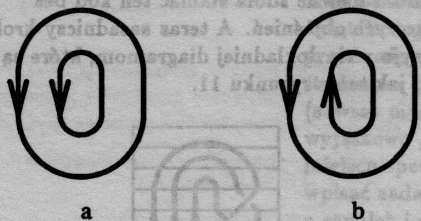
Wyróżnia się on tą szczególną cechą, że generatory typu \cap występują tylko na początku, a typu \cup tylko na końcu i jeszcze czymś więcej: właściwie to mamy tu do czynienia z jednym wielokrotnym generatorem typu \cap na górze i jednym wielokrotnym generatorem typu \cup na dole. Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden element rysunku, dotychczas nie występujący. Chodzi o orientację, czyli o strzałki zaznaczone na pasmach diagramu. Taki szczególnie sorientowany diagram nazywany jest *domkniętym warkoczem*.

Teoria węzłów zajmuje się w znacznej mierze sorientowanymi węzłami i wielkie znaczenia ma dla niej fakt, że każdy sorientowany węzeł można przedstawić w postaci domkniętego warkocza. Jest to tak zwane Twierdzenie Alexandra. Twierdzenie to za chwilę udowodnimy, ale znowu potrzebne będzie pewne przygotowanie. Twierdzenie mówi o tym, że wszystko da się przestawić w postaci bardzo szczególnych, regularnych diagramów. Aby je udowodnić zastąpimy na początek naszą dość sztywną geometryczną definicję domkniętych warkoczy definicją bardziej elastyczną i topologiczną. Otóż będziemy odąd nazywać domkniętym warkoczem taki diagram, który według dotychczasowej definicji (sztywnej i geometrycznej) jest *domkniętym warkoczem z dokładnością do deformacji*, czyli po prostu daje się zdeformować do domkniętego warkocza według pierwotnej definicji. Teraz powstaje zasadnicze pytanie. Czy to się da stwierdzić na pierwszy rzut oka? Okazuje się, że tak. Wystarczy wygładzić wszystkie skrzyżowania diagramu (tzn. do każdego skrzyżowania zastosować operację przedstawioną na rysunku 12) i zobaczyć co wyszło.



Rys. 12

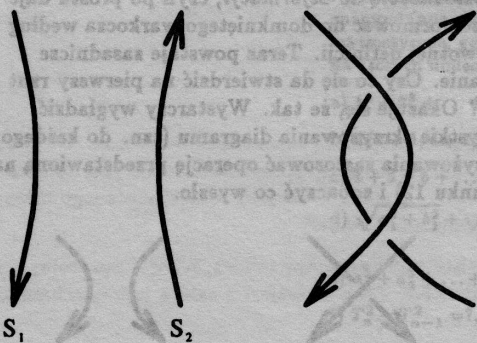
Jeżeli wysła pewna liczba okręgów rozcinających sferę (nie płaszczyznę!) na dwa koła i pewną liczbę pierścieni o zgodnie zorientowanych składowych brzegu (tzn. tak, jak na rysunku 13a, a nie tak, jak na rysunku 13b), to znaczy, że mieliśmy do czynienia z domkniętym warkoczem.



Rys. 13

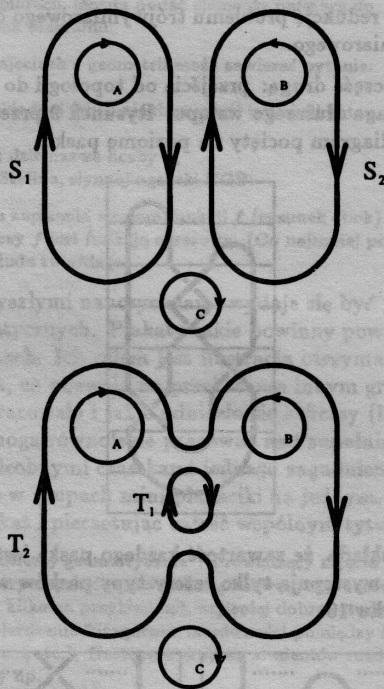
Przy okazji: taka operacja wygładzenia wszystkich skrzyżowań zawsze daje w efekcie pewną liczbę okręgów, niezależnie od tego, czy sacyliśmy od domkniętego warkoczka, czy nie. Te okręgi nazywane są okręgami Seiferta. Zachowują one orientację zgodnie z wyjściową orientacją rozpatrywanego diagramu. Zauważmy, że każde dwa zorientowane okręgi na sferze ograniczają pewien pierścień i patrząc na ten pierścień można miara orszakając, czy te dwa okręgi wyglądają tak jakby mogły być otrzymane z domkniętego warkoczka (wówczas nazywamy je zgodnymi), czy nie (wówczas nazywamy je niezgodnymi). A teraz dla dowolnego zorientowanego diagramu D okreśmy pewien parametr $h(D)$ (defekt diagramu D), jako równy liczbie par niezgodnych okręgów Seiferta. Jest to więc pewnego rodzaju miara orszakająca, na ile diagram różni się od domkniętego warkoczka (oczywiście domknięte warkoczki to dokładnie te diagramy, które mają zerowy defekt).

