Zadania kombinatoryczne w geometrii

Marcin MAZUR, Warszawa

Źródłem zadań, którym poświęcony jest niniejszy artykuł jest stosunkowo młoda i wciąż rozwijająca się (nie do końca ukształtowana) gałąź matematyki zwana geometrią kombinatoryczną. Po bujnym rozwoju geometrii syntetycznej i rzutowej w wieku XIX, wiek XX przyniósł zainteresowanie problemami dyskretnymi, mającymi duże znaczenie w zastosowaniach matematyki. Pytania, jakie stawia sobie ten dział matematyki dotykają między innymi następujących zagadnień:

1) badanie dyskretnych (w szczególności skończonych) układów punktów w różnych przestrzeniach i znajdowanie ekstremalnych wymiarów takich układów,

2) badanie kombinatorycznych własności związanych z wypukłymi ciałami i wielościanami w przestrzeniach euklidesowych,

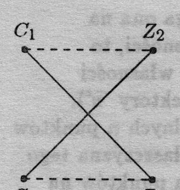
3) rozkłady figur geometrycznych dostatecznie prostej budowy i ich porównywanie,

4) zadania związane z „optymalnym" ułożeniem figur w przestrzeni.

Problemy geometrii kombinatorycznej formułują się na ogół w sposób jasny, nie wymagający dużej wiedzy matematycznej i przez to zrozumiały również dla licznej grupy miłośników matematyki – nieprofesjonalistów. Jest to, według mnie, druga po teorii liczb dyscyplina, która pozwala na pracę twórczą już zdolnym uczniom szkół średnich, przy czym geometryczny charakter problemów czyni tę dziedzinę jeszcze bardziej obrazową (i przez to bardziej intuicyjną). Natomiast metody stosowane w geometrii kombinatorycznej czerpią ze wszystkich działów matematyki począwszy od zupełnie elementarnych rozważań kombinatoryczno-geometrycznych, po metody algebraiczne, topologiczne i analityczne (co jedynie podkreśla jedność matematyki). Szczególne przypadki rezultatów uzyskiwanych w omawianej dziedzinie stanowią niejednokrotnie inspirację dla układania zadań olimpijskich. Niniejszy artykuł poświęcony jest właśnie omówieniu takich zadań i ich związków z badaniami matematycznymi.

Zadanie 1. Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wśród nich n pomalowano na zielono, a pozostałe n na czerwono. Wykazać, że każdy punkt zielony można połączyć odcinkiem z pewnym punktem czerwonym tak, by uzyskane odcinki nie miały punktów wspólnych.

Rozwiązanie. Połączmy w dowolny sposób każdy punkt czerwony z pewnym punktem zielonym odcinkiem tak, że różne punkty zielone połączone są z różnymi punktami czerwonymi. Załóżmy, że pewne dwa odcinki przecinają się, np. $\overline{C_1Z_1}$ i $\overline{C_2Z_2}$ (C_i – punkty czerwone, Z_i – punkty zielone) w przeciwnym razie teza zadania jest dowiedziona. Naturalna wydaje się zamiana odcinków $\overline{C_1Z_1}$ i $\overline{C_2Z_2}$ na odcinki $\overline{C_1Z_2}$ i $\overline{C_2Z_1}$; pozostałe odcinki zostawmy (póki co) bez zmiany. Cóż się wówczas zmieni? Otóż suma długości odcinków $\overline{C_1Z_1}$ i $\overline{C_2Z_2}$ jest ostro większa od sumy długości odcinków $\overline{C_1Z_2}$ i $\overline{C_2Z_1}$ (dlaczego?). Wobec tego suma długości wszystkich odcinków w drugim połączeniu (po zmianie) zmniejszyła się. Ponieważ możliwości połączeń jest skończenie wiele, więc istnieje połączenie o minimalnej możliwej sumie długości odcinków w nim występujących. W tym połączeniu żadne dwa odcinki nie mogą się przecinać, bo w przeciwnym razie znaleźlibyśmy połączenie o mniejszej sumie długości (jak wyżej) wbrew minimalności.



Zauważmy jeszcze, że wychodząc od dowolnego połączenia i zmieniając pary odcinków przecinających się na nieprzecinające po pewnej liczbie takich operacji otrzymamy połączenie, w którym żadne dwa odcinki nie przecinają się. Mamy więc algorytm znajdowania takiego połączenia. Swoją drogą ciekawe jest ile zmian trzeba dokonać, by uzyskać połączenie bez przecięć?

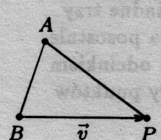
Metoda zastosowana do rozwiązania zadania 1 jest dosyć często stosowana, głównie w problemach wymagających uzasadnienia istnienia pewnej konfiguracji. Mianowicie startujemy z dowolnej konfiguracji i jeśli nie jest ona właściwa to modyfikujemy ją. Przy tym chcemy, by zmodyfikowana konfiguracja była w pewnym sensie mniejsza (co to oznacza – zależy od konkretnego problemu). Jeśli teraz wiemy, że istnieje konfiguracja minimalna (nie dająca się „zmniejszyć”), to ona musi być szukaną.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje taki skończony zbiór punktów płaszczyzny S_m, że dla dowolnego punktu A tego zbioru istnieje w tym zbiorze dokładnie m punktów odległych o 1 od A.

Rozwiązanie. Dla $m = 1$ za S_1 wystarczy wziąć parę punktów odległych o 1. Postaramy się teraz pokazać, jak ze zbioru S_m skonstruować zbiór S_{m+1}. W tym celu rozpatrywać będziemy zbiory postaci $S_m \cup D_m(\vec{v})$, gdzie $D_m(\vec{v})$ jest zbiorem otrzymanym przez przesunięcie zbioru S_m o wektor $\vec{v}$ długości 1. Wykażemy, że można tak dobrać wektor $\vec{v}$, by rozpatrywany zbiór był dobry. Zauważmy, że jeśli S_m i $D_m(\vec{v})$ są rozłączne, to dla dowolnego punktu A zbioru $S_m \cup D_m(\vec{v})$ istnieje w tym zbiorze co najmniej $m+1$ punktów odległych od A o 1 (mianowicie, np. dla $A \in S_m$, jest to m punktów w zbiorze S_m i punkt $A + \vec{v}$; tu $A + \vec{v}$ oznacza przesunięcie punktu A o wektor $\vec{v}$).

Kiedy może się zdarzyć, że S_m i $D_m(\vec{v})$ nie są rozłączne? Ano wtedy, gdy istnieją takie dwa punkty $A, B \in S_m$, że $A + \vec{v} = B$, tzn. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Czyli, gdy $\vec{v} \in V_m = \{\overrightarrow{AB} : A, B \in S_m\}$. Tym samym jeśli $\vec{v} \notin V_m$, to S_m i $D_m(\vec{v})$ są rozłączne. Zauważmy jeszcze, że V_m jest skończony.

