Przestrzeń $C[0,1]$ – Obiekt Uniwersalny

Piotr MANKIEWICZ, Warszawa

1. Jak na To patrzeć, czyli punkt widzenia zależy od ... ?

Przez $C[0,1]$ oznaczana jest przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku $C[0,1]$. Przypadek funkcji o wartościach zespolonych można rozważać w podobny sposób. Przypomnijmy więc pewne dobrze znane z analizy własności funkcji ciągłych na odcinku:

a) suma dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą

$$f(x), g(x) \in C[0,1] \Rightarrow f(t) + g(t) \in C[0,1],$$

b) iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcją ciągłą

$$g(x) \in C[0,1], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda g(x) \in C[0,1],$$

c) każda funkcja ciągła (na odcinku) jest ograniczona (i osiąga kresy),

$$g(x) \in C[0,1] \Rightarrow \sup g(x) = m < \infty$$

d) każdy ciąg funkcji z $C[0,1]$ spełniający jednostajny warunek Cauchy'ego jest zbieżny do funkcji ciągłej (tzn. z $C[0,1]$),

e) każda funkcja z $C[0,1]$ jest (na odcinku $[0,1]$) granicą jednostajną odpowiednio dobranego ciągu wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Na obiekt tak złożony jak $C[0,1]$ można patrzeć na różne sposoby. Np. jako na zbiór indywidualnych funkcji, jak to robimy w analizie. Własności a) i b) oznaczają, że $C[0,1]$ można traktować jako przestrzeń liniową – obiekt zainteresowania algebry liniowej. Można też inaczej. Na mocy własności c) wiemy, że funkcja ρ określona dla $f(x), g(x) \in C[0,1]$ wzorem

$$\rho(f,g) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$$

jest skończona. Łatwo można sprawdzić, że $\rho(f,g)$ jest metryką przestrzeni $C[0,1]$. Z oczywistych powodów metryka ρ nazywana jest metryką zbieżności jednostajnej. Własność d) znaczy, że $C[0,1]$ w metryce ρ jest przestrzenią zupełną, podczas gdy własność e) pociąga za sobą ośrodkowość tej przestrzeni. A zatem na $C[0,1]$ można patrzeć jako na przestrzeń metryczną, zupełną i ośrodkową – tzw. przestrzeń polską. Można też jeszcze inaczej. Połóżmy $\|f\| = \rho(f,0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ dla każdej funkcji $f \in C[0,1]$, gdzie 0 oznacza funkcję tożsamościowo równą zeru. Łatwo można sprawdzić, że tak zdefiniowana funkcja $\|\cdot\|$ nazywana dalej normą (funkcji f) spełnia warunki:

f) norma każdej funkcji z $C[0,1]$ jest nieujemna i wyłącznie norma funkcji 0 jest równa zeru,

g) dla każdej funkcji $f \in C[0,1]$ oraz dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\| \text{ (jednorodność normy),}$$

h) dla dowolnych dwu funkcji $f, g \in C[0,1]$ zachodzi nierówność

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \text{ (nierówność trójkąta).}$$

Otóż przestrzeń liniowa z zadaną przez metrykę normą spełniającą warunki f), g) i h) nazywa się przestrzenią unormowaną, a jeżeli, na dokładkę, w tej metryce jest to przestrzeń zupełna, to nazywa się przestrzenią Banacha. Zatem na przestrzeń $C[0,1]$ można też patrzeć jak na ośrodkową przestrzeń Banacha. Podsumujmy – na $C[0,1]$ można mieć różne punkty widzenia; nas jednak interesować będzie ona głównie jako ośrodkowa przestrzeń metryczna i jako ośrodkowa przestrzeń Banacha.