Zatem aby udowodnić twierdzenie Alexandra wystarczy wskazać jakiś sposób zmniejszania defektu bez zmiany typu węzła. Istnieje na to zaskakująco prosta metoda, podana przez P. Vogela w 1989 roku. Cała sztuka polega na tym, żeby wykonać ruch Reidemeistera typu II, ale nie dowolny, tylko taki który operuje na dwóch różnych okręgach Seiferta, niezgodnie zorientowanych – tak jak na rysunku 14.



Rys. 14

Taka operacja zawsze zmniejsza defekt. Co więcej, wiadomo o ile: zawsze dokładnie o jeden. Dlaczego tak się dzieje? Otóż operacja redukcji w bardzo małym stopniu zaburza strukturę okręgów Seiferta diagramu. Tylko te dwa okręgi, na których wykonano ruch Reidemeistera, ulegają zmianie, inne (nazwijmy je dla potrzeb chwili stabilnymi) pozostają nietknięte, nie ulegają też zmianie ich wzajemne relacje (to znaczy zgodność lub niezgodność). Oznaczmy te dwa szczególne okręgi Seiferta jako S_1 i S_2 , a powstałe z nich dwa okręgi w zmodyfikowanym diagramie jako T_1 i T_2 . Pierwsze dwa są z założenia niezgodne, a drugie dwa – jak łatwo zauważyć na rysunku 15 – zgodne. Stąd spadek defektu o 1. Ale to jeszcze nie wszystko. Musimy także rozpatrzyć pary z udziałem jednego okręgu stabilnego i jednego niestabilnego. Weźmy więc pod uwagę jakiś stabilny okrąg \bigcirc . Rysunek 15 przedstawia kilka wariantów położenia i orientacji okręgu \bigcirc (A , B i C). Łatwo jest sprawdzić, że dwie pary (S_1, \bigcirc) i (S_2, \bigcirc) dają w każdym przypadku łącznie taki sam wkład do defektu diagramu D , jak wkład dwóch par (T_1, \bigcirc) i (T_2, \bigcirc) do defektu zmodyfikowanego diagramu.



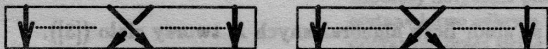
Rys. 15

Do zakończenia dowodu twierdzenia Alexandra brakuje jeszcze jednej rzeczy. Brakuje pewności, że na diagramie, który ma niezerowy defekt da się wykonać operację Vogela. To nie jest całkiem oczywiste. Pozostawimy to dociekliwości Czytelnika, podając jedną drobną wskazówkę: trzeba zauważyć, że gdyby istniał diagram z niezerowym defektem, oporny na redukcję, to po wygładzeniu dowolnego skrzyżowania (a więc również po wygładzeniu

wszystkich skrzyżowań) były w dalszym ciągu oporne na redukcję...

Warto zauważyć, że ten stosunkowo nowy dowód twierdzenia Alexandra (a samo twierdzenie jest znane od sześćdziesięciu lat) jest pod każdym względem prostsze i bardziej efektywne niż dowody znane wcześniej. W szczególności daje on znaczny stopień kontroli nad liczbą skrzyżowań: nie ulega ona dużemu zwiększeniu i jest z góry w pełni przewidywalna (mianowicie równa podwojonemu defektowi wyjściowego diagramu). I to w zasadzie wyczerpuje nasz temat (pierwszy krok), ale może wspomnijmy jeszcze, chociaż pobieżnie, o drugim, znacznie trudniejszym kroku.