Załóżmy teraz, że zbiory S_m i $D_m(\vec{v})$ są rozłączne. Kiedy może się zdarzyć, że dla pewnego $A \in S_m \cup D_m(\vec{v})$ istnieje więcej niż $m+1$ punktów odległych od A o 1? Zauważmy przede wszystkim, że jeśli zdarza się to dla $A \in D_m(\vec{v})$, to również dla pewnego $A' \in S_m$, mianowicie $A' = A + (-\vec{v})$ (dlaczego?). Zatem wystarczy ograniczyć się do punktów z S_m. Otóż jeśli $A \in S_m$, to w S_m istnieje dokładnie m punktów odległych o 1 od A. Również punkt $A + \vec{v} \in D_m(\vec{v})$ jest odległy od A o 1 (bo $\vec{v}$ ma długość 1). Jeśli istnieje jeszcze jakiś punkt $P \in D_m(\vec{v})$ odległy o 1 od A, to jest on postaci $B + \vec{v}$ dla pewnego $B \in S_m$, $B \neq A$. Wobec tego $BP = AP = 1$. Ale dla dowolnych dwóch różnych punktów X, Y istnieją co najwyżej dwa takie wektory $\vec{v}$ długości 1, że $Y + \vec{v}$ i X są odległe o 1. W szczególności zbiór $V(A, B)$ takich wektorów $\vec{v}$ długości 1, że $B + \vec{v}$ i A są odległe o 1, ma co najwyżej dwa elementy ($A \neq B$). Zatem, jeśli W_m jest sumą zbiorów $V(A, B)$, gdzie $A \neq B$ przebiegają punkty zbioru S_m, to W_m jest skończony i jeśli $\vec{v} \notin W_m \cup V_m$ ($W_m \cup V_m$ jest oczywiście skończony), to dla dowolnego $A \in S_m \cup D_m(\vec{v})$ w zbiorze $S_m \cup D_m(\vec{v})$ istnieje dokładnie $m+1$ punktów odległych od A o 1 (dlaczego?). Ponieważ zawsze istnieje taki wektor $\vec{v}$ długości 1, że $\vec{v} \notin W_m \cup V_m$ (bo $W_m \cup V_m$ jest skończony) więc dla takiego $\vec{v}$ można położyć $S_{m+1} = S_m \cup D_m(\vec{v})$.



Metoda, którą tu zastosowaliśmy jest warta zapamiętania. Polega ona na tym, że jeśli chcemy udowodnić istnienie obiektów o pewnej własności, to wykazujemy, że wszystkich obiektów jest więcej niż obiektów tej własności nie mających (w powyższym rozwiązaniu obiektami tymi były wektory $\vec{v}$). Stosując tę metodę Czytelnik z łatwością udowodni, że dla dowolnych n punktów przestrzeni istnieje taki pęk płaszczyzn równoległych, że każda płaszczyzna tego pęku zawiera co najwyżej jeden z danych punktów (podobnie dla punktów na płaszczyźnie i pęku prostych). Stosując ten rezultat Czytelnik bez większego trudu rozwiąże także następujące zadanie:

Zadanie. W przestrzeni dany jest zbiór $3n$ punktów. Udowodnić, że zbiór ten można rozbić na n takich zbiorów trójelementowych $\{A_i, B_i, C_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, że trójkąty $A_iB_iC_i$ są parami rozłączne.

Wracając do zadania 2 zauważmy, że skonstruowane tam zbiory S_m mają 2^m elementów. Nasuwa się pytanie, ile co najmniej elementów musi mieć zbiór postaci S_m. Tego typu problemy optymalizacji są charakterystyczne dla zagadnień związanych ze skończonymi konfiguracjami punktów. Chodzi na ogół o znalezienie minimalnej liczności układu mającego interesujące nas własności.

Zadanie 3. Niech $f(n)$ oznacza minimalną liczbę takich punktów na płaszczyźnie, że dla $k = 1, \ldots, n$ istnieje prosta przechodząca przez dokładnie k spośród tych punktów. Znaleźć $f(n)$.

Rozwiązanie. Rozwiązania tego typu problemów składają się na ogół z dwóch części. Pierwsza polega na znalezieniu takiej liczby m, że nie istnieje konfiguracja spełniająca warunki problemu i mająca mniej niż m elementów. Druga część polega na skonstruowaniu konfiguracji składającej się z dokładnie m elementów i mającej żądane własności (czasem znaleziona w pierwszej części liczba m może być zbyt mała i wtedy trzeba zacząć od początku!). Tak będzie i tym razem.

Otóż załóżmy, że A jest zbiorem punktów mających żądaną własność i niech L_p oznacza prostą przechodzącą przez dokładnie p punktów zbioru A. Zatem na L_n leży n punktów zbioru A. Prosta L_{n-1} może mieć co najwyżej jeden punkt wspólny z L_n, a więc na L_{n-1} są co najmniej $n-2$ punkty zbioru A, które nie leżą na L_n. Podobnie prosta L_{n-k} może mieć co najwyżej jeden punkt wspólny z każdą z prostych $L_n, L_{n-1}, \ldots, L_{n-k+1}$ (k – liczba naturalna mniejsza od n), a więc na L_{n-k} jest co najmniej $n-k-k = n-2k$ „nowych punktów" zbioru A (tzn. nie leżących na żadnej prostej o numerze większym niż $n-k$). Zatem zbiór A zawiera co najmniej $n + (n-2) + \ldots + (n - 2[\frac{n}{2}])$ punktów. Tym samym

$$f(n) \geq n + (n-2) + \ldots + \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) =$$

$$= \underbrace{n+n+\ldots+n}_{[\frac{n}{2}]+1 \text{ razy}} - 2\left(1 + \ldots + \left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)n - 2\cdot\frac{[\frac{n}{2}]\cdot([\frac{n}{2}]+1)}{2} =$$

$$= \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left[\frac{n+2}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right] \quad \left(\text{bo } n - \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