2. Uniwersalność przestrzeni $C[0,1]$, czyli gdzie mieszkają byty platońskie

Niech (M_i, ρ_i) będą przestrzeniami metrycznymi dla $i = 1, 2$. Przypomnijmy, że odwzorowanie $T : M_1 \to M_2$ nazywa się izometrią, jeżeli zachowuje odległość, tzn. jeżeli

$$\rho_2(Tx, Ty) = \rho_1(x, y), \qquad \text{dla dowolnych } x, y \in M_1,$$

oraz że odwzorowanie S z przestrzeni liniowej X_1 do X_2 nazywa się odwzorowaniem liniowym, jeżeli

$$S(x + y) = S(x) + S(y), \qquad \text{dla dowolnych } x, y \in M_1.$$

Twierdzenie I (o uniwersalności $C[0,1]$ w klasie ośrodkowych przestrzeni metrycznych). *Każda ośrodkowa przestrzeń metryczna jest izometryczna z pewną podprzestrzenią $C[0,1]$ (tzn. dla każdej ośrodkowej przestrzeni metrycznej (M, ρ_1) istnieje izometria $T : M \to C[0,1]$).*

Twierdzenie II (o uniwersalności $C[0,1]$ w klasie ośrodkowych przestrzeni Banacha). *Każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest liniowo izometryczna z pewną podprzestrzenią Banacha $C[0,1]$ (tzn. dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ istnieje liniowa izometria $S : X \to C[0,1]$).*

Odłóżmy na chwilę kwestię, czy oba wspomniane twierdzenia są prawdziwe, czyli kwestię, czy aby na pewno są twierdzeniami, i zastanówmy się, dlaczego twierdzenia takiego typu są ważne. Otóż, mówiąc o dowolnej przestrzeni metrycznej (czy odpowiednio o dowolnej przestrzeni Banacha), mówimy o abstrakcyjnym obiekcie spełniającym pewne warunki i w zasadzie nie mamy żadnych informacji o jego konkretnej naturze. Można powiedzieć, że jest to byt platoński. Co więcej, mówiąc o wszystkich przestrzeniach metrycznych popadamy w podobne kłopoty jak wtedy, gdy mówimy o wszystkich zbiorach. Rodzina wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych nie jest zbiorem!!! Sprawę znacznie upraszcza Twierdzenie I mówiąc, że jeżeli nie interesuje nas natura punktów danej przestrzeni ośrodkowej metrycznej, a tylko jej struktura metryczna, to możemy przyjąć, że mamy do czynienia z podprzestrzenią $C[0,1]$. Zamiast zaś mówić o klasie wszystkich przestrzeni ośrodkowych metrycznych (które nie stanowią zbioru) możemy mówić o zbiorze wszystkich podprzestrzeni $C[0,1]$. Wydaje się, że łatwiej będzie udowodnić coś o wszystkich podprzestrzeniach $C[0,1]$ niż o wszystkich przestrzeniach metrycznych ośrodkowych, a na mocy Twierdzenia I jest to dokładnie to samo. Ta sama argumentacja dotyczy oczywiście Twierdzenia II. Należy tylko zmienić „przestrzeń ośrodkowa metryczna" na „ośrodkowa przestrzeń Banacha".

Pokażemy teraz, że Twierdzenie II wynika z Twierdzenia I. W tym celu potrzebny nam będzie następujący

Fakt 1. *Każda ośrodkowa przestrzeń metryczna (M, ρ) wkłada się izometrycznie w pewną ośrodkową przestrzeń Banacha.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią wszystkich rzeczywistych ograniczonych funkcji na M z normą zadaną wzorem

$$\|f\| = \sup_{m \in M} |f(m)| \qquad \text{dla każdej funkcji } f \in X.$$

Czytelnik łatwo znajdzie metrykę na X odpowiadającą tej normie. Ustalmy teraz dowolny $m_0 \in M$ i każdemu elementowi $y \in M$ przyporządkujmy funkcję $f_y(m) = \rho(m, y) - \rho(m, m_0)$. Pokażemy, że tak zdefiniowana funkcja, nazwijmy ją T, jest izometrią. Niech $x_1, x_2 \in M$. Wtedy, z nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} \|T(x_1) - T(x_2)\| &= \sup_{m \in M} |f_{x_1}(m) - f_{x_2}(m)| \\ &= \sup_{m \in M} |\rho(m, x_1) - \rho(m, m_0) - (\rho(m, x_1) - \rho(m, m_0))| \\ &\le \sup_{m \in M} |\rho(m, x_1) - \rho(m, x_2)| \le \rho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \sup_{m \in M} |f_{x_1}(m) - f_{x_2}(m)| \geq |f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = \rho(x_1, x_2).$$