Czytelnik mógł sobie zadać pytanie, po co było definiować domknięte warkoczki w ten bardziej sztywny geometryczny sposób? Jest po temu ważny powód. Pozwala to mianowicie w naturalny sposób mówić o warkoczach po prostu. Warkoczki są to diagramy powstające poprzez składanie cegiełek podanych na rysunku 16 i tylko takich (z ustaloną z góry liczbą końców, czyli pasm). Dla wygody przyjmijmy również za dopuszczalne używanie generatora trywialnego, czyli po prostu wiązki równoległych pasm.



Rys. 16

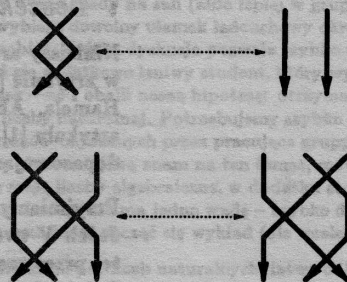
Rysunek 17 pokazuje przykładowy warkocz o trzech pasmach.



Rys. 17

Czytelnik może zauważyć, że domykając ten warkocz w standardowy sposób, uzyskamy węzeł rozpatrywany już na początku tego tekstu. Warkoczki mają więc luźne końce, co nie jest naszą ulubioną sytuacją. Będziemy jednak bardzo ostrożni w modyfikowaniu warkoczki. Będziemy je, owszem, deformować, ale tylko tak, żeby ani przez chwilę w rozpatrywanych diagramach nie pojawiły się generatory \cap ani \cup . Ścisłej mówiąc, dopuszczymy wykonywanie na warkoczach tych ruchów, które są przedstawione na rysunku 18, czyli tych ruchów Reidemeistera, które nie zaburzają struktury warkoczki (jako zbudowanego z cegiełek wyliczonych na rysunku 16). Rysunek 18 nie zawiera informacji o tym, które pasmo idzie góra, a które dół. Należy to rozumieć w ten sposób,

że dopuszczalne są te ruchy, które odpowiadają schematowi przedstawionemu na rysunku i są topologicznie, to znaczy bez rozcinania, wykonalne.



Rys. 18

I tu mamy wreszcie dawno zapowiadaną algebrę: klasy równoważności warkoczki o n pasmach (ze względu na ruchy z rysunku 18) stanowią grupę, tak zwaną grupę warkoczki o n pasmach B_n . Jest rzeczą oczywistą, że jeżeli dwa warkoczki są w tej samej klasie, inaczej mówiąc – jeżeli reprezentują ten sam element w grupie warkoczki, to ich domknięcia są równoważne jako węzły. Jest też dość widoczne, że jeżeli weźmiemy dwa warkoczki należące do B_n , które są w tej grupie sprzężone, i te warkoczki domkniemy, to również otrzymamy równoważne węzły. A teraz rozważmy jeszcze jedną operację na warkoczach, tym razem zmieniającą liczbę pasm, a mianowicie: $B_n \ni \gamma \longmapsto \gamma \delta_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$. Oczywiście wykonanie takiej operacji także nie zmienia typu węzła otrzymanego przez domknięcie warkoczki – w końcu mówimy tutaj po prostu o pewnego rodzaju ruchu Reidemeistera typu I. Natomiast zaskakujące jest to, że to już wystarczy: jeżeli domknięcia dwóch warkoczki są równoważne, to można przerobić jeden warkocz na drugi za pomocą wymienionych operacji (być może bardzo wielu). Powyższe twierdzenie znane jest jako twierdzenie Markova. Ma ono podstawowe znaczenie dla teorii węzłów, ponieważ wyraża zagadnienie równoważności węzłów w języku ściśle algebraicznym.

Grupa warkoczki daje się łatwo opisać za pomocą generatorów i relacji, a szukanie niezmienników węzłów jest, na mocy twierdzenia Markova, w znacznej mierze zredukowane do szukania funkcji klasy na grupie warkoczki (tzn. funkcji, które przyjmują jednakowe wartości na elementach sprzężonych). Tą właśnie drogą poszedł Jones, uzyskując w roku 1984 swój słynny wielomian. Trzeba tu wyraźnie powiedzieć, że teoria węzłów nie była bynajmniej w centrum zainteresowań Jonesa, wręcz przeciwnie – zajmował się on i dalej się zajmuje dziedziną bardzo odległą. Mimo to, jego odkrycie stanowiło dla teorii węzłów wielki przełom i impuls. Od tego czasu powstały dosłownie setki prac poświęconych w mniejszym czy większym stopniu wielomianowi Jonesa lub jego różnym uogólnieniom, a prace Jonesa przyczyniły się do odkrycia powiązań między całkiem różnymi dziedzinami matematyki i fizyki.