Pozostaje dla każdego n skonstruować zbiór A_n mający $g(n) = [\frac{n+1}{2}]\cdot[\frac{n+2}{2}]$ elementów i spełniający warunki zadania. Poniższa konstrukcja wynika z analizy rozwiązania pierwszej części (jak?). Za A_1 wystarczy wziąć zbiór jednopunktowy, za A_2 – zbiór złożony z dwóch punktów. Dalej, jak to się często robi, konstrukcja będzie przebiegać indukcyjnie. Załóżmy więc, że A_n jest zbiorem składającym się z $g(n)$ punktów i spełniającym warunki zadania i niech L_i będzie prostą przechodzącą przez dokładnie i punktów zbioru A_n dla $i = 1, \ldots, n$. Ponadto niech L będzie prostą nierównoległą do żadnej z prostych L_i i nie przechodzącą przez żaden punkt ze zbioru A_n ani przez punkty przecięcia żadnych dwóch spośród prostych $L_1, \ldots, L_n$ (istnienie takiej prostej wykazuje się używając metody opisanej po zadaniu 2) oraz niech M_i będzie punktem przecięcia prostych L i L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). W końcu niech M_{n+1}, M_{n+2} będą dwoma różnymi punktami prostej L różnymi od punktów $M_1, \ldots, M_n$ i niech $A_{n+2} = A_n \cup \{M_1, \ldots, M_{n+2}\}$. Wówczas prosta L_i przechodzi przez dokładnie $i+1$ punktów zbioru A_{n+2} (mianowicie i punktów zbioru A_n i punkt M_i). Prosta L przechodzi przez dokładnie $n+2$ punkty zbioru A_{n+2}, mianowicie $M_1, \ldots, M_{n+2}$ (bo punkty te są parami różne, dlaczego?). Ponieważ istnieje prosta przechodząca przez dokładnie 1 punkt zbioru A_{n+2} (dlaczego?), więc zbiór A_{n+2} spełnia warunki zadania dla liczby $n+2$ i ma $g(n) + n + 2 = (n+2) + [\frac{n+2}{2}]\cdot[\frac{n+1}{2}] = [\frac{n+2}{2}]\cdot[\frac{n+1}{2}] + [\frac{n+2}{2}] + [\frac{n+3}{2}] = [\frac{n+2}{2}]\cdot([\frac{n+1}{2}]+1) + [\frac{n+3}{2}] = [\frac{n+2}{2}]\cdot[\frac{n+3}{2}] + [\frac{n+3}{2}] = [\frac{n+3}{2}]\cdot([\frac{n+2}{2}]+1) = [\frac{n+3}{2}]\cdot[\frac{n+4}{2}] = g(n+1)$ elementów. Tym samym, ponieważ potrafimy skonstruować zbiory A_1 i A_2 i mając zbiór A_n potrafimy skonstruować zbiór A_{n+2}, więc dla każdego n potrafimy skonstruować zbiór A_n mający $g(n)$ elementów i spełniający warunki zadania. Wobec tego $f(n) = g(n)$.

Następne zadanie będzie ilustracją indukcji matematycznej w zadaniach geometrycznych. Było to zadanie nr 5 na ubiegłorocznej (tzn. XXXIII) Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej i okazało się zadaniem najtrudniejszym tejże Olimpiady.

Zadanie 4. W przestrzeni z prostokątnym układem współrzędnych $Oxyz$ dany jest skończony zbiór punktów S. Niech S_x, S_y, S_z będą zbiorami złożonymi z rzutów prostokątnych wszystkich punktów zbioru S odpowiednio na płaszczyzny Oyz, Oxz, Oxy. Udowodnić, że $|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$, gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A.

Rozwiązanie. Jak już wspomnieliśmy posłużymy się metodą indukcji matematycznej. Nie będzie to jednak indukcja ze względu na liczbę punktów zbioru S, ale na liczbę różnych współrzędnych „zetowych" punktów zbioru S. Jeśli wszystkie punkty S mają taką samą współrzędną „zetową" równą z_0, tzn. leżą w płaszczyźnie $z = z_0$ wówczas oczywiście $|S| = |S_z|$ (dlaczego?). Zatem w tym przypadku teza sprowadza się do nierówności $|S_x| \cdot |S_y| \geq |S|$. Nierówność ta jest płaską wersją naszego zadania i sformułujemy ją, jak to się często czyni, w postaci lematu (tzn. twierdzenia pomocniczego):

Lemat. Jeśli na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych Oxy dany jest skończony zbiór punktów S oraz S_x, S_y są rzutami zbioru S odpowiednio na proste Oy i Ox, to $|S_x| \cdot |S_y| \geq |S|$.

Dowód. Każdy punkt zbioru S leży na przecięciu pewnej prostej prostopadłej do osi Oy i przechodzącej przez pewien punkt zbioru S_x (mianowicie rzut tego punktu na Oy) oraz pewnej prostej prostopadłej do osi Ox i przechodzącej przez punkt zbioru S_y (rzut tego punktu na Ox). Ponieważ te proste mają $|S_x| \cdot |S_y|$ punktów przecięcia, więc $|S| \leq |S_x| \cdot |S_y|$. ■

Powyższy lemat kończy rozważania w przypadku, gdy S zawiera się w jednej płaszczyźnie $z = z_0$. Załóżmy teraz, że jeśli liczba różnych współrzędnych „zetowych" punktów zbioru S jest równa n (w dalszym ciągu będziemy mówili w takiej sytuacji, że S ma n różnych współrzędnych „zetowych"), to teza zadania jest prawdziwa i niech S będzie zbiorem mającym $n+1$ różnych współrzędnych „zetowych". Wobec tego punkty zbioru S zawarte są w $n+1$ płaszczyznach $z = z_0$, $z = z_1, \ldots, z = z_n$. Załóżmy, że płaszczyzna $z = z_n$ zawiera najmniejszą liczbę punktów zbioru S. Niech S_0 będzie zbiorem punktów S zawartych w płaszczyznach $z = z_0, \ldots, z = z_{n-1}$, a S_1 – zawartych w płaszczyźnie $z = z_n$. Dla $i = 0, 1$ zbiory $S_{i,x}$, $S_{i,y}$, $S_{i,z}$ niech będą rzutami zbioru S_i odpowiednio na płaszczyzny Oyz, Oxz, Oxy. Wówczas

$$\begin{aligned} &|S_x| = |S_{0,x}| + |S_{1,x}|, \ |S_y| = |S_{0,y}| + |S_{1,y}|, \\ &|S_{0,z}| \geq |S_{1,z}| = |S_1|, \ |S| = |S_0| + |S_1| \end{aligned} \tag{1}$$

Ponadto z założenia indukcyjnego dla zbioru S_0 mamy

$$|S_0|^2 \leq |S_{0,x}| \cdot |S_{0,y}| \cdot |S_{0,z}|, \tag{2}$$

a z lematu dla zbioru S_1:

$$|S_{1,x}| \cdot |S_{1,y}| \geq |S_1|, \tag{3}$$

Wobec tego $|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| = (|S_{0,x}| + |S_{1,x}|) \cdot (|S_{0,y}| + |S_{1,y}|) \cdot |S_z| =$
$= |S_{0,x}| \cdot |S_{0,y}| \cdot |S_z| + |S_{1,y}| \cdot |S_{1,x}| \cdot |S_z| + (|S_{0,x}| \cdot |S_{1,y}| + |S_{1,x}| \cdot |S_{0,y}|)|S_z|$.
Ponieważ $|S_z| \geq |S_{0,z}|$ oraz $|S| - |S_0| = |S_1| = |S_{1,z}| \leq |S_z|$,
więc z (2) i (3) otrzymujemy, że $|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| \geq |S_{0,x}| \cdot |S_{0,y}| \cdot |S_{0,z}| +$
$+(|S| - |S_0|)(|S| - |S_0|) + (|S_{0,x}| \cdot |S_{1,y}| + |S_{1,x}| \cdot |S_{0,y}|)|S_z| \geq$
$\geq |S_0|^2 + (|S| - |S_0|)^2 + 2\sqrt{|S_{0,x}| \cdot |S_{1,y}| \cdot |S_{1,x}| \cdot |S_{0,y}|} \cdot |S_z| \geq$
$\geq |S_0|^2 + (|S| - |S_0|)^2 + 2\sqrt{|S_{0,x}| \cdot |S_{0,y}| \cdot |S_{0,z}|} \cdot \sqrt{|S_{1,x}| \cdot |S_{1,y}| \cdot |S_{1,z}|} \geq$
$\geq |S_0|^2 + (|S| - |S_0|)^2 + 2\sqrt{|S_0|^2} \cdot \sqrt{(|S| - |S_0|)(|S| - |S_0|)} =$
$= |S_0|^2 + (|S| - |S_0|)^2 + 2|S_0|(|S| - |S_0|) = |S|^2$, tzn. $|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| \geq |S|^2$
(wykorzystaliśmy tu fakt, że dla liczb dodatnich a, b jest $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (dlaczego?)). Na mocy zasady indukcji teza zadania została dowiedziona. ■

