Zadanie domowe

Zadanie domowe brzmiało mniej więcej tak: „Przedstawić najlepsze swoje pomysły z wykładów i ćwiczeń z analizy". Sprawdzenie zadania domowego miało nastąpić w czasie X Szkoły Matematyki Poglądowej, Miętne – styczeń '93 (temat spotkania brzmiał: „Co i jak mówimy studentom"). Pamiętając, że 'najlepsze' wcale nie musi od razu znaczyć 'dobre', zabrałem się do pracy. Oto jak przebiegały te przygotowania.

Moje idee fix związane z nauczaniem to: komputer, uprawianie matematyki przez studentów w czasie zajęć i przejście graniczne (kolejność przypadkowa). Jak to przekazać słuchaczom? Najlepiej by słuchacze sami 'poprawiali' matematykę, niech stosują komputery i, w dodatku, niech to ma związek z przejściem granicznym. Jednym słowem: podzielę słuchaczy na grupy (jak? – ustawienie stołów to załatwi – sami się podzielą), rozdam im komputery i zadania. Ja będę się przechadzał, zachęcał do pracy, ewentualnie coś podpowiadał. Właściwie wszystko gotowe – jeszcze tylko jeden 'drobny' szczegół – nad czym oni mają pracować ???

Może wszystkie zadania powiązać motywem przewodnim? Takim mogłoby być pojęcie tempa zbieżności szeregów czy ciągów. Pojęcie niemal oczywiste, gdy jest poprzedzone dobrymi przykładami. Zatem może o tym poprzedzaniu...

Każdy zna liczbę $\pi = 3{,}141592653\ldots$, definiować ją można na wiele sposobów. Mam więc problem dla wszystkich:

Zobaczyć (np. za pomocą kalkulatora) jak szybko pojawiają się kolejne cyfry (druga, trzecia, czwarta,...) rozwinięcia dziesiętnego π obliczane wg. podanych wzorów.

Rozdam kalkulatory programowalne, 'lekko' je oprogramuję (tak, by obliczały kolejne sumy częściowe dowolnych szeregów, kolejne przybliżenia całki różnymi metodami, itp.), żeby nie tracić za dużo czasu na szczegóły techniczne.

'Natchnienia' szukałem w książce Leji i, oczywiście, u Fichtenholza. Trzeba jedynie zredagować problemy; może tak:

* Rozwijając w szereg Taylora funkcję arctg (+ tw. Abela) dostajemy wzór Leibniza:
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$
Zilustrować jak wolno ten szereg jest zbieżny.

* Można 'tej powolności' zaradzić wykorzystując tożsamość:
$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$
Jak? Zilustruj, jaka jest teraz szybkość zbieżności.

* A co, gdy wykorzystamy tożsamość: $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$?

* Trudniej wyrachować rozwinięcie w szereg Taylora funkcji
$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \ldots$$
Jak wykorzystać je dla uzyskania przybliżeń π?
Jaką otrzymujemy szybkość zbieżności?

Spacerując powinienem przypominać, że danych tożsamości nie trzeba uzasadniać (to jest porcja wiedzy, którą słuchaczom podaję by zastosowali ją tak, jak podano w poleceniu). A jeśli ktoś, zamiast liczyć kalkulatorem, oszacuje tempo zbieżności np. dla szeregów naprzemiennych? To tym lepiej!

* **Wzór Viète'a:**

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

wzór Wallisa:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

mogą posłużyć do obliczania przybliżeń π. Zilustruj jak szybko pojawiają się kolejne cyfry π.

* **Co prawda wzór Stirlinga**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

nie służy do wyznaczania π, ale może jednak spróbuj.

* **(Nie na temat) Dokładnie twierdzenie orzeka, że**

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in (0,1) \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}x_n}.$$

Używając kalkulatorowego π zbadaj, jak zachowuje się ciąg $\{x_n\}$ wyznaczony na twoim sprzęcie.

Ze wzorem Wallisa studenci mieli pewne trudności, trzeba im było podpowiedzieć (np. żeby pogrupowali po dwa czynniki), wzór Viète'a też wymagał podpowiedzi (najpierw opisać – rekurencyjnie – czynniki), ale w Miętnem te uwagi będą chyba zbyteczne.

Jakaś geometria, oczywiście, musi się pojawić, wszak π się urodziła w geometrii i to starożytnej, zatem historia:

* **Mógł Archimedes - możesz i Ty spróbować wyznaczyć przybliżenia π wpisując (lub opisując) w koło jednostkowe wielokąty foremne. (Oczywiście nie fair jest używać funkcji trygonometrycznych, dlatego też wygodnie jest badać 4-, 8-, 16-,... kąty foremne i zależności rekurencyjne.)**
  Jak zwiększa się dokładność?

