Wybrane własności bazy Hamela (I)

Józef BANAŚ, Krzysztof FRĄCZEK

i Leszek OLSZOWY, Rzeszów

Omawiając pojęcie przestrzeni wektorowej (liniowej) nad pewnym ciałem wprowadzamy niezwykle ważne i zarazem fundamentalne pojęcie, pojęcie bazy tej przestrzeni. Jest to podzbiór tej przestrzeni, który jest liniowo niezależny i który generuje tę przestrzeń. Istotną jest tu własność, która orzeka, że jakiś zbiór jest bazą pewnej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor tej przestrzeni można przedstawić jako kombinację liniową skończonej liczby wektorów z tego zbioru, o współczynnikach z zadanego ciała, a ponadto przedstawienie to jest jedyne.

Nie będziemy tutaj przedstawiać dowodu wypowiedzianej wyżej własności odsyłając zainteresowanego Czytelnika do artykułu [3].

Bardzo ważnym twierdzeniem w teorii przestrzeni wektorowych, a zarazem trudnym do udowodnienia, jest twierdzenie mówiące, że wszystkie bazy tej samej przestrzeni są zbiorami równolicznymi.

Oczywiście dowodzi się, że każda przestrzeń wektorowa ma przynajmniej jedną bazę.

Przypomnijmy, że dowód ten przeprowadza się z wykorzystaniem lematu Kuratowskiego–Zorna w ten sposób, że w rodzinie wszystkich podzbiorów liniowo niezależnych zadanej przestrzeni wprowadzamy porządek za pomocą relacji inkluzji, a następnie wykazujemy, że rodzina ta z tym porządkiem ma elementy maksymalne, które muszą być już bazą przestrzeni.

Inaczej rzecz ujmując można powiedzieć, że konstrukcję bazy przeprowadza się „poszerzając" jakiś wybrany na początku zbiór liniowo niezależny za pomocą indukcji pozaskończonej tak długo, aż otrzymamy bazę.

Jest to więc konstrukcja bardzo nieefektywna w przypadku, gdy baza jest zbiorem nieskończonym. Można w związku z tym postawić problem zbadania własności bazy w zadanej przestrzeni właśnie w tym przypadku. Skoro bowiem bazy efektywnie nie znamy, to chcielibyśmy poznać przynajmniej trochę jej strukturę.

Można też postawić pytanie, czy jest możliwe „zaprogramowanie" jakiejś własności bazy poprzez wybór odpowiedniego zbioru liniowo niezależnego na początku konstrukcji.

Zajmiemy się próbą udzielenia odpowiedzi na wyżej postawione pytania w pewnym szczególnym, ale bardzo ważnym przypadku, który wydaje się być stosunkowo najbliższy naszej intuicji.

Mianowicie będziemy rozpatrywać przestrzeń liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jako przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Zgodnie z ogólną teorią istnieje baza tej przestrzeni, którą nazywa się tradycyjnie *bazą Hamela* (została wprowadzona w 1905 r. przez Georga Hamela). Bazę Hamela będziemy oznaczać literą H.

Chcąc przebadać własności dowolnie ustalonej bazy Hamela H wystartujemy od najprostszej z nich.

Wł. 1. Baza Hamela jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Dla dowodu przypuśćmy, że baza Hamela H jest zbiorem przeliczalnym.

$$H = \{h_1, h_2, \ldots\}.$$

Weźmy dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$. Wtedy x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = w_1 h_1 + w_2 h_2 + \ldots + w_n h_n,$$

gdzie $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{Q}, w_n \neq 0$, niektóre zaś spośród liczb $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ (nawet wszystkie) mogą być równe 0. Zatem x jest jednoznacznie reprezentowane przez ciąg $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ i przyporządkowanie $x \longrightarrow (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ jest wzajemnie jednoznaczne.

Wiadomo z teorii mnogości, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do zbioru przeliczalnego jest przeliczalny. Oznaczałoby to, że zbiór $\mathbb{R}$ jest przeliczalny i sprzeczność.

Wł. 2. Baza Hamela zawiera nieprzeliczalną ilość liczb przestępnych.

Wynika to z Wł. 1 oraz z faktu, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Wł. 3. Każda baza Hamela zawiera co najwyżej jedną liczbę wymierną.

Dowód: Przypuśćmy, że $h_t, h_s \in H, h_t \neq h_s$ oraz $h_t, h_s \in \mathbb{Q}$. Weźmy liczbę rzeczywistą $x = h_t$. Wtedy

$$x = 1 \cdot h_t$$

oraz

$$x = \frac{h_t}{h_s} \cdot h_s.$$

Ale $h_t/h_s \in \mathbb{Q}$, a więc x miałby dwa różne przedstawienia za pomocą bazy H. Jest to jednak sprzeczne z definicją bazy.