Jak widać powyższa indukcja jest wysoce nietrywialna i nic dziwnego, że sprawiła uczestnikom MOM wiele kłopotów. Udowodniony fakt pochodzi od znanego matematyka H. Whitneya, który wykorzystał go do dowodu następującego twierdzenia:

Jeśli figura w przestrzeni 3-wymiarowej ma objętość V, a jej rzuty na płaszczyzny Oyz, Oxz, Oxy mają pola odpowiednio S_x, S_y, S_z, to

$$V^2 \leq S_x S_y S_z.$$

Zadanie 5. W kwadracie o boku 1 leży n punktów tworzących n-kąt wypukły. Wykazać, że pewne 3 z tych punktów wyznaczają trójkąt o polu nie większym niż $\frac{8}{n^2}$.

Rozwiązanie. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą kolejnymi wierzchołkami n-kąta wypukłego wyznaczonego przez dane punkty. Ponadto niech $a_i = A_iA_{i+1}$ oraz niech $\alpha_i = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (wierzchołki numerujemy modulo n, tzn. $A_{n+i} = A_i$). Niech S_i oznacza pole trójkąta $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Wobec tego $S_i = \frac{1}{2}a_{i-1}a_i \sin\alpha_i$. Tym samym mamy

$$\sqrt{S_1} + \ldots + \sqrt{S_n} = \sqrt{\frac{1}{2}a_na_1 \sin\alpha_1} + \ldots \sqrt{\frac{1}{2}a_{n-1}a_n \sin\alpha_n} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2}a_na_1} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{2}a_{n-1}a_n} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{a_n + a_1}{2} + \ldots \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}(a_1 + \ldots + a_n)$$

(znów skorzystaliśmy z nierówności $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$). Wobec tego jeśli S oznacza najmniejsze z pól S_i, to mamy:

$$S = (\sqrt{S})^2 \leq \left(\frac{\sqrt{S_1} + \ldots + \sqrt{S_n}}{n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}(a_1 + \ldots + a_n)}{n}\right)^2 = \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{2n^2}.$$

Pozostaje zauważyć, że jeśli wielokąt wypukły W_1 leży wewnątrz wielokąta W_2, to obwód W_1 jest nie większy od obwodu W_2, co będzie treścią następnego zadania. Tym samym $a_1 + \ldots + a_n \leq 4$, a stąd $S \leq \frac{16}{2n^2} = \frac{8}{n^2}$.

Przeanalizujmy metodę użytą w powyższym rozwiązaniu. Mianowicie, by wykazać, że wśród rozważanych obiektów istnieje obiekt mały, wykazujemy że średnia wielkość obiektów jest mała, a oczywiście obiekt najmniejszy jest mniejszy niż średnia. Metoda ta jest często stosowana przy dowodzeniu różnego typu nierówności.

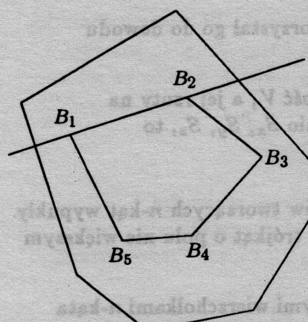
Rozwiązane zadanie wiąże się z wciąż otwartym zagadnieniem postawionym przez Heilbrona, mianowicie:

W kwadracie leży n punktów. Niech S oznacza pole najmniejszego trójkąta o wierzchołkach w tych punktach. Znaleźć kres górny (supremum) liczb S dla wszystkich układów n punktów w kwadracie.

Przejdźmy teraz do problemów związanych z figurami wypukłymi. Teoria zbiorów wypukłych jest obszernym i obecnie szybko rozwijającym się działem matematyki, któremu poświęcono wiele książek i artykułów.

Na wstępie przypomnimy kilka własności zbiorów wypukłych. Przede wszystkim zbiór wypukły to taki, który wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek je łączący. Każdy zbiór można „uwypuklić”, tzn. istnieje najmniejszy zbiór wypukły zawierający dany zbiór. Jeśli zbiór jest skończonym zbiorem punktów płaszczyzny (przestrzeni), to jego uwypuklenie jest wielokątem (wielościanem) wypukłym o wierzchołkach w pewnych z danych punktów. Wielokąt wypukły ma tę własność, że mieści się w jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą zawierającą dowolny z jego boków. Jeśli W jest wielościanem wypukłym mającym w wierzchołków, k krawędzi i s ścian, to $w - k + s = 2$ (jest to wzór Eulera).

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli wielokąt wypukły W_1 leży wewnątrz wielokąta W_2, to obwód W_1 jest nie większy niż obwód W_2.



Rozwiązanie. Niech $B_1, B_2, \ldots, B_n$ będą kolejnymi wierzchołkami W_1. Prosta B_1B_2 dzieli wielokąt W_2 na dwa wielokąty W_2' i W_3, przy czym, $W_1 \subseteq W_3$. Obwód wielokąta W_3 nie przekracza obwodu wielokąta W_2 (dlaczego?). Podobnie prosta B_2B_3 dzieli W_3 na dwa wielokąty W_3' i W_4, $W_1 \subseteq W_4$ i obwód W_4 nie przekracza obwodu W_3. Postępując w ten sposób dalej otrzymamy ciąg wielokątów $W_2 \supseteq W_3 \supseteq \ldots \supseteq W_n$ takich, że obwód W_i nie przekracza W_{i-1} i $W_n = W_1$. Stąd teza zadania. ■

Warto zapamiętać udowodniony przed chwilą fakt.

Zadanie 7. Wykazać, że w dowolnym wypukłym wielościanie istnieje ściana mająca mniej niż 6 boków.

Rozwiązanie. Mamy udowodnić, że wśród rozważanych obiektów, tzn. ścian, istnieje obiekt „mały", tzn. ściana mająca mniej niż 6 krawędzi. Spróbujmy przeto zastosować metodę opisaną po zadaniu 5.

Niech więc w, k, s oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu wypukłego i niech k_i oznacza liczbę krawędzi i-tej ściany, $i = 1, \ldots, s$. Zatem średnia liczba krawędzi jednej ściany jest równa $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} k_i$.

Ponieważ każda krawędź należy do dokładnie dwóch ścian, więc $\sum_{i=1}^{s} k_i = 2k$.