Zatem $\|T(x_1) - T(x_2)\| = \rho(x_1, x_2)$, co znaczy, że T jest izometrią. □

Dowód, że Tw. II ⇒ Tw. I. Zauważmy, że ponieważ M jest przestrzenią ośrodkową, więc także $T(M)$ jest ośrodkowym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Niech X_0 będzie najmniejszą podprzestrzenią Banacha w X zawierającą $T(M)$. Łatwo można wykazać, że X_0 jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Na mocy Twierdzenia II istnieje izometria $S : X_0 \to C[0,1]$. Oczywiście, złożenie
$ST : M \to C[0,1]$ jest izometrycznym włożeniem M w $C[0,1]$. □

Resztę artykułu poświęcimy dowodowi Twierdzenia II.

3. Zbiór Cantora i kostka Hilberta, czyli małe co nieco z topologii metrycznej

Przypomnijmy, że zbiorem Cantora $\mathcal{C}$ nazywamy podzbiór odcinka $[0,1]$ złożony z tych liczb, które w trójkowym układzie pozycyjnym mają rozwinięcie składające się wyłącznie z zer i dwójek. Tzn.

$$t \in \mathcal{C} \Leftrightarrow t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i},$$

gdzie $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem złożonym z zer i dwójek. Dla zachowania jednoznaczności przedstawienia elementu w powyższej postaci przyjmujemy, że wykluczamy ciągi, które od pewnego miejsca mają same dwójki. Oczywiście, zbiór Cantora rozpatrujemy z metryką odziedziczoną z odcinka $[0,1]$. Łatwo można sprawdzić, że zbiór Cantora jest podzbiorem domkniętym, a więc zbiorem zwartym.

Kostką Hilberta $\mathcal{Q}$ nazywamy przeliczalną potęgę odcinka $[0,1]$. Zapisując to bardziej formalnie

$$\mathcal{Q} = \{\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} : 0 \leq t_i \leq 1 \text{ dla każdego } i \in \mathbb{N}\}.$$

Kostkę Hilberta rozpatruje się z metryką ρ zadaną następującym wzorem: dla $x, y \in \mathcal{Q}$, $x = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $y = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kładziemy

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t_i - u_i|}{2^i}.$$

Dowodzi się, że kostka Hilberta jest przestrzenią zwartą.

Na początek, zauważmy następujący

Fakt 2. *Odcinek* $[0,1]$ *jest ciągłym obrazem zbioru Cantora (tzn. istnieje taka funkcja ciągła* $f : \mathcal{C} \to [0,1]$*, że* $f(\mathcal{C}) = [0,1]$*).*

Dowód. Połóżmy

$$f(\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i/2}{2^i} \quad \text{dla} \quad \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}.$$

Innymi słowy, funkcja f punktowi $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ przyporządkowuje liczbę z odcinka $[0,1]$ o rozwinięciu w układzie dwójkowym $\{\alpha_i/2\}_{i\in\mathbb{N}}$. Oczywiście, f jest „na". Wykażemy jej ciągłość. Niech $x = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}, y = \{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Wtedy

$$|f(\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}) - f(\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}})| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i/2}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i/2}{2^i}\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|/2}{2^i}.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że jeżeli $|x - y| < 3^{-(k+1)}$, to $\alpha_i = \beta_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ i zatem na mocy poprzedniej nierówności $|f(x) - f(y)| < 2^{-k}$. □

Tak naprawdę, to potrzebne nam będzie coś więcej. Mianowicie potrzebne nam będzie

Twierdzenie III. *Kostka Hilberta jest ciągłym obrazem zbioru Cantora.*

Dowód. Podzielmy zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ na przeliczalną ilość podzbiorów rozłącznych nieskończonych A_j. Dla każdego takiego podzbioru połóżmy

$$f_j(\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in A_j} \frac{\alpha_i/2}{2^i}, \qquad \text{dla} \quad \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}.$$

Podobnie jak poprzednio, stwierdzamy, że każda z funkcji f_j jest ciągłym odwzorowaniem zbioru Cantora na odcinek $[0,1]$. Ponieważ funkcje f_j zależą od różnych współrzędnych, ich wartości są „niezależne". Zatem funkcja Φ dana wzorem

$$\Phi(\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{f_j(\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}})\}_{j\in\mathbb{N}}$$

odwzorowywuje zbiór Cantora na kostkę Hilberta. Dowód ciągłości Φ pozostawiamy Czytelnikowi. □

4. Trochę analizy funkcjonalnej, czyli sztuka stawania na głowie

Dla każdego podzbioru domkniętego F odcinka $[0,1]$ przez $C(F)$ będziemy oznaczać przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na F z normą „supremum wartości bezwzględnej funkcji".