* **Nasz rodak A. Kochański podał konstrukcję odcinka, którego długość w przybliżeniu wynosiła π (patrz H. Steinhaus "Kalejdoskop matematyczny", str. 139).**
  Jak dokładne jest to przybliżenie?

Muszę tylko pamiętać, żeby zabrać ze sobą *Kalejdoskop*...

* **Oczywiste (dlaczego?) są wzory:**

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Zilustruj, jak szybko kalkulatory dają na ich podstawie kolejne przybliżenia π (porównaj też różne metody całkowania). Czym można wytłumaczyć różnice w dokładności porównując te dwie całki?

* **Następujące wzory trudno uznać za właściwe do wyznaczania przybliżeń π:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi},$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{0}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

A jednak spróbuj. Na czym polegają kłopoty?

Ciekawe jak słuchacze zareagują na te moje enigmatyczne pytania. Ja ucieszyłem się, gdy kiedyś student odpowiedział – „w pierwszej z całek dokładność jest mniejsza, bo wykres funkcji bardzo stromo opada do 1". Może to zacytować w czasie omówienia?

Pomysły poniższych zadań zrodziły się po lekturze książeczki M. Kuczmy *O szeregach liczbowych*; pewnie nikt nie pamięta tych dalszych wzorów, i dobrze. . .

* **Niełatwo jest wyprowadzić następujące wzory:**

a) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$,

a′) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}$,

a″) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$,

b) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$,

c) $1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945}$,

d) $1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{\text{[redacted]}}$,

e) $1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\ldots=$ [redacted].

Zilustruj jakie jest tempo otrzymywania kolejnych cyfr π.

* **Spróbuj odgadnąć (np. za pomocą kalkulatora lub komputera), co się kryje pod kleksami?**

* **Jak znaleźć odpowiedniki a′) i a″) dla wyższych wykładników?**

UWAGA: O takich szeregach, w których wykładniki są nieparzyste, niewiele wiadomo;
ponoć za sensację uznano ogłoszenie niewymierności $\sum \frac{1}{n^3}$ (na Kongresie ICM w Helsinkach w 1978 roku).

Łatwo podsumować taką pracę w grupach, muszę tylko przygotować na folii do rzutnika te koszmarne wzory (ich pisanie na tablicy niepotrzebnie zajmie czas).

Coś specjalnego powinienem jeszcze przygotować dla J.B. Często przedstawiał on na Szkołach OKM-u świetne rozwiązania zadań z geometrii, więc może tym razem będzie układał zadania? Trzeba tylko dać mu dobry pretekst, może taki:

Trójkąt $W_0W_1W_2$ modyfikujemy w sposób następujący: Wierzchołek W_0 przenosimy w takie miejsce, by w nowym trójkącie boki wychodzące z niego były równe, a obwód niezmieniony. Procedurę powtarzamy dla kolejnych wierzchołków (ustawionych w porządku cyklicznym).

PROBLEM: Co się będzie działo?
(z długościami boków, z wierzchołkami,...)

* Uogólniając zagadnienie proszę postawić jak najwięcej ciekawych pytań - już bardziej konkretnych (ewentualnie odpowiadając na niektóre z nich).

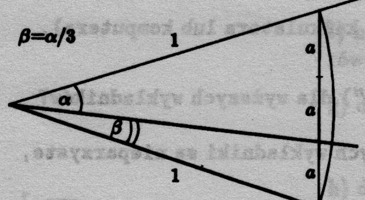
Pętla ze sznurka nałożona na trzy gwoździe wbite w miękką płytę radykalnie ułatwia sformułowanie powyższego problemu – pokażę to. Poproszę J.B., by zanotował wyniki pracy swojej grupy w formie plakatu, który wywieszę w czasie przerwy i nie trzeba będzie omawiać.

Coś jeszcze przydałoby się specjalnie dla M.K. Oczywiście geometria, ale jak znaleźć coś czego on nie zna? Chyba wiem, *Kalejdoskop*... można czytać tysiąc razy i zawsze wyczyta się coś nowego. Muszę jeszcze zadbać o formę. Ze studentami zrobiliśmy plakat. Może wykorzystać ten pomysł? Przygotować szkic takiego plakatu pozostawiając tylko luki do wypełnienia? O tak:

Tu jakiś dowcipny rysunek, np. Pani i Jaś w klasie. Sam sobie nie poradzę, ale ktoś życzliwy na pewno mi pomoże.