Wystarczy zatem wykazać, że $\frac{2k}{s} < 6$ (dlaczego?). W tym celu zauważmy, że z każdego wierzchołka wychodzą co najmniej 3 krawędzie i każda krawędź ma dwa wierzchołki, więc $\frac{3}{2}w \leq k$ (dlaczego?), tzn. $w \leq \frac{2}{3}k$. Z wzoru Eulera mamy $w - k + s = 2$, więc $2 \leq \frac{2}{3}k - k + s = s - \frac{1}{3}k$, a stąd $s \geq \frac{1}{3}k + 2 > \frac{1}{3}k$, tzn. $\frac{2k}{s} < 6$. ■

Metoda uzyskiwania nierówności między liczbą wierzchołków, krawędzi, ścian jest dosyć typowa, więc warto ją przemyśleć i zapamiętać.

Zadanie 8. Na prostej danych jest n odcinków, z których każde dwa mają punkt wspólny. Wykazać, że wszystkie odcinki mają punkt wspólny.

Rozwiązanie. Dowód będzie indukcyjny. Dla $n = 3$ oznaczmy dane odcinki przez I_1, I_2, I_3 i niech $A_3 \in I_1 \cap I_2$, $A_2 \in I_1 \cap I_3$, $A_1 \in I_2 \cap I_3$. Wówczas któryś z punktów A_i leży pomiędzy pozostałymi, np. A_3 leży między A_1 i A_2. Ale $A_1 \in I_3$ i $A_2 \in I_3$, zatem $\overline{A_1A_2} \subseteq I_3$, a stąd $A_3 \in \overline{A_1A_2} \subseteq I_3$, tzn. A_3 jest punktem wspólnym odcinków I_1, I_2, I_3. Jeśli teraz założymy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n i rozpatrzymy $n+1$ odcinków $I_1, \ldots, I_{n+1}$ spełniających założenia zadania, to przyjmując $J = I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$ otrzymamy wobec przed chwilą udowodnionego faktu, że $I_k \cap J \neq \emptyset$ dla $k = 1, \ldots, n-1$. Ponadto $I_k \cap I_s \neq \emptyset$ dla k, s nie przekraczających $n-1$. Wobec tego, dowolne dwa odcinki spośród $I_1, \ldots, I_{n-1}, J$ mają niepustą część wspólną, a ponieważ jest ich n, wobec założenia indukcyjnego odcinki te mają punkt wspólny,. Tym samym odcinki $I_1, \ldots, I_{n-1}, I_n, I_{n+1}$ również mają punkt wspólny, co kończy dowód kroku indukcyjnego i rozwiązanie zadania. ■

Udowodniony fakt jest przypadkiem jednowymiarowym następującego twierdzenia Helly'ego:

Jeśli na płaszczyźnie (w przestrzeni n-wymiarowej) danych jest $k \geq 3$ ($k \geq n+1$) figur wypukłych i każde 3 (każde $n+1$) z nich mają punkt wspólny, to wszystkie figury mają punkt wspólny. Dowód tego twierdzenia, który jest adaptacją rozwiązania powyższego zadania (indukcja względem k; najistotniejsza część to dowód dla $k = n + 2$), pozostawiamy Czytelnikowi. Korzystając natomiast z twierdzenia Helly'ego na płaszczyźnie rozwiążemy następujące zadanie:

Zadanie. Dany jest wielokąt wypukły o średnicy 1. Dowieść, że można go umieścić w kole o średnicy $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

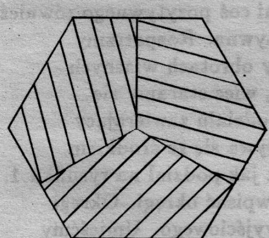
Rozwiązanie. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą wierzchołkami naszego wielokąta i niech K_i będzie kołem o promieniu $\frac{\sqrt{3}}{3}$ i środku A_i. Rozpatrzmy dowolne trzy z tych kół, $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}$. Ponieważ trójkąt $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ ma wszystkie boki długości nie przekraczającej 1, więc można go zmieścić w kole o promieniu $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (teza zadania dla trójkąta). W samej rzeczy, jeśli trójkąt jest rozwartokątny, to mieści się w kole o promieniu $\frac{1}{2}$ – mianowicie kole o średnicy będącej najdłuższym bokiem (dlaczego?); jeśli zaś trójkąt jest ostrokątny bądź prostokątny, to istnieje kąt α tego trójkąta spełniający nierówności $60^\circ \leq \alpha \leq$ $\leq 90^\circ$. Wówczas $\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, a stąd i twierdzenia sinusów $2R = \frac{a}{\sin\alpha} \leq \frac{2a}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ (a – bok przeciwległy kątowi α), stąd $R \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, tzn. okrąg opisany na rozważanym trójkącie ma promień nie przekraczający $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Wobec tego istnieje punkt odległy od każdego z punktów $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ o co najwyżej $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dlaczego?). Punkt ten należy więc do kół $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}$. Tym samym dowolne 3 spośród rozważanych kół mają punkt wspólny, a więc na mocy twierdzenia Helly'ego wszystkie koła (jako figury wypukłe) mają punkt wspólny. Ten wspólny punkt jest odległy od każdego z wierzchołków wielokąta nie więcej niż o $\frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd wielokąt nasz mieści się w kole o środku w tymże punkcie i promieniu $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dlaczego?), co kończy rozwiązanie. ∎

Ostatnie zadanie jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia pochodzącego od G. Junga:

Dowolną figurę wypukłą o średnicy 1 w przestrzeni n-wymiarowej można umieścić w kuli o promieniu $\sqrt{\frac{k}{2k+2}}$.

Z zadaniem tym wiąże się krąg problemów polegających na umieszczaniu figur wypukłych o danej średnicy w pewnych figurach możliwie najmniejszych, np. każdą figurę płaską o średnicy 1 można umieścić w kwadracie o boku 1 i w sześciokącie foremnym o odległości między parami boków równoległych równej 1. Ten ostatni fakt jest punktem wyjścia do rozwiązania następującego zadania:

Zadanie 10. Wykazać, że dowolną figurę o średnicy 1 na płaszczyźnie można rozbić na 3 figury o średnicy mniejszej od 1.



Rozwiązanie. Ponieważ omówione na początku uwypuklenie figury nie zwiększa średnicy, więc wystarczy się ograniczyć do figur wypukłych (dlaczego?). Umieśćmy więc najpierw naszą figurę w sześciokącie o odległości między równoległymi bokami równej 1. Następnie podzielmy ten sześciokąt na trzy wypukłe części średnicy mniejszej niż 1 łącząc środek sześciokąta ze środkami co drugiego boku. Tym samym nasza figura zostanie podzielona na 3 części o średnicy mniejszej od 1 (dlaczego?). ∎

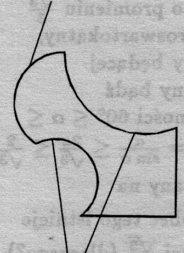
Udowodniony fakt wiąże się ze starym problemem pochodzącym od polskiego matematyka Karola Borsuka:

jaka jest najmniejsza liczba k taka, że każdą figurę o średnicy 1 w przestrzeni n-wymiarowej można rozbić na k figur o średnicach mniejszych od 1.