Twierdzenie IV (o operatorze jednoczesnego przedłużania). *Niech F będzie dowolnym podzbiorem domkniętym $[0,1]$. Każdą funkcję $f \in C(F)$ można przedłużyć do funkcji $\tilde{f} \in C([0,1])$ w taki sposób, by operator $\mathbf{P}$, przyporządkowujący funkcji f jej przedłużenie, był liniowym izometrycznym włożeniem przestrzeni $C(F)$ w $C([0,1])$.*

Dowód. Niech U oznacza uzupełnienie (w odcinku $[0,1]$) zbioru F. U jest podzbiorem otwartym, a zatem U jest sumą przeliczalnej ilości odcinków otwartych, rozłącznych. Powiedzmy, $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$, gdzie $I_i = (a_i, b_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Oczywiście, końce odcinków (tzn. punkty a_i i b_i) należą do zbioru F. Niech f będzie dowolną funkcją ciągłą na F. Na każdym odcinku $\overline{I}_i = [a_i, b_i]$ przedłużamy ją do funkcji liniowej o wartościach na końcach $f(a_i)$ i $f(b_i)$. W ten sposób otrzymujemy przedłużenie f do funkcji określonej na $F \cup U = [0,1]$. Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowany operator jednoczesnego przedłużania $\mathbf{P}$ jest liniowym włożeniem $C(F)$ w $C([0,1])$. Czytelnik sam zechce sprawdzić, że operator $\mathbf{P}$ jest włożeniem izometrycznym. □

Niech X będzie dowolną ustaloną ośrodkową przestrzenią Banacha. Rozważmy przestrzeń X^* wszystkich funkcjonałów liniowych ciągłych na X. Przypomnijmy, że zbiór

$$B_{X^*} = \{\phi \in X^* : |\phi(x)| \le 1 \text{ dla każdego } \ x \in X,\ \|x\| \le 1\}$$

jest kulą jednostkową w przestrzeni X^*. Z fundamentalnego w teorii przestrzeni Banacha twierdzenia Hahna–Banacha wynika, że kula B_{X^*} jest dostatecznie „bogata". Mianowicie:

(*) Dla każdych dwu elementów $x, y \in X$ istnieje $\phi \in B_{X^*}$ taki, że $\phi(x) \ne \phi(y)$.

(**) Dla każdego $x \in X$ istnieje $\phi \in B_{X^*}$ taki, że $\phi(x) = \|x\|$.

Niech $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ będzie kulą jednostkową w przestrzeni X. Z ośrodkowości X wynika ośrodkowość B_X. Ustalmy dowolny ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gęsty w B_X (w metryce zadanej przez normę w X). Zdefiniujmy metrykę ρ na B_{X^*} wzorem

$$\rho(\psi, \phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\psi(x_i) - \phi(x_i)|}{2^i}, \qquad \text{dla} \quad \psi, \phi \in B_{X^*}.$$

Bez większego wysiłku można sprawdzić, że ρ jest metryką na B_{X^*} oraz że kula B_{X^*} jest w tej metryce zbiorem zwartym. Zatem, na mocy twierdzenia Urysohna, B_{X^*} jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem kostki Hilberta $\mathcal{Q}$. W naszym przypadku, taki homeomorfizm Ψ można łatwo wypisać. Np. wzorem

$$\Psi(\phi) = \left\{\frac{\phi(x_i) + 1}{2}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}.$$

W tym momencie stajemy na głowie i zamiast patrzeć na elementy B_{X^*} jako na funkcje na X, traktujemy, całkiem na opak, elementy X jako funkcje na B_{X^*}.