Pani: Drogie dzieci, wielki matematyk francuski, Ewaryst Galois, uzasadnił, że nie można konstrukcyjnie podzielić pdowolnego kąta na trzy równe części. (Mówiąc skrótowo: trysekcja jest niewykonalna.)

Jaś: Proszę Pani! A ja to zrobiłem! tylko... O tak:



Pani: Nie, to nie jest poprawne bo:
luka pierwsza

Jaś: Ale gdy $\alpha = \pi/3$ to wyrachowałem na kalkulatorze, że
luka druga

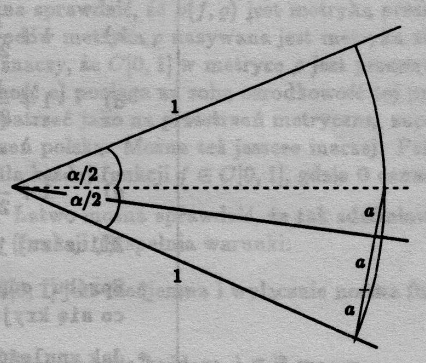
$\beta = \ldots$

Pani: Tak, możesz zatem zapisać tylko, że $\beta \approx \alpha/3$. Ogólnie
luka trzecia

$\alpha/3 - \beta = \ldots$

funkcja zmiennej α

Jaś: Ale to zapewne będzie dobra trysekcja:



Pani: Nie, też nie, choć faktycznie jest bardzo mała różnica pomiędzy β a $\alpha/3$. Dla $\alpha = \pi/3$ wynosi tylko...
luka czwarta

Jaś: To można chyba jeszcze dokładniej:
luka piąta

Jaś: i jeszcze... , i jeszcze... - tak w nieskończoność:
luka szósta

Pani: Jasiu, nie garb się.

Pierwsse miejsce do wypełnienia jest łatwe – sachęci do dalssej pracy. Druga luka – nietrudna, s pomocą kalkulatora do wyrachowania; nieocsekiwany wynik powinien sachęcić do dalssej pracy. Do trseciej luki trseba albo dużo cierpliwości, albo systemu komputerowego typu DERIVE – trseba będsie podpowiedsieć (podam ponadto roswinięcie w ssereg Taylora tej funkcji, widać wtedy, skąd taka duża dokładność).

Posostał jesscse największy problem: csym sająć Z.M. żeby prses te dwie godsiny się nie nudsił (dla mnie, jak pewnie dla wielu ucsestników Sskół, jest on matematycsnym autorytetem tych spotkań). Długo mi to nie dawało spokoju, aż pewnego ranka...

Koszmary senne:

Dla ,,porządnej" funkcji f

a) integrał diadyczny na $[0,1]$ to

$$\int_0^1 f,\quad \int_{\int_0^{1/2} f}^{\int_{1/2}^1 f} f,\quad \int_{\int_{\int_0^{1/4} f}^{\int_{1/4}^{1/2} f} f}^{\int_{\int_{1/2}^{3/4} f}^{\int_{3/4}^{1} f} f} f,\ \ldots \to ?$$

b) integral Cantora na $[0,1]$ to

$$\int_0^1 f,\quad \int_{\int_0^{1/3} f}^{\int_{2/3}^1 f} f,\quad \int_{\int_{\int_0^{1/9} f}^{\int_{2/9}^{1/3} f} f}^{\int_{\int_{2/3}^{7/9} f}^{\int_{8/9}^{1} f} f} f,\ \ldots \to ?$$

Bo csemuż bym nie miał postawić pytania, na które nie snam odpowiedsi (nawet dla wielomianów) ?

Prawdopodobnie spotkam się s sarsutem, że na pewno nie pracuję se studentami tak, jak opisałem. Odpowiem, że sscsegóły faktycsnie są inne (smienione tak, by nie sanudsić słuchacsy), ale mam nadsieję, że udało mi się pokasać 'co i jak mówię studentom'.

Co s tego wssystkiego się udało? Jak wypadło 'sprawdsenie' sadania domowego? Nie mnie o tym sądsić. Chociaż Z.M. miał sabawę i to na niejeden wiecsór. Może on to kiedyś opisse?

Zadanie domowe
odrobił
Krzysztof OMILJANOWSKI

P.S. Już po wssystkim snalasłem sebranie resultatów dotycsących π w podręcsniku (tłumacsenie s angielskiego) *Matematyka w szkole średniej*, tom 3, WSiP, Warssawa 1988, str. 397–399. Nie ma to, jak 'odkrywanie Ameryki', chocby po ras setny!