Wł. 4. Istnieją bazy Hamela zawierające dokładnie jedną liczbę wymierną.

Rzeczywiście, wystarczy wziąć zbiór $\{1, \sqrt{2}\}$, będący liniowo niezależny, poszerzyć go do bazy Hamela i skorzystać z Wł. 3.

Wł. 5. Do bazy Hamela nie mogą należeć wszystkie liczby niewymierne.

Własność ta wynika łatwo z Wł. 10, którą później udowodnimy. Podamy jednak teraz niezależny dowód. Zauważmy najpierw, że prawdziwa jest implikacja

$$x, y \in H \Longrightarrow x + y \notin H.$$

Wynika to z definicji bazy. Gdyby bowiem $u = x + y \in H$, to z równości

$$1 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot u = 0$$

wynikałoby, że wektory x, y, u są liniowo zależne, wbrew definicji bazy.

Następnie, dla dowodu rozważanej własności przypuśćmy, że H zawiera wszystkie liczby niewymierne. Zatem $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in H$. Ale $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ też jest liczbą niewymierną, więc $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in H$. Przeczy to jednak wyżej ustalonej własności.

Wł. 6. W każdej bazie Hamela znajdują się liczby x oraz y takie, że $x + y \notin \mathbb{Q}$.

Dowód: Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że dla dowolnych $a, b \in H$ zachodzi, że $a + b \in \mathbb{Q}$. Weźmy trzy dowolne liczby $h_1, h_2, h_3 \in H$, różne między sobą. Wtedy (z założenia) $h_1 + h_2 \in \mathbb{Q}$, $h_2 + h_3 \in \mathbb{Q}$ więc $h_1 + 2h_2 + h_3 \in \mathbb{Q}$ oraz $h_1 + h_3 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow h_1 + 2h_2 + h_3 - (h_1 + h + 3) = 2h_2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow h_2 \in \mathbb{Q}$. Podobnie wykazujemy, że $h_1 \in \mathbb{Q}$. Otrzymamy więc sprzeczność z Wł. 3, co kończy dowód.

Wł. 7. Jeżeli H jest bazą Hamela oraz a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, $a \neq 0$, to zbiór aH też jest bazą Hamela.

Symbol xY oznacza zbiór złożony ze wszystkich iloczynów xy, gdzie $y \in Y$. Analogicznie określa się dalej użyty symbol $X + Y$ itd.

Dowód: Weźmy $ah_1, ah_2, \ldots, ah_n \in aH$ i załóżmy, że są one liniowo zależne. Wtedy istnieją $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{Q}$, nie wszystkie równe 0 takie, że

$$w_1 a h_1 + w_2 a h_2 + \ldots + w_n a h_n = 0,$$

skąd wynika $w_1 h_1 + w_2 h_2 + \ldots + w_n h_n = 0$, co oznaczałoby, że $h_1, h_2, \ldots, h_n$ są liniowo zależne. Przeczy to jednak temu, że $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$. A zatem $ah_1, ah_2, \ldots, ah_n$ są liniowo niezależne. Implikuje to, że zbiór aH jest liniowo niezależny.

Weźmy dalej dowolną liczbę rzeczywistą x. Wtedy z faktu, że H jest bazą wynika, że istnieją $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbf{Q}$ takie, że

$$\frac{x}{a} = w_1 h_1 + w_2 h_2 + \dots w_n h_n.$$

Stąd

$$x = w_1 a h_1 + w_2 a h_2 + \dots + w_n a h_n.$$

Implikuje to, że aH jest generatorem przestrzeni $\mathbf{R}$. Koniec dowodu.

Wł. 8. Istnieją bazy Hamela nie zawierające żadnej liczby wymiernej.

Dowód: Skonstruujmy bazę Hamela zawierającą liczbę 1:

$$H = \{1, h_t, h_s, \dots\}.$$

Korzystając z Wł. 6 znajdźmy $x, y \in H$ takie, że $b = x + y \notin \mathbf{Q}$. Rozważmy zbiór B, gdzie

$$B = \frac{1}{b} H.$$

Z Wł. 7 wynika, że B jest bazą Hamela. Przypuśćmy, że B zawiera liczbę wymierną q. Wtedy, dla pewnego $h \in H$ mamy

$$\frac{h}{b} = q.$$

Stąd $h = q \cdot b = q(x + y) = qx + qy$. Ale również $h = 1 \cdot h$. Oznaczałoby to, że h mą dwie różne reprezentacje za pomocą elementów bazy H. Sprzeczność implikuje, że B nie zawiera żadnej liczby wymiernej.

Wł. 9. Nie istnieje baza Hamela H taka, że dla dowolnych $x, y \in H$ zachodzi, że $xy \in H$.

Dowód: Dowód niewprost. Przypuśćmy, że istnieje baza Hamela H taka, że $xy \in H$ dla dowolnych $x, y \in H$. Weźmy funkcję $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ taką, że:

1) $f(h) = 1$ dla dowolnego $h \in H$,

2) f jest addytywna tzn. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$.