Fakt 3. *Przy oznaczeniach jak wyżej, każda ośrodkowa przestrzeń Banacha X wkłada sie liniowo izometrycznie w przestrzeń $C(B_{X^*})$ funkcji ciągłych na kuli B_{X^*} z normą „supremum".*

Dowód. Każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowujemy funkcję $\tilde{x}(\phi) \in C(B_{X^*})$ zadaną wzorem

$$\tilde{x}(\phi) = \phi(x) \quad \text{dla} \quad \phi \in C(B_{X^*}).$$

Nazwijmy to odwzorowanie Λ. Liniowość Λ jest oczywista. Warunek (*) oznacza, że różnym elementom w X przyporządkowane są różne funkcje, a (**) oznacza, że $\|x\| = \|\tilde{x}(\phi)\| = \|\Lambda(x)\|$, a zatem Λ jest żądanym włożeniem liniowym i izometrycznym. □

5. Dowód Twierdzenia II, czyli kończ Waść ...

Zgromadziwszy już całą potrzebną wiedzę, możemy przystąpić do dowodu Twierdzenia II. Niech X będzie dowolną ośrodkową przestrzenią Banacha. Na mocy Faktu 3, X jest liniowo izometryczna z podprzestrzenią Banacha $\Lambda(X)$ przestrzeni $C(B_{X^*})$ funkcji ciągłych na B_{X^*} (w metryce ρ zdefiniowanej powyżej). Z drugiej strony, wiemy, że przestrzeń metryczna (B_{X^*}, ρ) jest homeomorficzna z pewnym (zwartym) podzbiorem K przestrzeni Hilberta. Nazwijmy ten homeomorfizm Ψ i zdefiniujmy odwzorowanie liniowe $\tilde{\Psi}$ działające z $C(B_{X^*})$ do przestrzeni $C(K)$ wzorem

$$(\tilde{\Psi}(f))(q) = f(\Psi^{-1}(q)) \quad \text{dla} \quad q \in K \quad \text{oraz} \quad f \in B_{X^*}.$$

Czytelnik zechce zauważyć, że $\tilde{\Psi}$ jest liniowo izometrycznym włożeniem $C(B_{X^*})$ w $C(K)$. Zatem, złożenie $\Lambda \circ \tilde{\Psi}$ jest liniowo izometrycznym włożeniem X w $C(K)$. W ten sposób udowodniliśmy następujący

Fakt 4. *Każda ośrodkowa przestrzeń Banacha X wkłada się liniowo izometrycznie w przestrzeń $C(K)$ funkcji ciągłych na pewnym podzbiorze zwartym $K \subset \mathcal{Q}$.*

W tym momencie do zakończenia dowodu Twierdzenia II wystarczy wykazać, że prawdziwy jest następujący

Fakt 5. *Niech K będzie zwartym podzbiorem kostki Hilberta $\mathcal{Q}$. Przestrzeń $C(K)$ wkłada się liniowo izometrycznie w przestrzeń $C([0,1])$.*

Dowód. Z Twierdzenia III wiemy, że istnieje ciągłe odwzorowanie Φ zbioru Cantora $\mathcal{C}$ na kostkę Hilberta. Połóżmy $F = \Phi^{-1}(K)$. Postępując podobnie jak poprzednio, definiujemy liniowo izometryczne włożenie $\tilde{\Phi}$ przestrzeni $C(K)$ w przestrzeń $C(F)$

$$(\tilde{\Phi})(g))(t) = g(\Phi(t)) \quad \text{dla} \quad t \in F \text{ oraz } g \in C(K).$$

Ponieważ na mocy Twierdzenia o jednoczesnym przedłużaniu, istnieje liniowo izometryczne włożenie $\mathbf{P}$ przestrzeni $C(F)$ w $C([0,1])$, zatem odwzorowanie $\mathbf{P} \circ \tilde{\Phi} : C(K) \to C([0,1])$ jest żądanym włożeniem liniowo izometrycznym $C(K)$ w $C([0,1])$. □

Pytanie. Jak wynika z Twierdzenia I, każdą przestrzeń metryczną można traktować jako podprzestrzeń przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$. Czy zatem każdy punkt przestrzeni metrycznej jest funkcją?