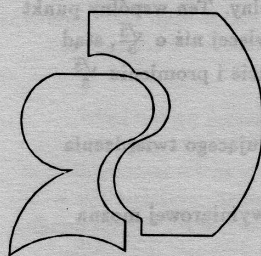
Borsuk postawił hipotezę, że zawsze można w ten sposób rozbić figurę na $n+1$ części. Dla $n=3$ udowodniono to w 1953 roku. Dla $n \geq 4$ problem ten pozostał otwarty do 1992 roku, kiedy to wykazano, że dla dostatecznie dużych n hipoteza Borsuka jest po prostu nieprawdziwa. Warto tu jeszcze wspomnieć, że Karol Borsuk udowodnił, że n wymiarowej kuli o średnicy 1 nie można podzielić na n części o średnicy mniejszej niż 1.

Zadanie 11. Czy kwadrat można rozciąć wzdłuż prostych i łuków okręgów na skończenie wiele części, z których da się złożyć koło?

Rozwiązanie. Rozpatrzmy figury, których brzeg składa się ze skończonej liczby odcinków i skończonej liczby łuków okręgów. Zauważmy, że łuki okręgów mogą być zwrócone wypukłością na zewnątrz lub do wewnątrz. W pierwszym przypadku będziemy mówili, że łuk jest wypukły, w drugim – wklęsły. Zauważmy teraz, że jeśli składamy dwie takie figury wzdłuż części brzegu, to łuki wypukłe pierwszej figury muszą łączyć się z łukami wklęsłymi łuk wypukły



łuki wklęsłe

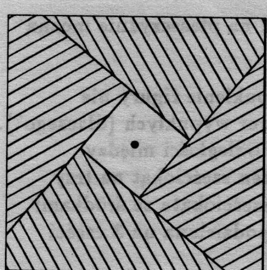


Funkcja jest D-addytywna, gdy spełnia dla dowolnych x i y warunek

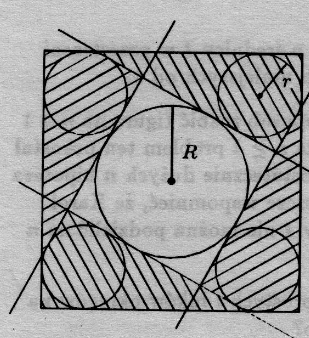
$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

oraz

$$f(\pi) = 0.$$



Rys. 1



Rys. 2

drugiej i na odwrót. Ta prosta uwaga podpowiada, by każdemu łukowi na brzegu figury przyporządkować miarę kąta środkowego jaki on wyznacza ze znakiem $+$, gdy jest to łuk wypukły, i ze znakiem $-$, gdy jest wklęsły, a odcinkowi na brzegu liczbę 0 i zsumować te liczby. Otrzymaną sumę nazywać będziemy niezmiennikiem figury. Otóż z początkowych rozważań wynika, że jeśli figura składa się z dwóch innych, to jej niezmiennik jest sumą niezmienników części składowych. Zatem jeśli dwie figury złożone są z tych samych części, to mają takie same niezmienniki. Ale kwadrat ma niezmiennik 0, a koło 2π. Zatem odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest negatywna. ∎

Metoda użyta w rozwiązaniu tego zadania jest dosyć powszechna w tego typu problemach. Jeśli chcemy wykazać, że pewne dwie figury nie dadzą się zbudować z tych samych części, znajdujemy niezmiennik, który jest różny dla tych figur i dobrze zachowuje się przy składaniu części. Takim niezmiennikiem może być na przykład pole. Okazuje się, że jeśli dwa wielokąty mają takie samo pole, to można jeden z nich pociąć prostymi na części, z których da się złożyć drugi. Dla wielościanów sytuacja jest bardziej skomplikowana. Pytanie, kiedy dwa wielościany dadzą się złożyć z takich samych części wielościennych (tzn. jeden z nich można pociąć fragmentami płaszczyzn na części, z których da się złożyć drugi) postawił w 1900 roku Dawid Hilbert jako III ze swoich słynnych problemów. Jeszcze w tym samym roku Dehn rozwiązał ten problem podając niezmienniki, które są takie same dla dwu wielościanów wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedź na rozważane pytanie jest pozytywna (to, że równość niezmienników pociąga za sobą możliwość odpowiedniego pocięcia udowodnił dopiero w 1965 roku Jean-Paul Sydler). Niezmienniki te zwane niezmiennikami Dehna to sumy iloczynów długości krawędzi przez wartości dowolnej z funkcji D-addytywnych dla kąta dwuściennego przy tej krawędzi.

Zadanie 12. Czy kwadrat można rozciąć na pięć czworokątów tak, by w każdy z nich dało się wpisać okrąg o tym samym promieniu?

Rozwiązanie. Cała trudność polega na tym, że nie znamy odpowiedzi. Przyjęcie fałszywej hipotezy i próby jej dowodu mogą często pogrążyć nas na długi czas w błędnych rozważaniach (z których czasami coś pozytywnego również może wyniknąć). Okazuje się, że odpowiedź jest pozytywna. Rozpatrzmy bowiem podziały symetryczne, nie zmieniające się przy obrotach własnych kwadratów (dowolne podziały są trudne do ogarnięcia, więc staramy się ograniczyć do sytuacji mniej złożonych). Czworokąt podziału zawierający środek musi więc być kwadratem, którego środek pokrywa się ze środkiem wyjściowego kwadratu. Taki podział wygląda więc tak jak podział na rysunku 1. Chcielibyśmy by w czworokąty tego podziału dało się wpisać okręgi. Okręgi takie będą przystające i styczne do boków kwadratu wyjściowego. Umieśćmy więc w każdym rogu kwadratu okrąg o promieniu r styczny do boków kwadratu w tym rogu i poprowadzimy styczne jak na rysunku 2. Styczne te wyznaczają nam symetryczny podział na czworokąty, w które można wpisać okrąg. Niech R oznacza promień okręgu wpisanego w środkowy kwadrat. Zauważmy, że jeśli r jest małe, to $R > r$, a jeśli $2r$ jest bliskie połowy długości boku wyjściowego kwadratu, to R jest bliskie 0, a więc $r > R$ dla dużych r. Ponieważ jeśli zmieniamy r w sposób ciągły, to R też zmienia się w sposób ciągły, przeto istnieje takie r, że $r = R$ (jeśli $f : [a, b] \to R$ jest funkcją ciągłą i $f(a) \leq a$, $f(b) \geq b$, to istnieje takie $c \in [a, b]$, że $f(c) = c$). Wykazaliśmy, że odpowiedź jest pozytywna, ale nie skonstruowaliśmy żądanego podziału (jest to typowy niekonstruktywny dowód istnienia). Przeprowadzenie konstrukcji pozostawiamy Czytelnikowi. Proponujemy też rozwiązanie analogicznego zadania z okręgami opisanymi.

Zadanie 13. W kole o promieniu 20 leży 1164 punkty. Wykazać, że w pewnym pierścieniu kołowym o promieniach 2 i 3 leży co najmniej 12 z tych punktów.