Ustalmy dalej $x, y \in \mathbf{R}$, dowolne. „Rozwińmy" x i y za pomocą bazy H:

$$x = w_1 h_{t_1} + w_2 h_{t_2} + \dots + w_n h_{t_n},$$
$$y = v_1 h_{s_1} + v_2 h_{s_2} + \dots + v_m h_{s_m}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x \cdot y = {} & w_1 v_1 h_{t_1} h_{s_1} + w_1 v_2 h_{t_1} h_{s_2} + \dots + w_1 v_m h_{t_1} h_{s_m} + \\ & + w_2 v_1 h_{t_2} h_{s_1} + w_2 v_2 h_{t_2} h_{s_2} + \dots + w_2 v_m h_{t_2} h_{s_m} + \\ & + \dots\dots\dots + \\ & + w_n v_1 h_{t_n} h_{s_1} + w_n v_2 h_{t_n} h_{s_2} + \dots + w_n v_m h_{t_n} h_{s_m}. \end{aligned}$$

Korzystając z założonego tutaj faktu mamy, że $h_{t_i} h_{s_j} \in H$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$). Stąd i z własności funkcji f mamy:

$$f(x \cdot y) = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_n v_m.$$

Z drugiej strony

$$f(x) \cdot f(y) = (w_1 + w_2 + \dots + w_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_m).$$

Zatem $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, dla $x, y \in \mathbf{R}$.

W powyższym rozumowaniu skorzystaliśmy z łatwej do udowodnienia własności funkcji addytywnej f. Mianowicie $f(qx) = qf(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ oraz $q \in \mathbf{Q}$ (zob. np. [1]).

Łatwo wykazać, co robi się w teorii równań funkcyjnych, że istnieją tylko dwie funkcje spełniające powyższe równanie funkcyjne i będące jednocześnie addytywne: $f \equiv 0$, $f(x) = x$ (por. [2]). Przeczy to jednak założonej wyżej własności 1) funkcji f.

Otrzymana sprzeczność wykazuje, że nie istnieje baza Hamela H zamknięta ze względu na mnożenie. Koniec dowodu.

Wł. 10. Miara wewnętrzna dowolnej bazy Hamela H jest równa 0.

Dowód: Wykażemy, że $H + H$ nie zawiera żadnego przedziału. Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że jest odwrotnie, tzn. $H + H$ zawiera pewien przedział otwarty. Bez straty ogólności możemy założyć, że istnieją takie a, b, $0 < a < b$, że $[a, b] \subset H + H$.

Wtedy każda liczba $y \in [a, b]$ daje się jednoznacznie przedstawić w postaci $y = h_t + h_s$, gdzie $h_t, h_s \in H$.

Weźmy dalej dowolną liczbę rzeczywistą $x > 0$. Wtedy w przedziale $\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{x}\right)$ znajduje się pewna liczba wymierna $\frac{n}{m}$. Mamy

$$\frac{a}{x} < \frac{n}{m} < \frac{b}{x}$$

skąd wynika, że $\frac{n}{m}x \in (a, b)$. Zatem na podstawie ustalonej wyżej własności dostajemy, że $\frac{n}{m}x = h_t + h_s$ (jednoznacznie) więc

$$x = \frac{m}{n}h_t + \frac{m}{n}h_s$$

(jednoznacznie).

Jeżeli $x < 0$ to otrzymamy, że $x = \left(-\frac{m}{n}\right) h_t + \left(-\frac{m}{n}\right) h_s$. Oznacza to, że każdą liczbę $x \neq 0$ można przedstawić jako kombinację liniową dwóch elementów bazy Hamela H. Jest to sprzeczne z faktem, że H jest bazą o większej ilości elementów niż 2.

Zatem baza H tym bardziej nie może zawierać żadnego przedziału. Z twierdzenia Steinhausa [2] wynika teraz, że miara wewnętrzna bazy Hamela H jest równa 0 i koniec dowodu.

Uwaga. Na początku lat dwudziestych bieżącego stulecia W. Sierpiński udowodnił, że istnieją zarówno mierzalne jak i niemierzalne (w sensie Lebesgue'a) bazy Hamela. Zatem jeżeli H jest mierzalną bazą Hamela, to jej miara Lebesgue'a jest równa 0.

Oznacza to, że baza Hamela (mierzalna lub nie) jest dość rzadkim podzbiorem prostej $\mathbb{R}$.

Prace cytowane

1. M. Kuczma, *O polu prostokąta,* Delta **7**(1983),10–12.
2. M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality,* PWN, Warszawa–Kraków–Katowice 1985.
3. Z. Sawoń, *Lemat Kuratowskiego-Zorna,* Delta **9** (1982),1–3.