Rozwiązanie. Zauważmy, że punkt P leży w pierścieniu kołowym o środku S wtedy i tylko wtedy, gdy punkt S leży w przystającym pierścieniu o środku P. Zatem wystarczy wykazać, że wśród pierścieni kołowych o środkach w danych punktach i promieniach 2, 3 istnieje 12 mających punkt wspólny. Wszystkie te pierścienie zawarte są w kole K o promieniu $20 + 3 = 23$. Załóżmy przeciwnie, że każdy punkt koła K należy do co najwyżej 11 pierścieni. Intuicyjnie rzecz biorąc koło K jest więc pokryte tymi pierścieniami co najwyżej jedenastokrotnie, stąd suma pól tych pierścieni nie przekracza $11 \cdot \pi \cdot 23^2 = 5819\pi$. Zatem $1164 \cdot 5\pi = = 5820\pi < 5819\pi$, co jest nieprawdą. Dla zakończenia dowodu należy więc tylko uściślić ostatnią część rozważań. W tym celu sformułujemy warty zapamiętania lemat.

Lemat. Jeśli w figurze F_0 o objętości (polu) P leżą figury $F_1, \dots, F_n$ o objętościach (polach) $P_1, \dots, P_n$, przy czym każdy punkt F należy do co najwyżej k z figur F_i, to

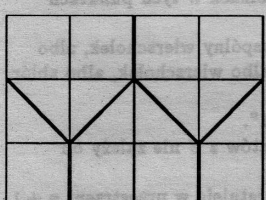
$$\sum_{i=1}^{m} P_i \leq k \cdot P.$$

Dowód. Dla dowolnego podzbioru $\{i_1, \dots, i_s\}$ zbioru $\{1, \dots, m\}$ niech $A_{i_1,\dots,i_s}$ oznacza zbiór punktów F, które należą do każdej z figur $P_{i_1}, \dots, P_{i_s}$ i nie należą do żadnej z pozostałych. Wówczas figury $A_{i_1,\dots,i_s}$ są parami rozłączne i każda z figur F_i jest sumą pewnych spośród nich (mianowicie tych, które mają punkt wspólny z F_i – dlaczego?). Wobec tego, ponieważ każdy punkt F należy do co najwyżej k figur F_i, więc każda z figur $A_{i_1,\dots,i_s}$ leży w co najwyżej k figurach F_i. Zatem

$$\sum P_i \leq k \cdot \sum S(A_{i_1,\dots,i_s}) \leq k \cdot P,$$

gdzie $S(A_{i_1,\dots,i_s})$ oznacza objętość (pole) figury $A_{i_1,\dots,i_s}$. ■

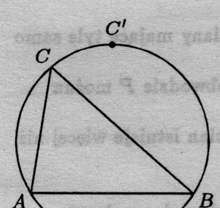
Zadanie 14. W prostokącie o wymiarach 3×4 rozłożyć możliwie dużo punktów tak, by odległość między każdymi dwoma z nich była większa od $\sqrt{5}$.



Rozwiązanie. Podzielmy nasz prostokąt na 5 części, jak na rysunku. Każda z tych części ma średnicę $\sqrt{5}$ (dlaczego?). Zatem, jeśli rozłożyć więcej niż 5 punktów w tym prostokącie, to pewne dwa punkty, będące w tej samej części podziału, będą odległe nie więcej niż o $\sqrt{5}$. Zatem co najwyżej 5 punktów można rozmieścić w tym prostokącie tak, by spełniony był warunek zadania. Uzasadnienie, że rzeczywiście można umieścić ich 5 pozostawiamy Czytelnikowi.

Nasuwa się pytanie, jaka jest maksymalna liczba d taka, że w rozpatrywanym prostokącie można znaleźć 5 punktów, wśród których odległość między dowolnymi dwoma jest nie mniejsza niż d. Jest to typowe pytanie geometrii kombinatorycznej, na które odpowiedź pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadanie 15. Wykazać, że wśród trójkątów wpisanych w dany okrąg największe pole ma trójkąt równoboczny.



Rozwiązanie. Załóżmy, że trójkąt ABC wpisany w okrąg o nie jest równoboczny, np. $AC \neq BC$. Niech C' będzie środkiem łuku ACB. Wówczas punkt C' jest bardziej odległy od prostej AB niż C, więc trójkąt ABC' ma pole większe. Gdyby więc wiedzieć, że istnieje trójkąt o największym polu wśród trójkątów wpisanych w dany okrąg, to musiałby to być trójkąt równoboczny (patrz uwagi po zadaniu 1). Że tak jest w istocie, można wykazać wykorzystując zwartość okręgu, choć argument ten nie jest całkowicie elementarny.

Inny sposób rozwiązania zadania to przeprowadzenie rachunków, co pozostawiamy Czytelnikowi. Zwracam tylko uwagę na potrzebę uzasadnienia istnienia obiektu ekstremalnego w rozważaniach tego typu, co sposób 1, z której to potrzeby często nie zdają sobie sprawy uczniowie rozwiązujący zadania olimpijskie.

Na tym kończę przegląd zadań związanych z metodami kombinatorycznymi w geometrii. Świadom tego, że przegląd ten z uwagi na obszerność tematu i ograniczoność miejsca jest niepełny, włączam bibliografię, która pozwoli uzupełnić wiadomości zainteresowanym Czytelnikom, a także zbiór zadań, które pomogą, zgodnie z zasadą *the best way to learn is to do* lepiej przyswoić sobie metody geometrii kombinatorycznej.

Zbiór zadań

1. Rozstrzygnąć czy istnieje na płaszczyźnie 100 parami różnych prostych mających dokładnie 1985 punktów przecięcia między sobą.
2. Okrąg podzielono $3k$ punktami na $3k$ łuków. W tym k łuków ma długość 1, k – długość 2 i k – długość 3. Dowieść, że istnieją wśród tych punktów dwa punkty antypodyczne.
3. Na płaszczyźnie danych jest n równoległych odcinków. Dla każdych 3 z tych odcinków istnieje prosta je przecinająca. Dowieść, że istnieje prosta przecinająca wszystkie te odcinki.
4. Na płaszczyźnie danych jest 100 punktów, żadne 3 z nich nie leżą na jednej prostej. Rozważmy trójkąty o wierzchołkach w tych punktach. Dowieść, że co najwyżej 70% z nich to trójkąty ostrokątne.
5. Na płaszczyźnie umieszczono koła o rozłącznych wnętrzach tak, że każde z nich jest styczne do co najmniej 6 innych. Wykazać, że zbiór tych kół jest nieskończony.
6. Niech M będzie takim zbiorem punktów przestrzeni, że dla każdego punktu x przestrzeni istnieje dokładnie jeden punkt $y \in M$ najdalej od niego oddalony. Dowieść, że M jest jednopunktowy.
7. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą różnymi niewspółliniowymi punktami płaszczyzny. Koło $K(P, r)$ nazwiemy minimalnym jeśli punkty A_i leżą w tym kole, przy czym co najmniej 3 z nich leżą na brzegu koła. Jaka jest maksymalna możliwa liczba okręgów minimalnych (w zależności od n)?
8. Na płaszczyźnie danych jest n różnych punktów, $n \geq 3$. Niech d będzie średnicą tego zbioru punktów. Dowieść, że wśród nich istnieje nie więcej niż n par punktów odległych o d.
9. W kwadracie o boku długości 2 leży 6 punktów. Dowieść, że istnieją wśród nich takie 3 punkty, że suma odległości między nimi nie przekracza $3\sqrt{2}$.
10. Danych jest n punktów na płaszczyźnie, żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Niech S będzie zbiorem trójkątów o wierzchołkach w tych punktach takich, że
    1° każde dwa trójkąty mają albo wspólny bok albo wspólny wierzchołek, albo są rozłączne (tzn. ich częścią wspólną jest albo bok, albo wierzchołek, albo zbiór pusty),
    2° S jest maksymalnym zbiorem mającym własność 1°.
    Wykazać, że liczba odcinków będących bokami trójkątów z S nie zależy od wyboru zbioru S.
11. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieje w przestrzeni $n+1$ wielościanów $W_0, \ldots, W_n$ o następujących własnościach:
    1° W_0 jest wielościanem wypukłym środkowo symetrycznym,
    2° każdy z W_i powstaje z W_0 przez translację,
    3° każdy z W_i ma punkt wspólny z W_0,
    4° wielościany W_i mają wnętrza parami rozłączne.
12. Dowieść, że w każdym wielościanie wypukłym jest albo ściana trójkątna, albo wierzchołek, z którego wychodzą 3 krawędzie.
13. Dowieść, że w dowolnym wielościanie wypukłym są dwie ściany mające tyle samo krawędzi.
14. Dowieść, że w dowolnym wielokącie wypukłym o polu S i obwodzie P można umieścić koło o promieniu $\frac{S}{P}$.
15. Udowodnić, że jeśli w wielościanie wypukłym mającym k ścian istnieje więcej niż $\frac{k}{2}$ ścian, z których żadne dwie nie mają wspólnej krawędzi, to w wielościan ten nie można wpisać kuli.
16. Dowieść, że wśród wszystkich n-kątów wypukłych wpisanych w dany okrąg, wielokąt foremny ma
    a) największy obwód,
    b) największe pole.
17. Wykazać, że wielokąt wypukły można pokryć trzema podobnymi do niego i mniejszymi wielokątami.
18. Udowodnić, że kulę można oświetlić czterema punktowymi źródłami światła umieszczonymi poza nią, a nie można trzema.
19. K_1, K_2 – dwa kwadraty przystające na płaszczyźnie. Czy można K_1 podzielić na trójkąty $T_1, \ldots, T_k$ tak, by istniały takie translacje $t_1, \ldots, t_k$, że $K_2 = \bigcup_{i=1}^{k} t_i(T_i)$.
20. Dany jest wielokąt wypukły mający środek symetrii. Dowieść, że można go podzielić na równoległoboki.

21. Dowieść, że istnieje taka liczba N, że wśród dowolnych N punktów na płaszczyźnie, wśród których nie ma 3 współliniowych, istnieje 100 punktów będących wierzchołkami wielokąta wypukłego.

22. Dany kwadrat rozbito na skończoną liczbę wielokątów. Dowieść, że można znaleźć taką liczbę $\varepsilon > 0$, że jeśli średnica tych wielokątów jest mniejsza niż ε, to istnieje wśród tych wielokątów taki, który ma dokładnie sześciu sąsiadów.

23. Kwadrat podzielono na czworokąty. Dowieść, że co najmniej jeden z nich jest wypukły.

24. W wielokącie wypukłym o bokach $a_1, \ldots, a_n$ leży n punktów. Dowieść, że można tak ponumerować te punkty $A_1, \ldots, A_n$, że
a) trójkąty o boku a_i i wierzchołku A_i pokrywają ten wielokąt,
b) trójkąty o boku a_i i wierzchołku A_i mają rozłączne wnętrza.

26. W czworokącie wypukłym znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna.

27. Siedem punktów leży w kole o promieniu 1 tak, że odległość między dowolnymi dwoma z nich jest nie większa niż 1. Dowieść, że jednym z tych punktów jest środek koła.

28. W kwadracie o boku 1 znajduje się n punktów. Dowieść, że można je tak ponumerować $P_1, \ldots, P_n$, że $\sum_{i=1}^{n} |P_iP_{i+1}|^2 \leq 4$.

29. Na sferze o promieniu 1 leży 5 punktów. Dowieść, że pewne dwa są odległe nie więcej niż o $\sqrt{2}$.

30. Niech S będzie sferą opisaną na czworościanie foremnym o krawędzi długości większej niż 1. Sferę S przedstawiono w postaci sumy czterech zbiorów. Udowodnić, że do pewnego z nich należą takie punkty P, Q, że $PQ > 1$.

31. Rozstrzygnąć, czy w kuli o promieniu 1 zmieści się 20 czworościanów foremnych o krawędzi 1 mających wnętrza parami rozłączne.

32. Punkty A_1, A_2, A_3, A_4 leżą na powierzchni sfery, przy czym odległość między dowolnymi dwoma z nich jest mniejsza od długości krawędzi czworościanu foremnego wpisanego w tę sferę. Dowieść, że wszystkie te punkty można oświetlić jednopunktowym źródłem światła umieszczonym na zewnątrz sfery.

33. W przestrzeni dany jest skończony zbiór punktów, z których każde cztery są wierzchołkami czworościanu o objętości nie większej niż 1. Udowodnić, że istnieje czworościan o objętości nie przekraczającej 27 i zawierający te punkty.

34. Czy koło domknięte można podzielić na dwie figury przystające i rozłączne?

35. Czy z sześcianu o krawędzi 1 można wyciąć trzy czworościany foremne o krawędzi 1?

36. W kwadracie o polu 1 leży figura o polu s taka, że żadne jej dwa punkty nie są odległe o 0,001. Dowieść, że $s < 0{,}3$.

37. Dowieść, że w dowolnym wielokącie wypukłym istnieją 3 kolejne wierzchołki takie, że przechodzący przez nie okrąg jest brzegiem koła zawierającego ten wielokąt.

38. Z płaszczyzny usunięto 3 punkty A, B, C. Jaka jest najmniejsza liczba zbiorów wypukłych, na które można rozbić otrzymany zbiór?

39. Dowieść, że dowolne dwie średnice ograniczonej figury wypukłej mają punkt wspólny.

40. Czy istnieje wielościan, którego każda ściana jest równoległobokiem, mający 1992 ściany?

Literatura

1) Д. О. Шклярский, Н. И. Ченцов, И. М. Яглом, Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии, Наука, Москва 1977.
2) A. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, Combinatorial Geometry in the plane, New York–Chicago–San Francisco–Toronto–London 1964.
3) В. Г. Болтянский, У. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, Москва, Наука 1965.
4) Б. Грюнбаум, Этюды по комбинаторной геометрии и по теории выпуклых тел, Москва, Наука 1971.